

Escoamento Laminar de Fluidos Newtonianos em Dutos Anulares Concêntricos

Laminar Flow of Newtonian Fluids in Concentric Annular Ducts

Thiago Antonini Alves

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Ponta Grossa, PR

thiagooalves@utfpr.edu.br

Ricardo Alan Verdú Ramos

Universidade Estadual de São Paulo – UNESP, Ilha Solteira, SP

ramos@dem.feis.unesp.br

Cassio Roberto Macedo Maia

Universidade Estadual de São Paulo – UNESP, Ilha Solteira, SP

cassio@fem.feis.unesp.br

Resumo: Neste trabalho, foi apresentada uma solução híbrida analítico-numérica do problema fluidodinâmico de escoamento laminar completamente desenvolvido de fluidos Newtonianos no interior de dutos anulares concêntricos utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG. Para facilitar o tratamento analítico e a aplicação das condições de contorno uma Transformação Conforme, foi utilizada visando transformar o domínio para um sistema de coordenadas mais apropriado. Feito isso, a TTIG foi aplicada na equação do *momentum* para determinação do campo de velocidade. Os resultados numéricos foram obtidos para parâmetros fluidodinâmicos de interesse, tais como: velocidades média e máxima, fator de atrito de *Fanning*, número de *Poiseuille*, fator de *Hagenbach* e comprimento de entrada fluidodinâmico. Estes resultados foram comparados, quando possível, com aqueles disponíveis na literatura e apresentaram uma excelente concordância.

Palavras-chave: duto anular concêntrico; escoamento laminar; transformação conforme; transformada integral.

Recebido em 12/04/2014 - Aceito em 30/09/2014.

RECEN 16(2) p. 285-305 jul/dez 2014 DOI: 10.5935/RECEN.2014.02.07

Abstract: In this work it was presented a hybrid analytical-numerical solution to hydrodynamic problem of fully developed laminar flow of Newtonian fluids in concentric annular ducts employing the Generalized Integral Transform Technique (GITT). In order to facilitate the analytical treatment and the application of the boundary conditions, a Conformal Transform was used to change the domain into a more suitable coordinate system. Thereafter, the GITT was applied on the momentum equation to obtain the velocity field. The numerical results were obtained for fluid dynamic parameters of interest, such as: maximum and minimum velocities, *Fanning* friction factor, *Poiseuille* number, *Hagenbach* factor and the fluid dynamic entry length. These results were compared, as much as possible, with the parameter values available in the literature and they presented an excellent agreement.

Key words: concentric annular duct; conformal transform; integral transform; laminar flow.

1 Introdução

O escoamento interno de fluidos em dutos representa uma classe de problemas de natureza difusiva elíptica de interesse na Engenharia devido ao fato de estar presente em equipamentos de aplicação residencial e industrial. Particularmente, os dutos de seção anular concêntrica são amplamente utilizados devido à sua simplicidade construtiva e pela facilidade de sua aplicação durante a concepção de um projeto.

O presente trabalho trata do problema fluidodinâmico relacionado ao escoamento laminar completamente desenvolvido de fluidos Newtonianos no interior de dutos de seção transversal anular concêntrica. Geralmente, problemas com essa geometria são resolvidos através da utilização do sistema de coordenadas cilíndricas. Entretanto, para facilitar o tratamento analítico, decidiu-se pelo uso de uma Transformação Conforme conveniente com o objetivo de transformar o domínio original em um retângulo no novo sistema de coordenadas. Além de facilitar a aplicação das condições de contorno, esta transformação permite escrever a equação diferencial do *momentum* de forma mais simples. Para a obtenção do perfil de velocidade do fluido, optou-se

pela aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG [1], pois, para este caso, a equação diferencial parcial que descreve a conservação do *momentum* é transformada em um sistema de equações algébricas de fácil solução. Este procedimento vem permitindo a solução analítica de forma simples de problemas difusivos e difusivo-convectivos que apresentam geometrias relativamente complexas [2, 3].

2 Procedimento híbrido analítico-numérico

Considera-se, para o presente problema, o escoamento laminar de fluidos no interior de dutos cilíndricos de seção transversal com formato anular concêntrico (Figura 1).

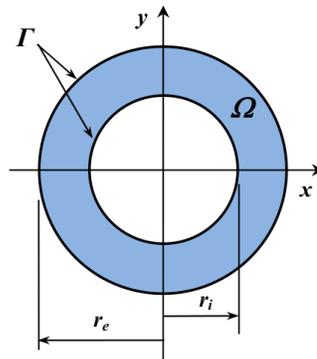


Figura 1. Geometria original do problema.

