Construções Euclidianas e o Desfecho de Problemas Famosos da Geometria

Euclidean Constructions and the Ending of the Famous Problems of Geometry

Juliana Conceição Precioso
Departamento de Matemática – IBILCE, UNESP
São José do Rio Preto, SP
precioso@ibilce.unesp.br

Hermes Antônio Pedroso
Departamento de Matemática – IBILCE, UNESP
São José do Rio Preto, SP
hermes@ibilce.unesp.br

Resumo: As técnicas de construção com régua e compasso, fundamentais na geometria euclidiana, foram relacionadas com teorias algébricas modernas, tais como, da resolução de equações e extensão de corpos, a partir dos trabalhos de Paolo Ruffini (1765-1822), Niels Henrik Abel (1802-1829) e Évariste Galois (1811-1832). Desse relacionamento, foi possível dar uma resposta a alguns problemas famosos, desde a Grécia Antiga,a exemplo da *Duplicação do Cubo*, a *Trissecção do Ângulo*, a *Quadratura do Círculo* e a construção de *Polígonos Regulares*, que ficaram sem solução por mais de dois mil anos. Importantes para os nossos propósitos são as noções de números algébricos, transcendentes e os critérios que decidem sobre a construtibilidade, ou não, desses números. Neste trabalho, reconstituímos algumas etapas das construções geométricas, com régua (sem marcas) e compasso, desde as construções elementares até o desfecho dado, no século XIX, aos problemas acima citados. Destacamos, ainda, a classificação dos polígonos regulares de 3 a 17 lados, quanto a sua construtibilidade.

Palavras-chave: números algébricos e transcendentes; números construtíveis; polígonos regulares.

Recebido em 13/09/2011 - Aceito em 14/11/2011.

Abstract: Construction techniques with ruler and the compasses, fundamental on Euclidean geometry, have been related to modern algebraic theories such as solving equations and extension of bodies from the works by Paolo Ruffini (1765-1822), Niels Henrik Abel (1802-1829) and Evariste Galois (1811-1832). This relation could provide an answer to some famous problems, from ancient Greece, such as *doubling the cube*, the *trisection Angle*, the *Quadrature of the Circle* and the construction of *regular polygons*, which remained unsolved for over two thousand years. Also important for our purposes are the notions of algebraic numbers, transcendental and the criteria for constructability, of those numbers. The objective of this study is to reconstruct relevant steps of geometric constructions with ruler (unmarked) and the compasses, from the elementary to the outcome buildings, in the nineteenth century, considering those mentioned problems.

Key words: algebraic and transcendental numbers; constructible numbers; regular polygons.

1 Introdução

1.1 Números construtíveis e extensão de corpos

Em Courant [1], foram tratadas as construções geométricas fundamentais, em que segmentos de reta são associados a números reais. Para uma melhor compreensão, considera-se uma reta r, determinada pelos pontos A e B e adota-se a abscissa 0 para o A e 1 para o B. Cada ponto P de r determina um único número real x e reciprocamente.

Um segmento AP será construtível a partir de AB se P, ou equivalentemente, x for construtível. Assim, em vez de segmentos ou figuras construtíveis, consideram-se *números construtíveis.*

A raiz quadrada, por exemplo, terá fundamental importância para os nossos propósitos. Para a conveniência do leitor, será relembrada essa construção.

Raiz quadrada: dado um segmento de comprimento a, pode-se construir também $\sqrt{a}$, utilizando só a régua (sem marcas) e o compasso no sentido que dados dois pontos A e B, constrói-se a circunferência de centro A que passa por B. Sobre uma reta transporta-se $OA = a$ e $AB = 1$, traça-se uma circunferência com diâmetro $OB = a + 1$. Traça-se uma perpendicular a OB por A, a qual corta a circunferência em C. O triângulo OBC tem um ângulo reto em C.

Logo $\widehat{OCA} = \widehat{ABC}$ por serem semelhantes os triângulos retângulos OAC e CAB, e tem-se, para $x = AC$, a seguinte relação

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}.$$

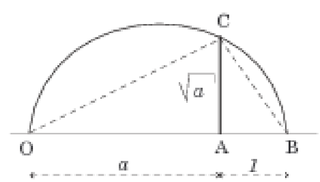

Figura 1. Construção de $\sqrt{a}$

1.2 Extensão de corpos

Admitiremos nesta seção que o leitor esteja familiarizado com o conceito de corpo. Para maiores detalhes sobre o assunto, ver [2].

Partindo da unidade, pode-se construir F_0, o corpo dos números racionais. Como foi visto na construção da raiz quadrada, pode-se facilmente obter números irracionais, fazendo uso do compasso, como por exemplo, construir $\sqrt{2} \notin F_0$.

