Girogrupos e Espaços Girovetoriais

Gyrogroups and Gyrovectors Spaces

Maria Cláudia Aguitoni
Departamento de Matemática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Ponta Grossa, PR
mcaguitoni@utfpr.edu.br

Michel Teston Semensato
Departamento de Matemática
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Guarapuava, PR
michelsemensato@hotmail.com

Resumo: Para um grupo arbitrário G e um subgrupo normal $H \subset G$, o espaço $\dfrac{G}{H}$ herda a estrutura do grupo G. Já no caso em que H não é normal em G, isso não ocorre. Neste trabalho, quando H não é normal em G, vamos introduzir uma estrutura de girogrupo em $\dfrac{G}{H}$, o que é possível já que a maioria das propriedades características dos girogrupos são propriedades de laços homogêneos com a propriedade inversa do automorfismo.Também definiremos espaços girovetoriais, os quais dão suporte à geometria hiperbólica assim como espaços vetoriais para a geometria euclidiana.

Palavras-chave: espaços girovetoriais; girogrupos; laços.

Abstract: For an arbitrary group G and a normal subgroup $H \subset G$, the space $\dfrac{G}{H}$ inherits the structure of the group G. Now in the case that H is not normal in G, this does not happen. In this work, when H is not normal in G we introduce a structure of gyrogroup in $\dfrac{G}{H}$, what is possible since most of the characteristic properties of gyrogroups are properties of homogeneous loops with the automorphism inverse property. We will also define gyrovectors spaces, what provides supports for hyperbolic geometry just as vectors spaces for euclidean geometry.

Recebido em 18/07/2013 - Aceito em 28/08/2013.

Key words: gyrovectors spaces; gyrogroups; loops.

1 Introdução

Após o desenvolvimento da Teoria Especial da Relatividade por Einstein, em 1905, houve tentativas de se interpretar a lei da adição da velocidade usando Geometria Hiperbólica. Mas, a falta da propriedade associativa foi considerada um fator complicador e essa teoria foi abandonada. Foi em sua retomada que surgiu o conceito de girogrupo, uma estrutura álgebrica que deu fundamento a toda essa teoria.

Desde sua introdução por Abraham A. Ungar, os girogrupos transformaram-se em assunto de intensivas investigações em seu significado físico e geométrico, assim como em sua interpretação laço-teórica. Entretanto, a melhor maneira de introduzir a noção de girogrupos é fornecida pelas transformações de Möbius do disco aberto complexo unitário. A mais geral transformação de Möbius de disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ é da forma

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{a+z}{1+\overline{a}z} \tag{1}$$

onde $a, z \in \mathbb{D}$, $\theta \in \mathbb{R}$ fixo e $\overline{a}$ representa o complexo conjugado de a. A transformação (1) pode ser vista como a transformação

$$z \mapsto \frac{a+z}{1+\overline{a}z}, \tag{2}$$

seguida de uma rotação de θ em relação ao eixo x. A partir de (2), definimos a operação $\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dada por

$$(a, z) \mapsto (a \oplus z) = \frac{a+z}{1+\overline{a}z}, \tag{3}$$

a qual chamamos de adição de Möbius. A operação $\oplus$ não é comutativa nem associativa, mas, pode-se "reparar" a não comutatividade de $\oplus$ pela introdução da operação

$$gyr : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to Aut(\mathbb{D}, \oplus),$$

dada pela equação

$$gyr[a,b] = \frac{a \oplus b}{b \oplus a} = \frac{1 + a\overline{b}}{1 + \overline{a}b}, \tag{4}$$

onde $Aut(\mathbb{D}, \oplus)$ é grupo do automorfismo do grupóide $(\mathbb{D}, \oplus)$. Assim, de (4) vemos que

$$a \oplus b = gyr[a,b](b \oplus a).$$

De forma supreendente, o girador "gyr", que "repara" a comutatividade, também "repara" a associatividade para $\oplus$. Surgem, assim, as seguintes identidades:

$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus gyr[a,b]c$	Lei da giroassociatividade à esquerda.
$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus gyr[b,a]c)$	Lei da giroassociatividade à direita.
$gyr[a,b] = gyr[a \oplus b, b]$	Propriedade do laço à esquerda.
$gyr[a,b] = gyr[a, b \oplus a]$	Propriedade do laço à direita.

Dessa forma, a adição de Möbius e seu girador associado estão ligados e, onde há coincidências, há também um significado. Das coincidências emergentes do girador, descobre-se uma estrutura algébrica interessante que merece a extensão pela abstração, e esta é chamada de girogrupo.

Vamos apresentar uma série de resultados que nos levam a definir um girogrupo, os quais serão fundamentais para o desenvolvimento de um trabalho posterior.