Dessa forma, para fluidos Newtonianos com propriedades físicas constantes, a equação do momentum pode ser escrita como [4]:

$$\rho \frac{Dv(x,y,z)}{Dt} = -\nabla p(x,y,z) + \mu \nabla^2 v(x,y,z), \quad \{(x,y) \in \Omega, z > 0\} \quad (1)$$

$$v(x,y,z) = 0, \quad \{(x,y) \in \Gamma, z > 0\} \quad (2)$$

sendo que, ρ representa a massa específica do fluido, μ a viscosidade dinâmica do fluido, p o campo de pressão, v o campo vetorial de velocidades, Γ o contorno e Ω o

domínio da geometria analisada.

Para escoamento completamente desenvolvido e em regime permanente, a equação do *momentum*, se reduz a:

$$\nabla^2 v(x, y) - \frac{1}{\mu} \nabla p(z) = 0, \quad \{(x, y) \in \Omega, z > 0\} \quad (3)$$

$$v(x, y) = 0, \quad \{(x, y) \in \Gamma, z > 0\} \quad (4)$$

sendo que:

$$v(x, y) = w(x, y)k, \quad (5)$$

$$\nabla p(z) = \frac{dp(z)}{dz}k, \quad (6)$$

2.1 Adimensionalização

Reescrevendo a equação do *momentum*, na forma adimensional, tem-se que:

$$\frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial^2} + \frac{\partial^2 W(X, Y)}{\partial Y^2} + 1 = 0, \quad \{(X, Y) \in \Omega, Z > 0\} \quad (7)$$

$$W(X, Y) = 0, \quad \{(X, Y) \in \Gamma, Z > 0\}, \quad (8)$$

com:

$$X = \frac{x}{D_b}, \quad (9)$$

$$Y = \frac{y}{D_b}, \quad (10)$$

$$Z = \frac{z}{D_b}, \quad (11)$$

$$D_b = \frac{4A_s}{Per}, \quad (12)$$

$$W(X, Y) = \frac{w(X, Y)}{\left[\frac{D_b}{\mu} \left(-\frac{dp(Z)}{dZ} \right) \right]}, \quad (13)$$

sendo, D_b o diâmetro hidráulico, A_s a área da seção transversal, Per o perímetro do contorno, w a velocidade do fluido e W a velocidade adimensional. Desta maneira, a equação do *momentum*, se apresenta na forma da equação de Poisson para o potencial $W(X, Y)$.

2.2 Transformação de coordenadas

Para facilitar o tratamento analítico do problema, considere a Transformação Conforme da forma como segue [5]:

$$\zeta = R_e e^{i\omega} \quad (14)$$

sendo, $R_e = r_e / D_b$, $R_i = r_i / D_b$, $\zeta = X + iY$ e $\omega = u + iv$. Esta relação permite transformar o domínio anular concêntrico no plano XY em um domínio retangular no plano uv conforme ilustrado na figura 2. As relações de transformação de coordenadas são dadas por:

$$X = R_e e^{-v} \cos(u) \quad (15)$$

$$Y = R_e e^{-v} \sen(u) \quad (16)$$

$$Z = z \quad (17)$$

A transformação dada pela eq. (14) satisfaz as condições de Cauchy-Riemann. Portanto, os coeficientes métricos h_u , h_v e o Jacobiano $J(u, v)$ da transformação são expressos por:

$$h_u(u, v) = h_v(u, v) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2} = R_e e^{-v} \quad (18)$$

$$J(u, v) = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = R_e^2 e^{-2v} \quad (19)$$

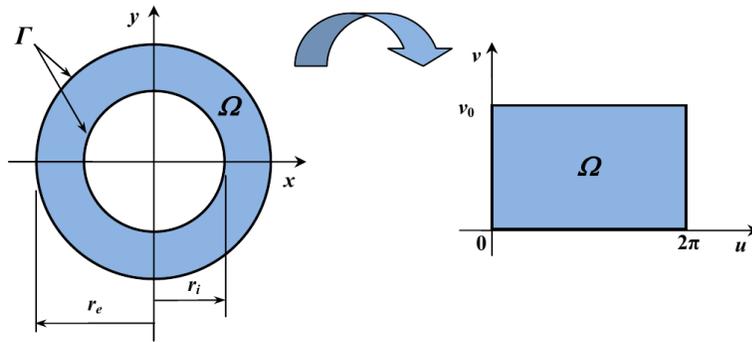


Figura 2. Transformação do domínio anular concêntrico no plano XY para o plano uv .

Com estas novas variáveis definidas, a equação do *momentum*, transforma-se em:

$$\frac{\partial^2 W(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W(u, v)}{\partial v^2} = H(u, v), \quad \{(u, v) \in \Omega\} \quad (20)$$

com $H(u, v) = -J(U, v)$.