Tendo construído $\sqrt{2}$, pode-se também construir todos os números da forma $a + b\sqrt{2}$, em que a e b pertencem a F_0. O conjunto dos números da forma $a + b\sqrt{2}$ será representado por F_1. Observa-se que $F_0 \subset F_1$, pois para todo $a \in F_0$, é possível escrever $a = a + 0\sqrt{2} \in F_1$.

Pode-se mostrar também que são construtíveis números que resultam das quatro operações elementares entre os elementos de F_1. Por exemplo, em [1] e [3], para

$a, b, c, d \in F_0$,

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{ac-2bd}{c^2-2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2} = p+q\sqrt{2},$$

sendo $p, q \in F_0$ e $c^2-2d^2 \neq 0$.

Na figura 2, ilustramos a construção de $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}$.

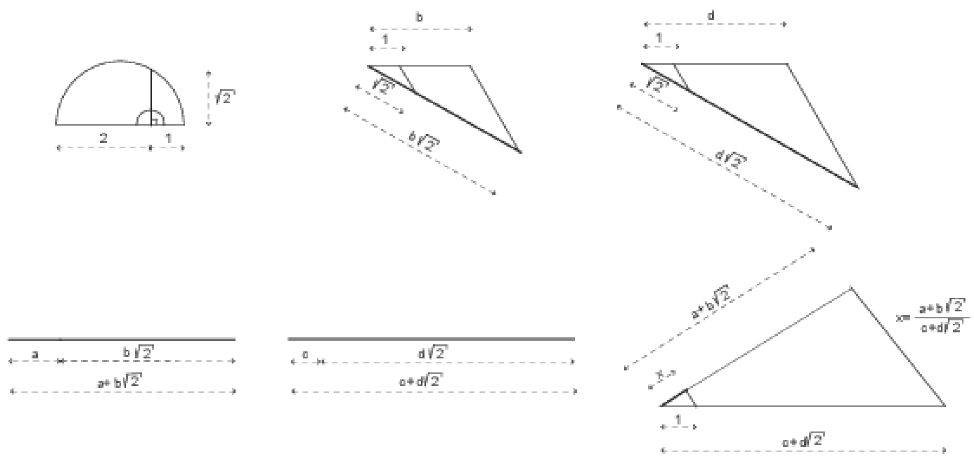

Figura 2. Construção de $\dfrac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}$

De um modo geral, suponha-se que é possível construir todos os números de um corpo F. Escolhendo k em F tal que $\sqrt{k} \notin F$, pode-se construir $\sqrt{k}$ e, assim, o corpo F' de todos os números $a+b\sqrt{k}$ em que $a, b \in F$. Por exemplo, considere-se $F = F_1$ e $k = 1+\sqrt{2}$. Pode-se observar na figura 3, que $\sqrt{k} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ é construtível.

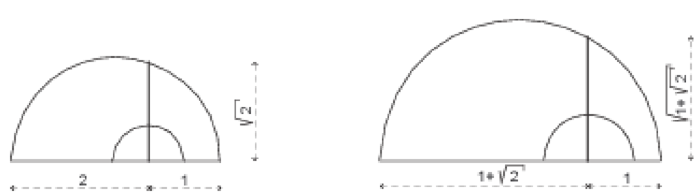

Figura 3. Construção de $\sqrt{k} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$

Portanto, é possível construir o corpo F' de todos os números da forma $p+q\sqrt{1+\sqrt{2}}$, em que $p=a+b\sqrt{2}$ e $q=c+d\sqrt{2}$, com $a,b,c,d\in F_0=\mathbb{Q}$. Diz-se que o corpo F' é obtido de F mediante a adjunção de $\sqrt{k}$.

2 Números construtíveis por adjunções

Para se chegar ao corpo dos números construtíveis, denotado por $C_{\mathbb{R}}$, procede-se da seguinte forma: partindo de um corpo F_0, por exemplo, o corpo dos racionais, e mediante a adjunção de $\sqrt{k_0}$, em que $k_0>0$, $k_0\in F_0$ e $\sqrt{k_0}\notin F_0$, obtém-se o corpo ampliado F_1. Continuando o processo, depois de n adjunções de raízes quadradas, pode-se obter um corpo F_n.

Desse modo, diz-se que um número é construtível, ou seja, pertence a $C_{\mathbb{R}}$ se pertence a algum corpo F_n do tipo descrito.

O número $\sqrt{6}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5}$ é construtível, (ver [1]).