2 Girogrupos

As principais referências utilizadas neste trabalho se encontram em [1, 15, 16]. O conceito de girogrupo generaliza as noções de grupo, logo, ambos compartilham algumas analogias, tais como:

1) Os girogrupos são classificados como girocomutativos e não girocomutativos;

2) Alguns girogrupos girocomutativos admitem multiplicação por escalar, tornando-se, assim, um espaço girovetorial;

3) O espaços girovetoriais por sua vez, fornecem um suporte para a geometria hiperbólica, da mesma forma que os espaços vetoriais fornecem um suporte para a geometria euclidiana. Isso possibilita unificar essas duas geometrias.

Para um grupo arbitrário G e um subgrupo normal $H \subset G$, o espaço G/H herda a estrutura do grupo G. Vamos descobrir a construção relevante nos termos de uma seção da projeção canônica de G no conjunto G/H das classes laterais à esquerda.

Uma seção $\sigma : G/H \to G$ da projeção canônica $\pi : G \to G/H$ é uma aplicação com $\pi\sigma = Id_{G/H}$ e $\sigma(H) = 1_G$. No caso em que $H \subset G$ é um subgrupo normal, uma seção arbitrária permite que a operação do grupo G seja levada na operação do grupo G/H,

$$\begin{array}{rcl} G/H \times G/H & \to & G/H \\ ((g_1H),(g_2H)) & \mapsto & \pi(\sigma(g_1H)\sigma(g_2H)) = \sigma(g_1H)\sigma(g_2H)H. \end{array}$$

Nesse caso, G/H possui uma estrutura de grupo independente de σ e $\pi : G \to G/H$ é um homomorfismo de grupos.

Se H não é normal em G, G/H, não herda a estrutura do grupo G. Porém, podemos introduzir uma estrutura de girogrupo em G/H. Faremos agora essa construção. Geralmente, se $H \subset G$ não é normal, uma seção arbitrária $\sigma : G/H \to G$ induz à operação

$$\begin{array}{rcl} \oplus_\sigma : G/H \times G/H & \to & G/H \\ ((g_1H),(g_2H)) & \mapsto & (g_1H) \oplus_\sigma (g_2H) = \pi(\sigma(g_1H)\sigma(g_2H)) = \sigma(g_1H)\sigma(g_2H)H. \end{array}$$

Note que,

$$H \oplus_\sigma (gH) = (gH) \oplus_\sigma H = gH$$

para todo $gH \in G/H$, H é o único com esta propriedade. Como $\sigma(gH)H = \pi\sigma(gH) = gH$, podemos representar $\sigma(gH) = gh$ para algum $h \in H$. Então,

$$(g_1H) \oplus_\sigma (g_2H) = \sigma(g_1H)g_2H$$

para quaisquer $g_1H, g_2H \in G/H$.

As bijeções $G \to G$ formam o grupo $B = B(G)$ com respeito à composição. O grupo $Aut(G,\oplus)$ é formado por todas as bijeções $\varphi \in B(G)$ que preservam a operação

$\oplus$, ou seja,

$$\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$$

para quaisquer que sejam $a,\ b \in G$.

Definição 1: Um laço à esquerda $(\mathscr{L}, \oplus)$ é um grupóide que possui duas propriedades:

$i)$ Existe um único elemento neutro $e \in \mathscr{L}$, tal que $e \oplus x = x \oplus e = x$ para todo $x \in \mathscr{L}$.

$ii)$ Dados $a, b \in \mathscr{L}$, a equação $a \oplus x = b$ tem como única solução $x = (\ominus a) \oplus b$, onde $\ominus a$ é solução única de $a \oplus t = e$.

Diante disso, podemos considerar o seguinte resultado.

Lema 1: Sejam G um grupo, $H \subset G$ um subgrupo e $\sigma : G/H \to G$ uma seção de $\pi : G \to G/H$. Se $\sigma(G/H)$ é um subgrupo de G, então a operação binária

$$\begin{array}{lcl} \oplus_\sigma : G/H \times G/H & \to & G/H \\ ((g_1H),(g_2H)) & \mapsto & (g_1H) \oplus_\sigma (g_2H) = \sigma(g_1H)\sigma(g_2H)H = \sigma(g_1H)g_2H, \end{array} \tag{5}$$

introduz uma estrutura de laço à esquerda em G/H.

Dado um laço à esquerda $(\mathscr{L}, \oplus)$, considere a translação à esquerda

$$\begin{array}{rccc} L_a : & \mathscr{L} & \to & \mathscr{L} \\ & x & \mapsto & a \oplus x, \end{array}$$

com $a \in \mathscr{L}$. De acordo com a propriedade $ii)$ da definição de laço, todas L_a são invertíveis e $L_a^{\ 1}(b) = L_{\ominus a}(b)$ para todo $b \in \mathscr{L}$. Consequentemente,

$$a \oplus\ ((\ominus a) \oplus x\ ) = L_a L_{\ominus a}(x) = L_a L_a^{\ 1}(x) = x$$

para todo $x \in \mathscr{L}$.