As condições de contorno no novo sistema de coordenadas são expressas por:

$$\frac{\partial W(u, v)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 0, 0 \leq v \leq v_0\} \quad (21)$$

$$\frac{\partial W(u, v)}{\partial u} = 0, \quad \{u = 2\pi, 0 \leq v \leq v_0\} \quad (22)$$

$$W(u, v) = 0, \quad \{0 \leq u \leq 2\pi, v = 0\} \quad (23)$$

$$W(u, v) = 0, \quad \{0 \leq u \leq 2\pi, v = v_0\} \quad (24)$$

2.3 Aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada

Para a obtenção da solução da equação do *momentum*, no novo sistema de coordenadas, aplica-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG sobre a eq. (21) visando proceder a remoção das derivadas de segunda ordem. Para este fim, escreve-se o potencial $W(u,v)$ em termos de uma expansão em autofunções normalizadas obtidas de problemas auxiliares de autovalor para cada coordenada espacial. Neste sentido, considere, primeiramente, o problema auxiliar de autovalor,

$$\frac{d^2\psi(u)}{du^2} + \mu^2\psi(u) = 0, \quad \{0 \leq u \leq 2\pi\} \quad (25)$$

com,

$$\frac{d\psi(0)}{du} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{d\psi(2\pi)}{du} = 0 \quad (27)$$

Os autovalores e as autofunções associados a este problema são dados, respectivamente, por:

$$\mu_i = (i - 1), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

$$\psi_i(u) = \cos(\mu_i u). \quad (29)$$

Estas autofunções permitem o desenvolvimento do par transformada-inversa,

$$\bar{W}_i(v) = \int_0^{2\pi} K_i(u) W(u, v) du, \quad (30)$$

$$W(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(u) \bar{W}_i(v), \quad (31)$$

sendo que, $\bar{W}_i(v)$ é o potencial transformado em u e $K_i(u)$ são as autofunções normalizadas, dadas por:

$$K_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{\sqrt{N_i}}, \quad (32)$$

com,

$$N_i = \int_0^{2\pi} \psi_i^2(u) du = \begin{cases} 2\pi & i = 1, \\ \pi & i \neq 1, \end{cases} \quad (33)$$

sendo que, N_i são as integrais de normalização das autofunções $\psi_i(u)$.

Efetuada-se o produto interno das autofunções normalizadas $K_i(u)$ com a equação do *momentum* e fazendo uso das condições de contorno e das equações que definem o problema auxiliar de autovalor, obtém-se a primeira transformação da equação diferencial,

$$A_i(v) + \mu_i^2 \bar{W}(v) = \frac{\partial^2 \bar{W}_i(v)}{\partial v^2}, i = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

$$A_i(v) = \int_0^{2\pi} K_i(u) H(u, v) du. \quad (35)$$

Para proceder a transformação integral relativo à coordenada v , considera-se agora o seguinte problema de autovalor,

$$\frac{d^2 \Phi(v)}{dv^2} + \lambda^2 \Phi(v) = 0, \quad \{0 \leq v \leq v_0\} \quad (36)$$

com,

$$\Phi(0) = 0, \quad (37)$$

$$\Phi(v_0) = 0, \quad (38)$$

Os autovalores e as autofunções para este novo problema são dadas por:

$$\lambda_j = \frac{j\pi}{v_0}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (39)$$

$$\Phi_j(v) = \text{sen}(\lambda_j v) \quad (40)$$

Estas autofunções permitem o desenvolvimento do seguinte par transformada-inversa,

$$\widetilde{W}_{ij} = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} K_i(u) Z_j(v) W(u, v) du dv, \quad (41)$$

$$W(u, v) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_i(u) Z_j(v) \widetilde{W}_{ij}, \quad (42)$$

sendo que, $Z_j(v)$ são as autofunções normalizadas e são expressas por:

$$Z_j(v) = \frac{\Phi_j(v)}{\sqrt{M_j}}, \quad (43)$$

$$M_j = \int_0^{v_0} \Phi_j^2(v) dv = \frac{v_0}{2}, \quad (44)$$

sendo que, M_j são as integrais de normalização das autofunções $\Phi_j(v)$.

Efetuada-se o produto interno das autofunções normalizadas $Z_j(v)$, com a equação diferencial transformada em u , e fazendo uso das condições de contorno e das relações de ortogonalidade relativas ao segundo problema de autovalor, obtém-se a transformação integral da equação do *momentum*,

$$B_{ij} + (\mu_i^2 + \lambda_j^2) \widetilde{W}_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots \quad (45)$$

$$B_{ij}(v) = \int_0^{v_0} Z_j(v) A_i(v) dv = \int_0^{v_0} \int_0^{2\pi} K_i(u) Z_j(v) H(u, v) du dv, \quad (46)$$

Observa-se que os parâmetros B_{ij} são integráveis e que o sistema dado pela eq. (45) é algébrico, linear e desacoplado. Portanto, o potencial transformado pode ser obtido de forma direta,

$$\widetilde{W}_{ij} \approx -\frac{B_{ij}}{\mu_i^2 + \lambda_j^2} \quad (47)$$

permitindo, assim, a obtenção da solução analítica do potencial velocidade adimensional,

$$W(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_i(u) Z_j(v) \widetilde{W}_{ij} \approx - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{ij}}{\mu_i^2 + \lambda_j^2} K_i(u) Z_j(v) \quad (48)$$

Para fins computacionais, o potencial transformado pode ser determinado numericamente quando a expansão é truncada em uma dada ordem $i = M$ e $j = N$. Portanto, utilizando-se da fórmula de inversão, o potencial velocidade adimensional é expresso por:

$$W(u, v) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N K_i(u) Z_j(v) \widetilde{W}_{ij} \approx - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{B_{ij}}{\mu_i^2 + \lambda_j^2} K_i(u) Z_j(v) \quad (49)$$

Obviamente, quanto maior M e N , maior será a precisão dos resultados.