De fato, partindo de F_0, o corpo dos números racionais e $k_0=2$, obtém-se o corpo F_1, que contém o número $1+\sqrt{2}$. Considerando $k_1=1+\sqrt{2}$, obtém-se o corpo F_2, que contém $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Uma vez que $F_0\subset F_2$, pode-se obter F_3, considerando $k_2=3\in F_2$ e desse modo, $\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}\in F_3$. O corpo F_4 é obtido pela adjunção de $\sqrt{k_3}$, em que $k_3=\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$ e, portanto, $\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5\in F_4$. Finalmente, pela adjunção de $\sqrt{k_4}$, em que $k_4=\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5$, obtém-se F_5 que contém o número $\sqrt{6}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{3}}+5}$, uma vez que $\sqrt{6}=\sqrt{2}\sqrt{3}\in F_3$.

Considerando que alguns problemas clássicos de construções com régua e compasso estão relacionados algebricamente com equações cúbicas, ressalta-se o importante resultado:

Teorema 2.1 Se uma equação cúbica de coeficientes racionais não tem raiz racional, então nenhuma de suas raízes é construtível partindo do corpo F_0.

Demonstração. Por redução ao absurdo, suponha que x seja uma raiz construtível de

$$z^3+az^2+bz+c=0, \tag{1}$$

em que $a,b,c\in F_0$. Então x pertence a algum corpo F_k, sendo k um inteiro positivo.

Se k é o menor inteiro tal que uma raiz da equação cúbica (1) pertença a F_k, então x é da forma $x = p + q\sqrt{w}$, em que $p, q, w \in F_{k-1}$.

Um fato importante para se concluir essa demonstração é mostrar que se $x = p + q\sqrt{w}$ é solução de (1), então $y = p - q\sqrt{w}$ também o é.

Como foi observado na seção 1.2, tem-se que

$$x^3 + ax^2 + bx + c = r + s\sqrt{w}, \tag{2}$$

em que $r = p^3 + ap^2 + bp + c + q^2w(3p + a)$ e $s = q(3p^2 + q^2w + 2ap + b)$.

Como y também é raiz, tem-se que

$$y^3 + ay^2 + by + c = r' - s'\sqrt{w}, \tag{3}$$

em que $r' = r$ e $s' = -s$.

Observa-se que x e y são raízes distintas, pois como $x - y = 2q\sqrt{w}$, $x - y = 0$ implicaria $q = 0$ e assim, $s' = 0$ e, portanto, $x = p$ pertenceria a F_{k-1}.

Considerando a relação entre raízes e coeficientes da equação (1), a terceira raiz u se escreve $u = -a - x - y$.

Uma vez que $x + y = 2p$, tem-se $u = -a - 2p \in F_{k-1}$, o que é um absurdo, pois k é o menor inteiro positivo tal que algum F_k contém uma raiz de (1).

Com base nesse teorema mostraremos o desfecho dado no século XIX, dos problemas da duplicação do cubo, da trissecção do ângulo e do heptágono regular, que por muito tempo foram motivo de preocupação de grandes matemáticos desde os gregos antigos.

2.1 Duplicação do cubo

Deseja-se construir a aresta x de um cubo, cujo volume será o dobro do de aresta unitária. Logo, essa aresta satisfaz a equação $x^3 - 2 = 0$. Nota-se que essa equação não possui raízes racionais, pois, as possíveis ± 1 e ± 2 não a satisfazem. Portanto, pelo teorema 2.1, nenhuma de suas raízes é construtível a partir de F_0 e como $x = \sqrt[3]{2}$ é uma delas, tem-se a impossibilidade de duplicação do cubo.

2.2 Trissecção do ângulo

Mostraremos por que é impossível trissectar um ângulo genérico com régua e compasso. Observe-se primeiro que um ângulo θ construtível é aquele em que $\cos\theta$ (ou sen θ) é construtível.

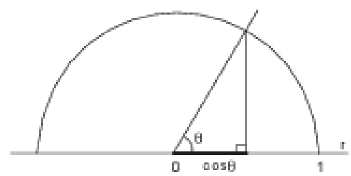

Figura 4. Construção de $\cos\theta$

Por exemplo, $\theta = 60°$ é construtível, pois $\cos 60° = \frac{1}{2}$ é construtível.

Sabe-se que alguns ângulos podem ser trissectados; o de 90° por exemplo, pois equivale a construir o ângulo de 30°. Observe que $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ é construtível.

Se, porém, fosse possível trisseccionar um ângulo qualquer, então o ângulo de 20° seria construtível e, portanto, $\cos 20°$ também o seria. Fazendo $\theta = 20°$ na fórmula trigonométrica

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

e considerando $\alpha = \cos 20°$, verifica-se que $\frac{1}{2} = 4\alpha^3 - 3\alpha$, isto é, α é raiz da equação

$$8x^3 - 6x - 1 = 0. \tag{4}$$

Pelo teorema 2.1, basta verificar que a equação (4) não tem raiz racional. Fazendo $v = 2x$, e substituindo em (4), obtém-se

$$v^3 - 3v - 1 = 0, \tag{5}$$

cujas possíveis raízes racionais são $v = \pm 1$.