Agora definimos o girador de Thomas.

Definição 2: Seja $(\mathscr{L}, \oplus)$ um laço à esquerda. Para quaisquer que sejam $a, b \in (\mathscr{L}, \oplus)$, o girador de Thomas, denotado por $gyr[a, b]$, é uma aplicação bijetora

$$gyr[a, b] = L_{\ominus(a \oplus b)} L_a L_b : \mathscr{L} \to \mathscr{L}.$$

Kiechle demonstra em [9] que um laço à esquerda $(\mathscr{L}, \oplus)$ é um grupo se, e somente se, os giradores $gyr[a,b] = Id_{\mathscr{L}}$ para quaisquer que sejam $a, b \in \mathscr{L}$. Posteriormente, usaremos esse fato.

O lema que segue é útil na demonstração de outros resultados, pois ele estabelece a giroassociativadade à esquerda num laço qualquer e ainda mostra que um girador age como uma conjugação. Vale lembrar que,

$$\begin{array}{rccc} Ad_{h(ab)}: & G & \rightarrow & G \\ & x & \mapsto & h(ab)x[h(ab)]^{\ 1} \end{array}$$

Lema 2: $a)$ Seja $(\mathscr{L}, \oplus)$ um laço à esquerda com girador $gyr[a,b] = L_{\ominus(a\oplus b)}L_aL_b$ para quaisquer $a, b \in \mathscr{L}$. Então,
$i)$ $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus gyr[a,b]c$ para quaisquer que sejam $a, b \in \mathscr{L}$.
$ii)$ $gyr[a, \ominus a] = Id_{\mathscr{L}}$ para todo $a \in \mathscr{L}$.
$iii)$ O único inverso à direita $\ominus a$ de $a \in \mathscr{L}$ é o único inverso à esquerda de a.
$b)$ Sejam G um grupo, $H \subset G$ um subgrupo e $\sigma : G/H \rightarrow G$ a seção da projeção canônica $\pi : G \rightarrow G/H$ com $\sigma(G/H)$ subgrupo de G. Então dados $a = \sigma(aH)$ e $b = \sigma(bH)$, tem-se que o girador

$$gyr[aH, bH](xH) = (\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x))H,$$

age como uma conjugação por

$$h(ab) = [\sigma(abH)]^{\ 1}ab \in H.$$

Demonstração: $a)$ $i)$ $(a \oplus b) \oplus gyr[a,b]c = L_{(a\oplus b)}L_{\ominus(a\oplus b)}L_aL_b(c) = L_aL_b(c) = a \oplus (b \oplus c)$.

$ii)$ $gyr[a, \ominus a] = L_{\ominus(a\oplus(\ominus a))}L_aL_{\ominus a} = L_{\ominus e}L_aL_a^{\ 1} = Id_{\mathscr{L}}$.

$iii)$ Seja a_1 o único inverso à direita de $\ominus a$. Então por $i)$ e $ii)$ temos que,

$$a = a \oplus ((\ominus a) \oplus a_1) = (a \oplus (\ominus a)) \oplus gyr[a, \ominus a]a_1 = a_1.$$

Logo, $(\ominus a) \oplus a = e$ e $\ominus a$ é um elemento inverso à esquerda de a. Seja $a_2 \in \mathscr{L}$ um outro elemento inverso à esquerda de a. Note que $a_2 \oplus x = e$, onde $x = \ominus a_2 = a$. Então de $i)$ e $ii)$ segue que,

$$a_2 = a_2 \oplus (a \oplus (\ominus a)) = (a_2 \oplus a) \oplus gyr[a_2, \ominus a_2](\ominus a) = \ominus a.$$

Portanto, $\ominus a$ é o único elemento inverso à esquerda de a.

$b)$ Por um lado, temos que

$$\begin{aligned} ((aH) \oplus_\sigma (bH)) \oplus_\sigma ([\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)]H) &= (abH) \oplus_\sigma ([\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)]H) \\ &= \sigma(abH)[\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)]H. \end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned} (aH) \oplus_\sigma ((bH) \oplus_\sigma (xH)) &= ((aH) \oplus_\sigma (bxH)) \\ &= a(bx)H \\ &= (ab)xH \\ &= \sigma(abH)h(ab)xH \\ &= \sigma(abH)h(ab)x[h(ab)]^{\;1}H \\ &= \sigma(abH)[\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)]H. \end{aligned}$$

Então,

$$((aH) \oplus_\sigma (bH)) \oplus_\sigma ([\mathrm{Ad}_{h(ab)}(x)]H) = (aH) \oplus_\sigma ((bH) \oplus_\sigma (xH)).$$

Como

$$(aH) \oplus_\sigma ((bH) \oplus_\sigma (xH)) = ((aH) \oplus_\sigma (bH)) \oplus_\sigma (gyr[aH, bH](xH)),$$

segue o desejado.