Da definição da velocidade $W(u,v)$, determina-se, então, o perfil de velocidade para o escoamento laminar completamente desenvolvido em dutos cilíndricos anulares concêntricos.

2.4 Parâmetros físicos de interesse

2.4.1 Velocidade adimensional

A velocidade média adimensional pode ser expressa por:

$$W_{md} = \frac{1}{A_S} \int_{A_S} W(X, Y) dA_S \quad (50)$$

Dessa forma, a velocidade adimensional $W^*(X, Y)$ definida em termos da velocidade média, pode ser determinada por:

$$W^*(X, Y) = \frac{w(X, Y)}{w_{md}(X, Y)} = \frac{W(X, Y)}{W_{md}(X, Y)} \quad (51)$$

A velocidade adimensional máxima $W_{máx}^*$ definida em termos da velocidade média, é dada por:

$$W_{máx}^* = \frac{w_{máx}}{w_{md}(X, Y)} = \frac{W_{máx}}{W_{md}(X, Y)} \quad (52)$$

sendo que $w_{máx}$ e $W_{máx}$ são os valores máximos da velocidade e da velocidade adimensional, respectivamente.

2.4.2 Fator de atrito de *Fanning*

O fator de atrito de Fanning ou coeficiente de atrito, f , é definido por:

$$f = \frac{2\tau_{p,md}}{\rho w_{md}^2} \quad (53)$$

$$\tau_{p,md} = -\frac{dp}{dz} \left(\frac{A_S}{Per} \right) \quad (54)$$

sendo que, $\tau_{p,md}$ é a tensão de cisalhamento média na parede.

2.4.3 Número de Poiseuille

Para escoamento laminar, completamente desenvolvido no interior de dutos, o fator fRe é igual a uma constante. Das relações de adimensionalização, obtém-se que:

$$fRe = Po = \frac{1}{2W_{md}} \quad (55)$$

sendo que, Re é o número de Reynolds definido em termos do diâmetro hidráulico. Esse fator fRe é também conhecido como número de Poiseuille (Po).

2.4.4 Fator de Hagenbach

O número do incremento na queda de pressão ou fator de Hagenbach, $K(\infty)$, de acordo com [6], é definido como:

$$K(\infty) = \frac{2}{A_S} \int_{A_S} \left\{ \left[\frac{w(X, Y)}{w_{md}} \right]^3 - \left[\frac{w(X, Y)}{w_{md}} \right]^2 \right\} dA_S \quad (56)$$

ou,

$$K(\infty) = 2[K_e(\infty) - K_d(\infty)], \quad (57)$$

sendo que, $K_e(\infty)$ e $K_d(\infty)$, são respectivamente, o fator de correção de energia cinética e o fator de correção no fluxo do *momentum*, expressos por:

$$K_e(\infty) = \frac{1}{A_S} \int_{A_S} \left[\frac{w(X, Y)}{w_{md}} \right]^3 dA_S, \quad (58)$$

$$K_d(\infty) = \frac{1}{A_S} \int_{A_S} \left[\frac{w(X, Y)}{w_{md}} \right]^2 dA_S. \quad (59)$$

2.4.5 Comprimento de entrada fluidodinâmico

O comprimento de entrada hidrodinâmico, L_{hy} , é definido, com sendo a posição em que a velocidade máxima atinge 99% da velocidade correspondente à região fluidodinamicamente desenvolvida quando o escoamento de entrada é uniforme [7]. O comprimento de entrada fluidodinâmico adimensional, L_{hy}^+ , de acordo com [8] pode ser expresso por:

$$L_{hy}^+ = \frac{L_{hy}}{D_h Re} = \frac{(W_{máx}^*)^2 - 1 - K(\infty)}{4f Re} \quad (60)$$