Porém, verifica-se facilmente que $\pm\frac{1}{2}$ não satisfazem a equação (4). Portanto, fica demonstrada a impossibilidade da trissecção do ângulo de 60°.

2.3 O heptágono regular

Considera-se, agora, o problema de construir o lado de um heptágono regular inscrito na circunferência de raio unitário. Uma forma de tratar o problema é utilizar números complexos. Como se sabe, os vértices do heptágono são dados pelas raízes sétimas da unidade, ou seja, pelas soluções da equação

$$z^7 - 1 = 0, \tag{6}$$

sendo x a parte real e y a parte imaginária do número complexo $z = x + yi$.

Uma solução desta equação é $z = 1$, e as demais são as raízes da equação

$$\frac{z^7 - 1}{z - 1} = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0. \tag{7}$$

Dividindo (7), por z^3 obtém-se

$$z^3 + \frac{1}{z^3} + z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1 = 0. \tag{8}$$

Mediante alguns cálculos, pode-se escrever (8) da seguinte forma:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0. \tag{9}$$

Considerando-se a transformação algébrica $w = \left(z + \frac{1}{z}\right)$, (9) se reduz a:

$$w^3 + w^2 - 2w - 1 = 0. \tag{10}$$

Uma vez que z é raiz sétima da unidade, cuja representação polar é $z = \cos\theta + i \text{ sen } \theta$, em que $\theta = \frac{2\pi}{7}$ é o ângulo central subentendido pelo lado do heptágono regular, tem-se que $\frac{1}{z} = \overline{z} = \cos\theta - i \text{ sen } \theta$ e $w = z + \frac{1}{z} = 2\cos\theta$.

Desse modo, construir w, significaria construir $\cos\theta$ e, portanto, o lado do heptágono regular. Porém, w é solução da equação (10), que não possui raízes racionais (observe que as possíveis ± 1, não verificam essa equação).

Portanto, pelo teorema 2.1, conclui-se que w não é construtível, o que mostra a impossibilidade de construção do heptágono regular.

3 Números algébricos e transcendentes

Pode-se generalizar o conceito de extensão de corpos, apresentado na seção 1.2, segundo Leopold Kronecker (1823-1891), juntando ao corpo K uma raiz α de um polinômio irredutível sobre K,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

em que esse novo corpo é o menor que contém o corpo inicial K e a raiz α.

Vale a pena lembrar que um polinômio diz-se irredutível sobre K, se não tem zeros em K.

No decorrer desta seção, usaremos algumas definições e resultados que podem ser encontrados em [2, 4–6].

Definição 3.1 Se F é uma extensão de um corpo K e $\alpha \in F$, diz-se que α é algébrico sobre K, se existe um polinômio f, de coeficientes a_n's em K, tal que $f(\alpha) = 0$. Caso contrário, diz-se que α é transcendente sobre K.

Por exemplo, $\sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{2+\sqrt{2}}$ são algébricos, pois são raízes, respectivamente, de $x^2 - 2 = 0$ e $x^6 - 4x^3 + 2 = 0$. Por outro lado, e e π são transcendentes, resultados obtidos por Charles Hermite (1822-1905) e Ferdinand Lindemann (1852-1939).

Teorema 3.2 (Critério de Eisenstein [1]) Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio não constante de coeficientes inteiros e p um primo tal que:

a) $p \nmid a_n$

b) $p \mid a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$

c) $p^2 \nmid a_0$.

Então $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

[1]Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823-1852)- Professor de Matemática em Berlim.

Lema 3.3 Seja f um polinômio não constante de coeficientes racionais, a um número racional dado e $g(x) = f(x+a)$. Então f é irredutível sobre $\mathbb{Q}$ se, e somente se, g o for.

Definição 3.4 Chama-se grau de um número algébrico α, sobre um corpo K, ao grau do polinômio irredutível $f(x)$, de coeficientes em K, que admite α como raiz. No caso em que o coeficiente do termo de maior grau de $f(x)$ é um, diz-se que $f(x)$ é o polinômio mínimo.

Por exemplo, o grau de $\sqrt{2}$ sobre $\mathbb{Q}$ é 2, pois é a raiz do polinômio irredutível $p(x) = x^2 - 2$.

Teorema 3.5 (de construtibilidade) Um número real α é construtível se, e somente se, α é algébrico sobre $\mathbb{Q}$ e o seu grau é uma potência de 2.