A partir de agora, nosso objetivo é definir um espaço girovetorial $(V, \oplus, \otimes)$. Para isso, mostraremos que, num espaço girovetorial quase à esquerda $(V, \oplus, \otimes)$, o laço à esquerda $(V, \oplus)$ com a propriedade do giroautomorfismo implica que $(V, \oplus)$ é um girogrupo à esquerda e, com isso, $(V, \oplus, \otimes)$ é chamado de espaço girovetorial à esquerda. Mais ainda, sabendo que um girogrupo é um girogrupo à esquerda que satisfaz a propriedade do laço à esquerda, e que é girocomutativo se satisfaz a lei da girocomutatividade, mostraremos que, no espaço girovetorial à esquerda, tem-se que $(V,\oplus)$ é um girogrupo girocomutativo.

Definição 3: Um espaço girovetorial quase à esquerda $(V,\oplus,\otimes)$ é um laço à esquerda $(V,\oplus)$ com uma multiplicação escalar

$$\otimes : \mathbb{R}\times V \to V$$

que satisfaz:
$i)$ $1\otimes v = v$
$ii)$ $(rs)\otimes v = r\otimes(s\otimes v) = s\otimes(r\otimes v)$
$iii)$ $(r+s)\otimes v = (r\otimes v)+(s\otimes v)$
$iv)$ $gyr[r\otimes v, r\otimes v] = Id_V$
$v)$ $gyr[a,b](r\otimes v) = r\otimes(gyr[a,b]v)$
para quaisquer que sejam $a,b,v\in V$ e $r,s\in\mathbb{R}$.

Definição 4: Um laço à esquerda $(\mathscr{L},\oplus)$ sujeito à propriedade do giroautomorfismo,

$$gyr[a,b](x\oplus y) = (gyr[a,b]x)\oplus(gyr[a,b]y)$$

para quaisquer que sejam $a,b,x,y\in\mathscr{L}$, é chamado girogrupo à esquerda.

Apresentamos agora um exemplo onde, para duas seções τ,σ distintas num mesmo espaço G_0/H_0, tem-se que $(G_0/H_0,\oplus_\tau)$ é um grupo e $(G_0/H_0,\oplus_\sigma)$ é um girogrupo à esquerda, mas não é um grupo.

Seja $G_0 = S_3$, o grupo simétrico atuando no conjunto $\{1,2,3\}$. Denotamos por $(i_1,...,i_k)$ o ciclo que transforma i_1 em i_2, i_2 em $i_3,...,i_{k\;1}$ em i_k e i_k em i_1. Fixemos o subgrupo cíclico $H_0 = \langle(1,2)\rangle \subset S_3$ de ordem 2. Para

$$\begin{aligned} \tau_1 &= (1,2,3) & \qquad \tau_2 &= (1,3,2) = (1,2,3)^2 \\ \sigma_1 &= (2,3) & \qquad \sigma_2 &= (1,3) \end{aligned}$$

podemos representar G_0 como a união disjunta

$$G_0 = H_0 \cup \tau_1 H_0 \cup \tau_2 H_0 = H_0 \cup \sigma_1 H_0 \cup \sigma_2 H_0,$$

com $\sigma_i H_0 = \tau_i H_0$ para $i = 1, 2$. Seja $\tau_0 = \sigma_0 = Id_{\{1,2,3\}}$. Definimos as seções

$$\begin{array}{rccc} \tau: & G_0/H_0 & \to & G_0 \\ & \tau_i H_0 & \mapsto & \tau_i \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & G_0/H_0 & \to & G_0 \\ & \sigma_i H_0 & \mapsto & \sigma_i \end{array}$$

para $i = 0, 1, 2$, onde $\sigma_i H_0 \to \sigma_i$ e $\tau_i H_0 \to \tau_i$. Observe que a imagem $\tau(G_0/H_0) = \{\tau_1^i; i = 0, 1, 2\}$ é o grupo alternado A_3 e a operação $\oplus_\tau : G_0/H_0 \times G_0/H_0 \to G_0/H_0$ definida por $(\tau_i H_0) \oplus_\tau (\tau_j H_0) = \tau_i \tau_j H_0 = \tau_1^{i+j} H_0$ transforma G_0/H_0 num grupo cíclico de ordem 3.