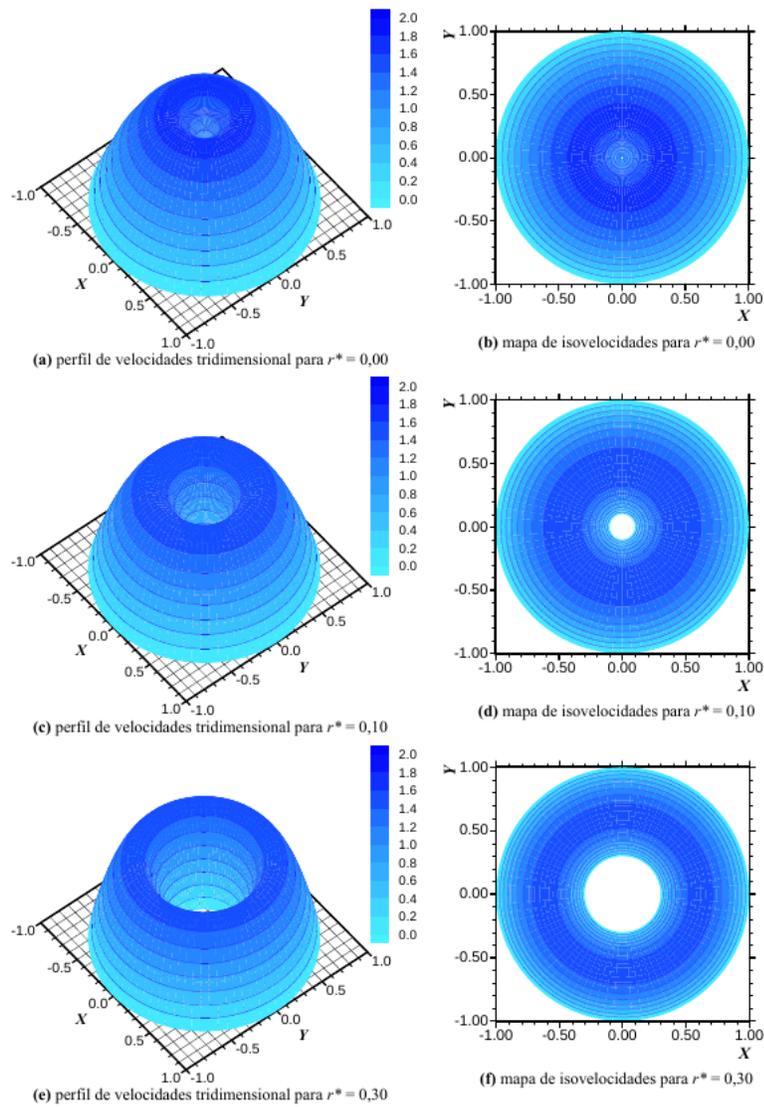
3 Resultados e discussão

Para a obtenção dos resultados numéricos, o Método de Quadratura de Gauss foi utilizado para o cálculo das integrais envolvidas nos coeficientes B_{ij} e demais parâmetros físicos de interesse. Desta forma, foi necessária, também, a determinação das autofunções e do Jacobiano nos pontos de quadratura. Feito isso, o sistema de equações algébrico, linear e desacoplado foi resolvido para a determinação dos coeficientes do potencial transformado fazendo uso da rotina DIVPAG da biblioteca IMSL Fortran [9] e do truncamento da expansão dada pela eq. (52) para diversas ordens M e N.

Foi verificado por meio de uma análise de convergência que com a utilização de até 100 termos na expansão da série em cada coordenada foi possível à obtenção de três casas decimais de precisão na região de convergência mais lenta ($0,00 \leq r^* \leq 0,20$), enquanto que nas demais regiões obtém-se a mesma precisão com uma ordem $N = M = 75$ de truncamento na série, ou menos. Ressalta-se que a razão de aspecto r^* é definida como a razão entre os diâmetros interno e externo, isto é, $r^* = r_i/r_e$.

O tempo de processamento gasto no cômputo dos parâmetros fluidodinâmicos de interesse foi pequeno, cerca de 3 a 5 segundos em um computador pessoal comum (IntelTM CoreTM i7 3,6GHz e com 16GB de memória RAM).

Na figura 3 são ilustrados os perfis de velocidade e os mapas de isovelocidades do escoamento laminar de fluidos Newtonianos considerando diferentes configurações geométricas dos dutos anulares concêntricos.



Na tabela 1 e nas figuras 4 a 9 são apresentados os resultados obtidos para o número de Poiseuille, as velocidades adimensionais média e máxima, a localização da velocidade máxima em relação ao raio, o fator de Hagenbach e o comprimento de entrada fluidodinâmico adimensional, considerando diversas razões de aspecto dos dutos anulares concêntricos.

Os resultados numéricos encontrados para os parâmetros fluidodinâmicos foram comparados, sempre que possível, com os apresentados em [6, 8, 10-17] e apresentaram uma excelente concordância, gerando um erro inferior a 1%, para razões de