Após o estudo de números construtíveis e algébricos, a classificação habitual dos números reais em racionais e irracionais apresenta-se de forma mais adequada como ilustrado no diagrama da figura 5.

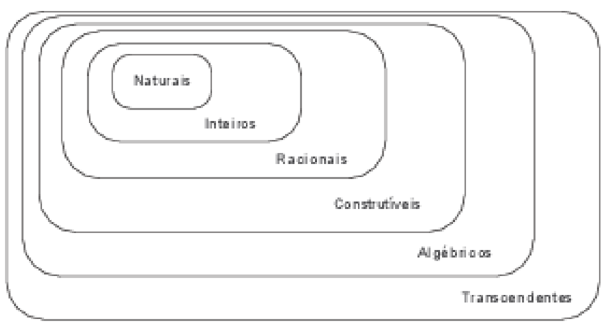

Figura 5. Diagrama de classificação dos números

3.1 Consequências do teorema 3.5

3.1.1 A impossibilidade de construção dos três problemas clássicos da geometria

- **Duplicação do Cubo:** conforme a seção 2.1, duplicar o cubo equivale a construir um segmento x de comprimento $\sqrt[3]{2}$, ou seja, estudar as raízes do polinômio $f(x) = x^3 - 2$. Note que $\sqrt[3]{2}$ é uma dessas raízes e que $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, pois basta considerar $p = 2$ no critério de Eisenstein. Logo, $\sqrt[3]{2}$ é algébrico de grau 3 e, portanto, não construtível.

- **Trissecção do ângulo:** conforme a seção 2.2, trissectar um ângulo, por exemplo o de 60°, equivale a construir o ângulo de 20°, ou seja, construir $x = \cos 20°$. Foi visto também que esse número é raiz do polinômio $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Note-se que $f(x+1) = x^3 + 3x^2 - 3$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, considerando $p = 3$ no critério de Eisenstein. Assim, pelo lema 3.3, tem-se que $f(x)$ também é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Desse modo, $x = \cos 20°$ é algébrico de grau 3 e, portanto, não construtível.

- **Quadratura do círculo:** dos três problemas famosos de construção, o da quadratura do círculo é talvez o mais antigo, sendo encontrado no papiro Rhind que data de 1650 a.C..

  Quadrar um círculo de raio r significa construir um quadrado de mesma área. No caso de raio unitário, ou seja $r = 1$, o quadrado seria de área π e assim, seu lado $\sqrt{\pi}$ deveria ser construtível. Como foi visto, π é um número transcendente, logo não construtível e construir $\sqrt{\pi}$ implicaria na sua construção.

Observação 3.6 (Algumas considerações quando não se exige a hipótese "construção com régua e compasso"): Há que se destacar que esses problemas foram resolvidos de várias maneiras, desde a antiguidade, quando se despreza a hipótese construção com régua e compasso. A seguir, será apresentado para cada um deles, um exemplo de tais soluções.

No caso da Quadratura do Círculo, apresentaremos o método de aproximação, mais significativo da antiguidade, antes dos gregos. No papiro Rhind (1650 a.C.), tal método era encontrado em alguns problemas do cálculo da área do círculo, os quais eram resolvidos como a área de um quadrado, cujo lado era $\frac{8}{9}d$, em que d é o diâmetro do círculo. Os egípcios não se preocupavam muito em provar os seus resultados, e, para isso, daremos uma justificativa do quão eficiente era o seu método de aproximação descrito.

Na figura 6, temos o círculo de diâmetro d, inscrito no quadrado de lado d. Dividindo-se o lado d em três partes, e conectando-se os terços médios dos lados do quadrado, obtém-se um octógono, cuja área é uma boa aproximação para a área do círculo.

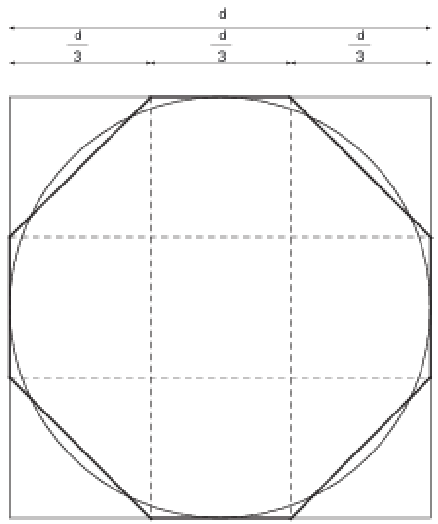

Figura 6. Área do círculo

Desse modo, a área do octógono A é dada por

$$A = d^2 - 2\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2 \approx \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2.$$

Uma vez que $A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \left(\frac{256}{81}\right)\ r^2 \approx 3,1604\ r^2$, em que $r = \frac{d}{2}$, é importante observar que os egípcios adotavam $\pi = 3,1604$, um bom valor comparado aos de outras civilizações da mesma época, tais como a chinesa e, babilônica que adotavam o valor 3.