Temos também que a imagem $\sigma(G_0/H_0) = \{Id_{\{1,2,3\}}, (2,3), (1,3)\}$ de σ, é fechada sobre a inversão, ou seja, $(i,j) = (i,j)^{\ 1}$ para toda transposição (i,j). Consequentemente,

$$\begin{array}{rccc} \oplus_\sigma : & G_0/H_0 \times G_0/H_0 & \to & G_0/H_0 \\ & ((\sigma_i H_0), (\sigma_j H_0)) & \mapsto & (\sigma_i H_0) \oplus_\sigma (\sigma_j H_0) = \sigma_i \sigma_j H_0 \end{array}$$

é a operação que torna G_0/H_0 um laço à esquerda. Note que $(G_0/H_0, \oplus_\sigma)$ não é grupo, pois $gyr[H_0, \sigma_i H_0] = \mathrm{Ad}_{Id_{\{1,2,3\}}} \neq Id_{G_0/H_0} = H_0$. A fim de mostrarmos que $(G_0/H_0, \oplus_\sigma)$ é um girogrupo à esquerda, notemos que

$$\begin{array}{rcl} gyr[H_0, \sigma_i H_0] & = & gyr[\sigma_i H_0, H_0] = \mathrm{Ad}_{Id_{\{1,2,3\}}} \qquad \text{e} \\ gyr[\sigma_i H_0, \sigma_i H_0] & = & \mathrm{Ad}_{Id_{\{1,2,3\}}}. \end{array}$$

Analisaremos $gyr[\sigma_1 H_0, \sigma_2 H_0] = \mathrm{Ad}_{h(\sigma_1\sigma_2)}$ e $gyr[\sigma_2 H_0, \sigma_1 H_0] = \mathrm{Ad}_{h(\sigma_2\sigma_1)}$. Como $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2(1,2)$ e $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1(1,2)$, obtemos que

$$\begin{array}{rcl} h(\sigma_1\sigma_2) & = & [\sigma(\sigma_1\sigma_2 H_0)]^{\ 1}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2^{\ 1}\sigma_2(1,2) = (1,2) \\ h(\sigma_2\sigma_1) & = & [\sigma(\sigma_2\sigma_1 H_0)]^{\ 1}\sigma_2\sigma_1 = (1,2). \end{array}$$

Sabendo que $\mathrm{Ad}_{(1,2)}\sigma_0 = \sigma_0$, $\mathrm{Ad}_{(1,2)}\sigma_1 = \sigma_2$ e $\mathrm{Ad}_{(1,2)}\sigma_2 = \sigma_1$, podemos escrever $\mathrm{Ad}_{(1,2)}\sigma_{\overline{i}} = \sigma_{\ \overline{i}}$. Note que, se $\sigma(\sigma_{\overline{k}}\sigma_{\overline{l}}H_0) = \sigma_{\overline{m}}$, então $\sigma(\sigma_{(\ \overline{k})}\sigma_{(\ \overline{l})}H_0) = \sigma_{\ \overline{m}}$. Isso é claro quando $k = 0$ ou $l = 0$, assim como no caso $\overline{k} = \overline{l}$. Para $(\overline{k},\overline{l}) = (\overline{1},\overline{2})$ ou $(\overline{k},\overline{l}) = (\overline{2},\overline{1})$, temos que $\sigma(\sigma_{\overline{k}}\sigma_{\overline{l}}H_0) = \sigma_{\overline{l}}$ e $\sigma(\sigma_{(\ \overline{k})}\sigma_{(\ \overline{l})}H_0) = \sigma(\sigma_{\overline{l}}\sigma_{\overline{k}}H_0) = \sigma_{\overline{k}} = \sigma_{\ \overline{l}}$.

Assim, se

$$\sigma((\sigma_{\overline{k}}H_0) \oplus_\sigma (\sigma_{\overline{l}}H_0)) = (\sigma_{\overline{m}}H_0),$$

então

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_{(1,2)}\left((\sigma_{\overline{k}}H_0) \oplus_\sigma (\sigma_{\overline{l}}H_0)\right) &= \mathrm{Ad}_{(1,2)}(\sigma_{\overline{m}})H_0 \\
&= \sigma_{(\ \overline{m})}H_0 \\
&= \sigma_{(\ \overline{k})}\sigma_{(\ \overline{l})}H_0 \\
&= (\sigma_{(\ \overline{k})}H_0) \oplus_\sigma (\sigma_{(\ \overline{l})}H_0) \\
&= (\mathrm{Ad}_{(1,2)}(\sigma_{\overline{k}})H_0\ ) \oplus_\sigma (\mathrm{Ad}_{(1,2)}(\sigma_{\overline{l}})H_0\ )
\end{aligned}$$

para todo $\overline{k},\overline{l} \in \{\overline{1},\overline{2},\overline{3}\}$. Portanto, $(G_0/H_0,\oplus_\sigma)$ é um girogrupo à esquerda.