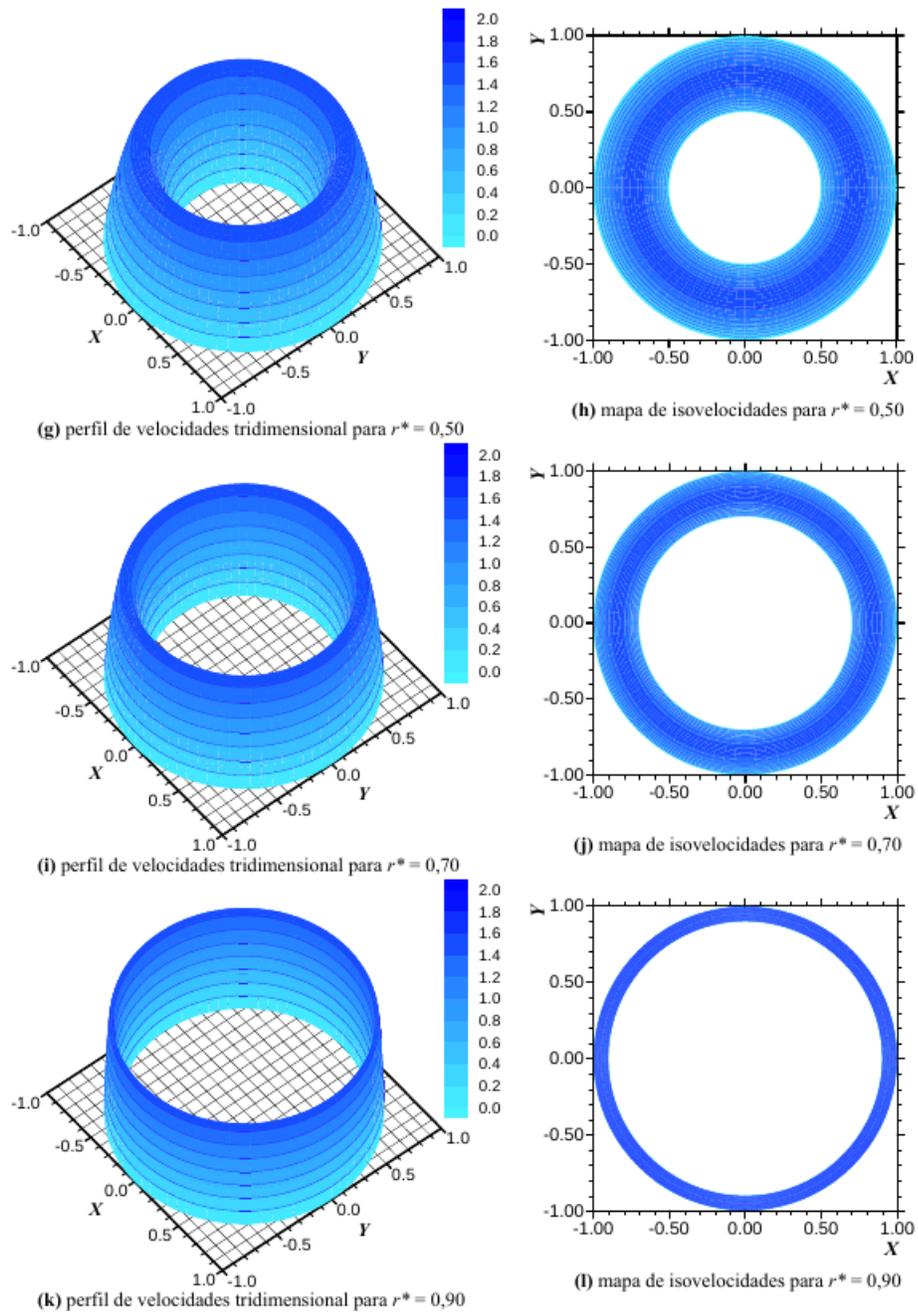


Figura 3. Perfis de velocidades para o escoamento em dutos anulares concêntricos.

aspectos r^* entre 0,01 e 0,99. Para o caso $r^* = 0,00$ ao contrário do que afirma Shah

Tabela 1. Parâmetros fluidodinâmicas de interesse.

r^*	fRe	W_{md}	$W^*_{m\acute{a}x}$	$r^*_{m\acute{a}x}$	$K(\infty)$	L^+_{hy}
0,00	18,708	0,02673	1,7233	0,2512	1,0727	0,01199
0,01	20,028	0,02496	1,6613	0,3295	0,9734	0,00982
0,05	21,567	0,02318	1,5983	0,4080	0,8644	0,00800
0,10	22,343	0,02238	1,5673	0,4637	0,8088	0,00725
0,15	22,790	0,02194	1,5494	0,5076	0,7762	0,00685
0,20	23,088	0,02166	1,5374	0,5461	0,7542	0,00656
0,25	23,302	0,02146	1,5287	0,5815	0,7382	0,00642
0,30	23,461	0,02131	1,5222	0,6147	0,7264	0,00629
0,35	23,583	0,02120	1,5172	0,6465	0,7173	0,00620
0,40	23,678	0,02112	1,5133	0,6770	0,7101	0,00612
0,45	23,753	0,02105	1,5102	0,7067	0,7044	0,00607
0,50	23,813	0,02100	1,5078	0,7355	0,7000	0,00602
0,55	23,860	0,02096	1,5058	0,7638	0,6964	0,00598
0,60	23,879	0,02094	1,5043	0,7915	0,6935	0,00596
0,65	23,927	0,02090	1,5031	0,8187	0,6913	0,00594
0,70	23,950	0,02088	1,5021	0,8455	0,6896	0,00592
0,75	23,967	0,02086	1,5014	0,8720	0,6882	0,00590
0,80	23,980	0,02085	1,5008	0,8981	0,6872	0,00589
0,85	23,990	0,02084	1,5004	0,9240	0,6865	0,00589
0,90	23,996	0,02084	1,5002	0,9496	0,6863	0,00588
0,95	23,999	0,02083	1,5001	0,9749	0,6861	0,00588
1,00	24000	0,02083	1,5000	0,9950	0,6860	0,00588