Na Grécia, o problema foi resolvido de forma aproximada, utilizando-se o método de exaustão que consistia essencialmente em “exaurir"a figura dada por meio de outras de áreas ou volumes conhecidos. Esse método, atribuído a Eudoxo (406-355 a.C.), foi desenvolvido e aperfeiçoado por Arquimedes (287-212 a.C.).

Além do uso do método de exaustão, o problema foi resolvido por outros processos que envolviam curvas especialmente criadas para tal objetivo. Pode-se citar por exemplo, a quadratriz de Hípias (460-400 a.C.) e a espiral de Arquimedes.

Para o caso da Duplicação do Cubo daremos a solução atribuída a Menaecmo (350 a.C.) que envolve a intersecção de duas seções cônicas, a parábola e a hipérbole, curvas por ele descobertas com o intuito de resolver tal problema.

Com as notações atuais, considerando-se a intersecção das curvas de equações, $y = x^2$ e $xy = 2$, tem-se $x = \sqrt[3]{2}$, que é a aresta do cubo cujo volume é o dobro do de aresta unitária que se considera inicialmente.

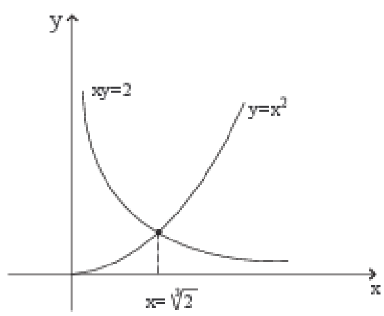

Figura 7. Duplicação do cubo

Tal solução é legítima, porém, as curvas usadas não são construtíveis com régua e compasso.

No chamado Livro de Lemas de Arquimedes, encontra-se um exemplo de Trissecção do Ângulo, que envolve o que os gregos chamavam de neusis, isto é, a inserção de um comprimento dado, entre duas figuras, no caso $ST = BC$, entre a reta r e a circunferência.

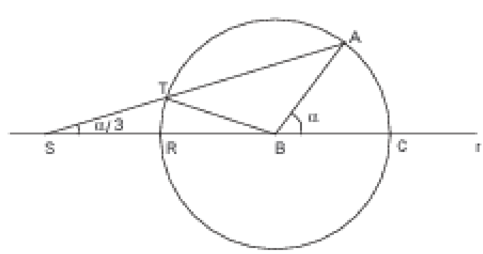

Figura 8. Trisecção do ângulo

Com centro em B, traça-se uma circunferência de raio qualquer. Seja $\alpha = A\widehat{B}C$ o ângulo a ser trissectado. Por A traça-se a reta STA, em que S está em r e T sobre a circunferência tal que $ST = BC = BA = BT$. Uma vez que os triângulos STB e TBA são isósceles, conclui-se que o ângulo $B\widehat{S}T$ é $\dfrac{\alpha}{3}$.

3.1.2 Polígonos regulares

Adotaremos para o caso de polígonos regulares de n lados, o procedimento utilizado por Gauss (1777-1855) na construção do de 17 lados.

Gauss considerou um polígono regular de n lados, aquele cujos vértices são as n raízes $n-$ésimas da unidade, ou seja,

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \text{ sen } \left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \text{ sen } \left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^k, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

É importante notar que para as raízes $n-$ésimas, verifica-se que

$$z_1^{n-i} = \frac{1}{z_1^i}, \quad i = 0, \ldots, n \tag{11}$$

e para facilitar as notações, de agora em diante, $z_1 = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + i \text{ sen } \left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ será denotado por z.

Como $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$, tem-se que $\omega = z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$. Dessa forma, construir um polígono regular de n lados equivale a construir um segmento de comprimento ω. Para mais detalhes, ver [3].

Nessa seção, será apresentada a tabela 1 com um resumo do estudo da construtibilidade ou não, dos polígonos regulares de 3 a 17 lados, sob o ponto de vista do teorema 3.5.

Como se sabe, os polígonos de $3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16$ e 17 lados são construtíveis e os polígonos de $7, 9, 11, 13$ e 14 lados não são construtíveis, ver [3].

Justificativa de alguns casos: para a conveniência do leitor, será apresentada, com mais detalhes, a justificativa dos casos $n = 5, 8, 9, 15$ e 17.

Considera-se $z^n - 1 = 0$.