Note que um girogrupo à esquerda $(\mathscr{L},\oplus)$ é um laço à esquerda e os giradores $gyr[a,b]$ são $\oplus$-automorfismos para todo $a,b \in \mathscr{L}$.

Lema 3: Sejam G um grupo, $H \subset G$ um subgrupo e $\sigma : G/H \to G$ uma seção de $\pi : G \to G/H$. Suponha que $\sigma(G/H)$ é um subgrupo de G e a discrepância

$$d^h(x) = \mathrm{Ad}_{h\ \ 1}\{[\sigma(\mathrm{Ad}_h(x)H]\ \ ^1\mathrm{Ad}_h(x)\} \tag{6}$$

pertence a $\cap_{g\in G}(gHg\ \ ^1) = \cap_{y\in G}(yHy\ \ ^1)$, para todo $x \in S$ e todo $h \in H$. Então $(G/H,\oplus_\sigma)$ é um girogrupo à esquerda com respeito à operação (5).

A demonstração desse lema se encontra em [1].

Da definição de grupóides isomorfos, apresentaremos quando um girogrupo à esquerda arbitrário é isomorfo a $(G/H,\oplus_\sigma)$, já definido acima.

Definição 5: Os grupóides $(\mathscr{L}_1,\oplus_1)$ e $(\mathscr{L}_2,\oplus_2)$ são isomorfos se existe uma bijeção $\varphi : \mathscr{L}_1 \to \mathscr{L}_2$ tal que

$$\varphi(x \oplus_1 y) = \varphi(x) \oplus_2 \varphi(y)$$

para quaisquer que sejam x e y em $\mathscr{L}_1$.

Proposição 1: Para todo girogrupo à esquerda $(\mathscr{L},\oplus)$, existe um grupo G, um subgrupo $H \subset G$ e uma seção $\sigma : G/H \to G$ de $\pi : G \to G/H$ com $\sigma(G/H)$ subgrupo de G e $h\sigma(G/H)h^{-1} \subseteq \sigma(G/H)$ para todo $h \in H$, tal que $(\mathscr{L},\oplus)$ é isomorfo à $(G/H,\oplus_\sigma)$.

A demonstração desse resultado se encontra em [1]. Passamos a apresentar as últimas definições.

Definição 6: Se $(V,\oplus,\otimes)$ é um espaço girovetorial quase à esquerda e $(V,\oplus)$ é um girogrupo à esquerda, então $(V,\oplus,\otimes)$ é chamado espaço girovetorial à esquerda.

Definição 7: Um girogrupo $(\mathscr{L},\oplus)$ é um girogrupo à esquerda que possui a propriedade do laço à esquerda

$$gyr[a,b] = gyr[a \oplus b, b]$$

para quaisquer que sejam $a,b \in \mathscr{L}$.

Note que o girogrupo à esquerda $\left(\frac{S_3}{\langle(1,2)\rangle},\oplus_\sigma\right)$ já discutido, não é um girogrupo. De fato, por um lado, para $\sigma_1 = (2,3)$, $\sigma_2 = (1,3)$ tem-se $gyr[\sigma_1 H_0, \sigma_2 H_0] = \mathrm{Ad}_{(1,2)}$. Por outro, $(\sigma_1 H_0) \oplus_\sigma (\sigma_2 H_0) = \sigma_1\sigma_2 H_0 = \sigma_2 H_0$. Logo,

$$gyr[((\sigma_1 H_0) \oplus_\sigma (\sigma_2 H_0)), \sigma_2 H_0] = \mathrm{Ad}_{Id_{\{1,2,3\}}}$$

e consequentemente $gyr[\sigma_1 H_0, \sigma_2 H_0] \neq gyr[((\sigma_1 H_0) \oplus_\sigma (\sigma_2 H_0)), \sigma_2 H_0]$.

Dizemos que um girogrupo $(\mathscr{L},\oplus)$ é girocomutativo, se satisfaz a lei da girocomutatividade

$$a \oplus b = gyr[a,b](b \oplus a)$$

para quaisquer que sejam a e $b \in \mathscr{L}$. A seguir, apresentamos quais condições são satisfeitas para que $\left(G/H,\oplus_\sigma\right)$ seja um girogrupo girocomutativo.

Lema 4: Sejam G um grupo, $H \subset G$ um subgrupo e $\sigma : G/H \to G$ uma seção de $\pi : G \to G/H$ com $S = \sigma(G/H)$. Suponha que

$i)$ S é subgrupo de G.

$ii)$ A discrepância (6) pertence a $\bigcap_{g \in G}(gHg^{-1})$.