e London [7]: “As condições de contorno para os dutos anulares concêntricos com $r^* = 0,00$ não são idênticas às dos dutos circulares. Entretanto, fortuitamente para muitos casos, os resultados para o escoamento e a transferência de calor para os dutos anulares concêntricos com $r^* = 0,00$ são idênticos aos dos dutos circulares”; os resultados para os parâmetros fluidodinâmicos foram diferentes dos encontrados nos dutos circulares. No caso $r^* = 1,00$ os resultados encontrados para todos os parâmetros são idênticos aos encontrados no escoamento laminar completamente desenvolvido em canais de placas planas paralelas [18].

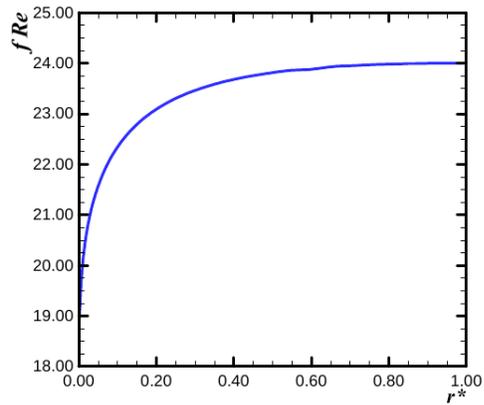


Figura 4. Número de Poiseuille em dutos anulares concêntricos.

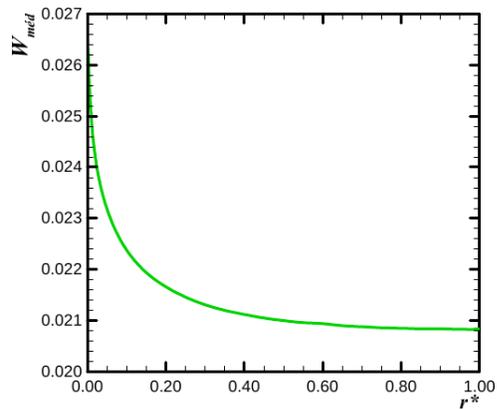


Figura 5. Velocidade adimensional média em dutos anulares concêntricos.

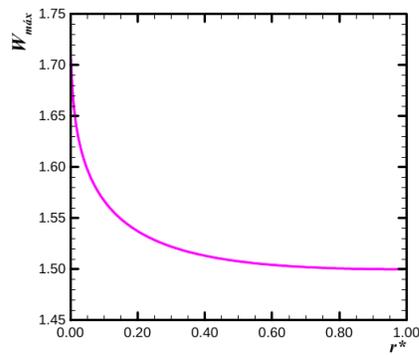


Figura 6. Velocidade adimensional máxima em dutos anulares concêntricos.

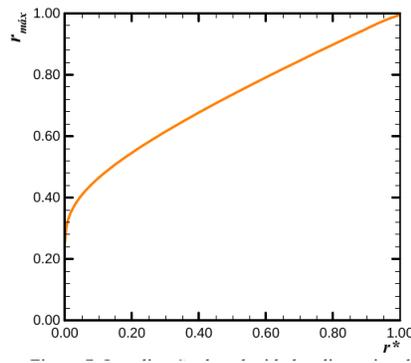


Figura 7. Localização da velocidade adimensional máxima em dutos anulares concêntricos.

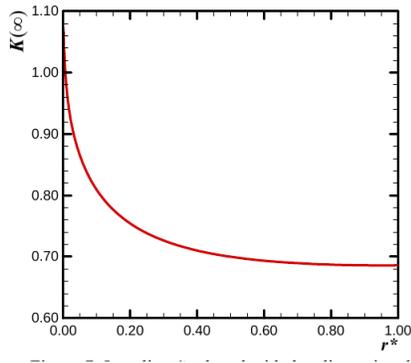


Figura 8. Fator de Hagenbach em dutos anulares concêntricos.