Descartando-se a raiz $z = 1$, a equação torna-se

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z^2 + z + 1 = 0. \tag{12}$$

Como foi discutido anteriormente, um polígono regular de n lados, (cujos vertíces são as raízes $n-$ésimas da unidade) é construtível se, e somente se, $z + \dfrac{1}{z}$ é construtível. Para que $z + \dfrac{1}{z}$ seja construtível é preciso verificar que esse número é raiz de um polinômio mínimo de grau potência de 2. O primeiro passo é reescrever a equação (12) utilizando-se a relação (11). Como resultado, será obtida uma equação que envolve potências de $z + \dfrac{1}{z}$. Abaixo, encontra-se uma lista com as potências que serão necessárias para nossos objetivos:

$$\begin{aligned}
x &= \left(z + \frac{1}{z}\right) \\
x^2 &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 2 \\
x^3 &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
x^4 &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^4 = \left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 4\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 6 \\
x^5 &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^5 = \left(z^5 + \frac{1}{z^5}\right) + 5\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 10\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
x^6 &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^6 = \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + 6\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 15\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 20 \\
x^7 &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^7 = \left(z^7 + \frac{1}{z^7}\right) + 7\left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + 21\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 35\left(z + \frac{1}{z}\right) \\
x^8 &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^8 = \left(z^8 + \frac{1}{z^8}\right) + 8\left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + 28\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 56\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 70.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
z+\frac{1}{z} &= x \\
z^2+\frac{1}{z^2} &= x^2-2 \\
z^3+\frac{1}{z^3} &= x^3-3x \\
z^4+\frac{1}{z^4} &= x^4-4x^2+2 \\
z^5+\frac{1}{z^5} &= x^5-5x^3+5x \\
z^6+\frac{1}{z^6} &= x^6-6x^4+9x^2-2 \\
z^7+\frac{1}{z^7} &= x^7-7x^5+14x^3-7x \\
z^8+\frac{1}{z^8} &= x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Assim, de (12) e (11), usando-se (13), obtém-se uma equação polinomial, da qual o número $z+\frac{1}{z}$ é raiz. Dessa forma, é preciso verificar se o polinômio envolvido é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Se ele for irredutível, conclui-se que $z+\frac{1}{z}$ é construtível, se seu grau for uma potência de 2 e não construtível caso contrário. Agora, se o polinômio não for irredutível, é preciso fatorá-lo e fazer a mesma análise para o fator irredutível no qual $z+\frac{1}{z}$ é raiz.

1. **Pentágono:** nesse caso, a equação (12) é dada por

$$z^4+z^3+z^2+z+1=0. \tag{14}$$

Utilizando-se (11), a equação acima reescreve-se como

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+z^2+z+1=0,$$

ou seja,

$$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0.$$

Assim, de (13), obtém-se

$$x^2-2+x+1=x^2+x-1=0$$

e, portanto, $\omega=2\cos\frac{2\pi}{5}$ é um número algébrico de grau 2, pois é raiz do polinômio irredutível x^2+x-1.

2. **Octógono:** aqui, (12) escreve-se como

$$z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0. \tag{15}$$

Utilizando-se (11), tem-se

$$z^4+\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0.$$

Observando-se que $z^4=\frac{1}{2}\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)$, a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2}\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0.$$

Assim, utilizando-se (13) tem-se

$$\frac{1}{2}x^4+x^3-x^2-2x=0,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}x(x+2)\left(x^2-2\right)=0.$$

Logo, $\omega=2\cos\frac{2\pi}{8}=\sqrt{2}$ é um número algébrico de grau 2, pois é raiz do polinômio irredutível x^2-2. Portanto, ω é construtível.

3. **Eneágono:** nesse caso, (12) escreve-se como

$$z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0. \tag{16}$$

Utilizando-se (11), tem-se

$$\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)+\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0.$$

Assim, utilizando-se (13) tem-se

$$x^4+x^3-3x^2-2x+1=0,$$

ou seja,

$$(x+1)(x^3-3x+1)=0.$$

Observe que se $r(x)=x^3-3x+1$, então $q(x)=r(x+2)=x^3+6x^2+9x+3$. Assim, aplicando o critério de Eisenstein, com $p=3$, conclui-se que $q(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Daí, pelo lema 3.3, segue que $r(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Logo, $\omega=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$ é um número algébrico de grau 3, pois é raiz do polinômio irredutível x^3-3x+1. Portanto, ω não é construtível.