$iii)$ $\sigma(x^{-1}y^{-1}H) = [\sigma(xyH)]^{-1}$ para quaisquer que sejam $x,y \in S$.

$iv)$ $xyx \in S$ para quaisquer que sejam $x, y \in S$.
Então, $\left(G/H, \oplus_\sigma\right)$ é um girogrupo girocomutativo.

Demonstração: Pelo Lema (2), $i)$ e $ii)$ implicam que $\left(G/H, \oplus_\sigma\right)$ é um girogupo à esquerda. Vamos mostrar que $\left(G/H, \oplus_\sigma\right)$ satisfaz a propriedade do laço à esquerda e também a lei da girocomutatividade.
Note que $i)$ e $iii)$ implicam a propriedade inversa do automorfismo,

$$\ominus_\sigma\ ((xH)\oplus_\sigma(yH)\ ) = (\ominus_\sigma(xH)\ )\oplus_\sigma\ (\ominus_\sigma(yH)\ ) \tag{7}$$

para $x = \sigma(xH)$ e $y = \sigma(yH)$ arbitrários. De fato, como S é subgrupo de G, tem-se que

$$\ominus_\sigma(\sigma(gH)H) = [\sigma(gH)]^{\ \ 1}H$$

para $gH \in G/H$. Assim

$$\ominus_\sigma\ ((xH)\oplus_\sigma(yH)\ ) = [\sigma(xyH)]^{\ \ 1}H$$

é igual a

$$(\ominus_\sigma(xH)\ )\oplus_\sigma\ (\ominus_\sigma(yH)\ ) = \sigma(x^{\ \ 1}y^{\ \ 1}H)H,$$

pela condição $iii)$.

Seja $G_0 = \mathscr{L} \times Aut(\mathscr{L}, \oplus)$ o produto giro-semidireto do girogrupo à esquerda $\mathscr{L}$ com o giroautomorfismo $Aut(\mathscr{L}, \oplus)$. A igualdade

$$[(x,\ \ )\circ(y,\beta)]^{\ \ 1} = (y,\beta)^{\ \ 1}\circ(x,\ \ )^{\ \ 1}$$

implica em,

$$\begin{aligned}
& (\ominus\beta^{\ \ 1\ \ \ \ 1}(gyr[x,\ \ (y)])^{\ \ 1}(x\oplus\ \ (y)), \beta^{\ \ 1\ \ \ \ 1}(gyr[x,\ \ (y)])^{\ \ 1}\ ) \\
= \ & (\ominus\beta^{\ \ 1}(y), \beta^{\ \ 1})\circ(\ominus\ \ ^{1}(x),\ \ ^{1}) \\
= \ & (\ominus\beta^{\ \ 1\ \ \ \ 1}(\ \ (y)\oplus x), gyr[\ominus\beta^{\ \ 1}(y), \ominus\beta^{\ \ 1\ \ \ \ 1}(x)]\beta^{\ \ 1\ \ \ \ 1}).
\end{aligned}$$

Daí, para $z =\ \ (y)$ obtemos

$$(gyr[x,z])^{\ 1}(x \oplus z) = z \oplus x \tag{8}$$

e

$$\beta^{\ 1 \quad 1}(gyr[x,z])^{\ 1} = gyr[\ominus\beta^{\ 1 \quad 1}(z), \ominus\beta^{\ 1 \quad 1}(x)]\beta^{\ 1 \quad 1}. \tag{9}$$

Essa última igualdade implica que

$$(gyr[x,z])^{\ 1} = gyr[\ominus z, \ominus x] \tag{10}$$

para quaisquer que sejam $x, z \in \mathscr{L}$. Além disso, a propriedade inversa do automorfismo e o Lema 2 nos fornece

$$\begin{aligned}
\{\ominus(a \oplus b)\} \oplus gyr[a,b](\ominus c) &= \{\ominus(a \oplus b)\} \oplus \{\ominus gyr[a,b]c\} \\
&= \ominus\{(a \oplus b) \oplus gyr[a,b]c\} \\
&= \ominus\{a \oplus (b \oplus c)\} \\
&= (\ominus a) \oplus \{(\ominus b) \oplus (\ominus c)\} \\
&= \{(\ominus a) \oplus (\ominus b)\} \oplus gyr[\ominus a, \ominus b](\ominus c) \\
&= \{\ominus(a \oplus b)\} \oplus gyr[\ominus a, \ominus b](\ominus c).
\end{aligned}$$

Logo,

$$gyr[a,b] = gyr[\ominus a, \ominus b] \tag{11}$$

para quaisquer que sejam $a, b \in \mathscr{L}$.