4. **Pentadecágono:** a equação (12) escreve-se como

$$z^{14}+z^{13}+\ldots+z^3+z^2+z+1=0. \tag{17}$$

Utilizando-se (11), tem-se

$$\left(z^7+\frac{1}{z^7}\right)+\left(z^6+\frac{1}{z^6}\right)+\ldots+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0.$$

Assim, utilizando-se (13) tem-se

$$x^7+x^6-6x^5-5x^4+10x^3+6x^2-4x-1=0,$$

ou seja,

$$(x+1)(x^2+x-1)(x^4-x^3-4x^2+4x+1)=0.$$

Observe que se $r(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, então $q(x)=r(x+4)=x^4+15x^3+80x^2++180x+145$. Assim, aplicando o critério de Eisenstein, com $p=5$, conclui-se que $q(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Daí, pelo lema 3.3, segue que $r(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Logo, $\omega=2\cos\dfrac{2\pi}{15}$ é um número algébrico de grau 4, pois é raiz do polinômio irredutível $x^4-x^3-4x^2+4x+1$. Portanto, ω é construtível.

5. **Heptadecágono:** nesse caso, (12) escreve-se como

$$z^{16}+\ldots+z^3+z^2+z+1=0. \tag{18}$$

Utilizando-se (11), tem-se

$$\left(z^8+\frac{1}{z^8}\right)+\left(z^7+\frac{1}{z^7}\right)+\ldots+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1=0.$$

Assim, utilizando-se (13) tem-se

$$x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1=0.$$

Observe que se $r(x)=x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1$, então $q(x)=r(x+2)=x^8+17x^7+119x^6+442x^5+935x^4+1122x^3+714x^2+204x+17$. Assim, aplicando o critério de Eisenstein, com $p=17$, conclui-se que $q(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$. Daí, pelo lema 3.3, segue que $r(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Logo, $\omega=2\cos\dfrac{2\pi}{17}$ é um número algébrico de grau 8, pois é raiz do polinômio irredutível $x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1$. Portanto, ω é construtível.

Tabela 1. Resumo do estudo da construtibilidade ou não, dos polígonos regulares de 3 a 17 lados

Polígono regular	$\omega = 2\cos\frac{2\pi}{n}$	Polinômio mínimo	Grau de ω	Construtível
Triângulo	-1	$x+1$	1	sim
Quadrado	0	x	1	sim
Pentágono	$2\cos\frac{2\pi}{5}$	x^2+x-1	2	sim
Hexagono	1	$x-1$	1	sim
Heptágono	$2\cos\frac{2\pi}{7}$	x^3+x^2-2x-1	3	não
Octógono	$\sqrt{2}$	x^2-2	2	sim
Eneágono	$2\cos\frac{2\pi}{9}$	x^3-3x+1	3	não
Decágono	$2\cos\frac{2\pi}{10}$	x^2-x-1	2	sim
Undecágono	$2\cos\frac{2\pi}{11}$	$x^5+x^4-4x^3-3x^2+3x+1$	5	não
Dodecágono	$\sqrt{3}$	x^2-3	2	sim
Tridecágono	$2\cos\frac{2\pi}{13}$	$x^6+x^5-5x^4-4x^3+6x^2+3x-1$	6	não
Tetradecágono	$2\cos\frac{2\pi}{14}$	x^3-x^2-2x+1	3	não
Pentadecágono	$2\cos\frac{2\pi}{15}$	$x^4-x^3-4x^2+4x+1$	4	sim
Hexadecágono	$2\cos\frac{2\pi}{16}$	x^4-4x^2+2	4	sim
Heptadecágono	$2\cos\frac{2\pi}{17}$	$x^8+x^7-7x^6-6x^5+$ $+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1$	8	sim

Recomendamos aos leitores interessados no assunto, as referências clássicas [7–9].

4 Referências

[1] COURANT, R.; ROBBINS, H. Que'es la matemática? Madrid: Aguilar, S.A. Ediciones, 1964.

[2] GONÇALVES, A. Introdução à Álgebra. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 1979.

[3] PEDROSO, H. A.; PRECIOSO, J. C. O problema da construção de polígonos regulares de Euclides a Gauss. *FAMAT em Revista (UFU)*, v. 13, p. 101–115, 2009.

[4] WAGNER, E. Construções Geométricas. Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1993.

[5] CAMINHA, A. Polinômios Ciclotômicos e o Teorema dos Primos de Dirichlet. Disponível em: http://cyshine.webs.com/ciclotomico.pdf, 2003.

[6] SANTOS, J. R. Origami e os Problemas Clássicos da Antiguidade. PAM preprint, Collection: Cadernos de Matemática - Série de divulgação, Aveiro, Portugal, 2009.

[7] ABBOE, A. Episódios da História Antiga da Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2ª ed., 2002.

[8] BOLD, B. Famous Problems of Geometry. New York: Dover Publications, 1982.

[9] DÖRRIE, H. 100 Great Problems of Elementary Mathematics. New York: Dover Publications, 1965.