De (8) , (10) e (11), temos que a lei da girocomutatividade vale para qualquer girogrupo à esquerda $(\mathscr{L}, \oplus)$ e, em particular, vale para $(G/H, \oplus_\sigma)$. Resta mostrar que $(G/H, \oplus_\sigma)$ satisfaz a propriedade do laço à esquerda. Para x e y arbitrários em S, sabemos que $h(yx) = [\sigma(yxH)]^{\ 1}yx \in H$. Então,

$$x(yx) = x(\sigma(yxH)h(yx)) = \sigma(x\sigma(yxH))h(x\sigma(yxH))h(yx) \in S.$$

De onde segue que, $h(x\sigma(yxH)) = [h(yx)]^{\ 1}$. Observe que, de (10) e (11), tem-se

$$(gyr[yH, xH])^{\ 1} = (gyr[xH, yH]).$$

Dessa forma, sabendo que $gyr[aH, bH] = \mathrm{Ad}_{h(ab)}$ para quaisquer $a, b \in S$ temos

$$\begin{aligned}
gyr[xH,((yH)\oplus_\sigma (xH))] &= gyr[xH,\sigma(yxH)H] \\
&= \mathrm{Ad}_{h(x\sigma(yxH))} \\
&= \mathrm{Ad}_{[h(yx)]^{\ 1}} \\
&= [\mathrm{Ad}_{h(yx)}]^{\ 1} \\
&= (gyr[yH,xH])^{\ 1} \\
&= gyr[xH,yH].
\end{aligned}$$

Enquanto que,

$$\begin{aligned}
gyr[((yH)\oplus_\sigma (xH)),xH] &= (gyr[xH,((yH)\oplus_\sigma (xH))]\,)^{\ 1} \\
&= (gyr[xH,yH])^{\ 1} \\
&= gyr[yH,xH].
\end{aligned}$$

Ou seja, $(G/H,\oplus_\sigma)$ satisfaz a propriedade do laço à esquerda. Portanto, $(G/H,\oplus_\sigma)$ é um girogrupo e é girocomutativo.

Finalmente definimos um espaço girovetorial.

Definição 8: Se $(V,\oplus,\otimes)$ é um espaço girovetorial à esquerda e $(V,\oplus)$ é um girogrupo girocomutativo, então $(V,\oplus,\otimes)$ é chamado espaço girovetorial.

3 Conclusões

Uma das contribuições deste trabalho é que ele estabelece critérios para definirmos, em um espaço homogêneo, uma estrutura de espaço girovetorial de Lie, e isso só é possível se "estendermos"a teoria de Lie à teoria de girogrupos através de laços. Espera-se que a teoria apresentada aqui ainda possa ser desenvolvida de modo a contribuir em outros trabalhos.

Referências

[1] AGUITONI, M. C. Álgebras de Lie, grupos de Lie e espaços girovetoriais de Lie. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, 2010.

[2] BARTHOLDI, L.; CECCHERINI-SILBERSTEIN, T.; SMIRNOVA-NAGNIBEDA, T. Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects, Birkhäuser, 2000, 424 p.

[3] BRAGA, C. B.; SANTANA, A. Estruturas algébricas com ênfase em elementos da Teoria de Lie, EDUEM, 2011.

[4] CHEEGER, J.; EBIN, D. Comparison theorems in Riemannian geometry, North Holland Publ. Company, 1975.

[5] FOGUEL, T.; UNGAR, A. Involutary decomposition of groups into twisted subgroups and subgroups, *J Group Theory*, v. 3, p. 27-46, 2000.

[6] FRIEDMAN, Y.; UNGAR, A. Gyrosemidirect product structure of bounded symetric domains, *Results Math*, v. 26, p. 28-38, 1994.

[7] HAUSNER, M.; SCHWARTZ, J.T. Lie Groups Lie Algebras, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. 1968.

[8] HELGASON, S. Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. Academic Press, New York, 1978.

[9] KIECHLE, H. Theory of K-Loops, *Lecture Notes in Mathematics 1778*, Springer, 2002.

[10] KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. Foundations of differential geometry. John Wiley & Sons, New York, 1963.

[11] LIMA, E. L. Variedades diferenciáveis. IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

[12] NOMIZU, K. Lie groups and differential geometry, The Mathematical Society of Japan, 1956.

[13] SABININ, L. Smooth quasigroups and loops, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[14] UNGAR, A. Analytic Hyperbolic Geometry - Mathematical Foundations and Applications. World Scientific, 2005.

[15] UNGAR, A. Beyond the Einstein addition law and its gyroscopic Thomas precession: the theory of gyrogroups and gyrovector spaces, Fundamental Theories in Physics, v. 117, Kluwer Academic Plublishers, 2001.

[16] KASPARIAN, A.; UNGAR, A. Lie gyrovector spaces, *J Geom Sym Phys*, v. 1, p. 3-53, 2004.