4 Conclusão

No presente trabalho, foi realizada a solução híbrida analítico-numérica do problema fluidodinâmico de escoamento laminar completamente desenvolvido de fluidos Newtonianos em dutos anulares concêntricos utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG. Para o desenvolvimento analítico, foi utilizado um sistema de coordenadas obtido através de uma Transformação Conforme apropriado, capaz de representar a geometria do duto em um domínio com contorno de formato retangular. Com este procedimento o novo sistema de coordenadas, além de facilitar a aplicação das condições de contorno, permitiu escrever a equação do *mo-*

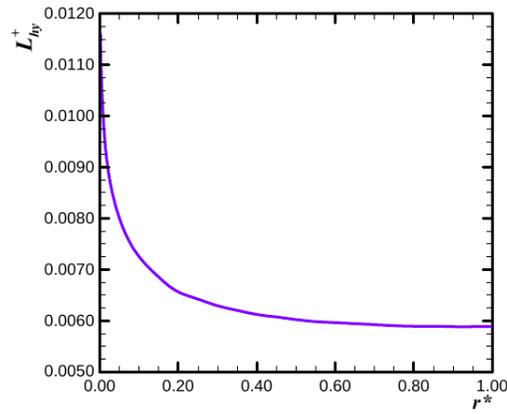


Figura 9. Comprimento de entrada fluidodinâmico adimensional em dutos anulares concêntricos.

mentum na forma de uma equação de Poisson, a qual foi resolvida através da TTIG. Como consequência, um sistema de equações algébricas infinito e desacoplado foi obtido para os potenciais transformados que foi resolvido numericamente truncando-se a expansão do potencial velocidade em um número finito de termos. Parâmetros fluidodinâmicos de interesse, tais como: velocidades média e máxima, fator de atrito de Fanning, número de Poiseuille, fator de Hagenbach e comprimento de entrada fluidodinâmico foram calculados e comparados, quando possível com os resultados disponíveis na literatura, para dutos de configurações geométricas anulares concêntricas.

Finalmente, observa-se que a Técnica da Transformada Integral Generalizada – TTIG está sendo aplicada com sucesso na obtenção de solução de problemas difusivos e difusivo-convectivos multidimensionais, os quais muitas vezes não admite solução pelas técnicas analíticas clássicas.

Referências

- [1] COTTA, R.M. The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Science and Engineering. New York: Begell House Inc., 430p, 1998.
- [2] MAIA, C.R.M. Solução de Problemas Difusivos e Difusivos-Convectivos em

- Domínio de Geometria Elíptica e Bicôncava pela Técnica da Transformada Integral Generalizada. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica – FEM, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Campinas, SP, 251p, 2003.
- [3] ALVES, T.A. Aplicação da Transformada Integral na Solução de uma Classe de Problemas Difusivos e Difusivo-Convectivos em Domínios de Geometria Não-Convencionais. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, SP, Brasil, 360p, 2006.
- [4] WHITE, F.M. Viscous Fluid Flow. New York: McGraw-Hill, 629p, 2006.
- [5] CHURCHILL, R.V. Variáveis Complexas e suas Aplicações. São Paulo: McGraw-Hill, 276p, 1975.
- [6] LUNDGREN, T.S., SPARROW, E.M., STARR, J.B. Pressure Drop Due to the Entrance Region in Ducts of Arbitrary Cross Section. *J Basic Eng T Asme*, v. 86, p. 620-626, 1994.
- [7] SHAH, R.K., LONDON, A.L. Laminar Flow Forced Convection in Ducts. Advances in Heat Transfer, Supplement 1. New York: Academic Press Inc., 477p, 1978.
- [8] MCCOMAS, S.T. Hydrodynamic Entrance Lengths for Ducts of Arbitrary Cross Section. *J Basic Eng T Asme*, v. 89, p. 847-850, 1967.
- [9] IMSL Math/Library, Visual Numeric, Edition 10, Version 2.0, Houston, TX-77042, 1994.
- [10] SUGINO, E. Velocity Distribution and Pressure Drop in the Laminar Inlet of a Pipe with Annular Space. *B JSME*, v. 5, p. 651-655, 1962.
- [11] HEATON, H.S., REYNOLDS, W.C., KAYS, W.M. Heat Transfer Annular Passages: Simultaneous Development of Velocity and Temperature Fields in Laminar Flow. *Int J Heat Mass Tran*, v 7, p. 763-781, 1964.

- [12] SPARROW, E.M., LIN, S.H. The Developing Laminar Flow and Pressure Drop in the Entrance Region of Annular Ducts. *J Basic Eng T Asme*, v. 86, p. 827-834, 1964.
- [13] SHAH, R.K., LONDON, A.L. Laminar Flow Forced Convection Heat Transfer and Flow Friction in Straight and Curved Ducts – A Summary of Analytical Solutions. TR n° 75, Mechanical Engineering Department, Stanford University, Stanford, USA, 1971.
- [14] NATARAJAN, N.M., LAKSHMANAN, S.M. Laminar Flow Through Annuli: Analytical Method for Calculation of Pressure Drop. *Indian Chemical Engineering*, v. 15, p. 50-53, 1973.
- [15] LIU, J. Flow of a Bingham Fluid in the Entrance Region of an Annular Tube, M.Sc. Thesis. University of Wisconsin Milwaukee, 1974.
- [16] LEE, Y.M., KUO, Y.M. Laminar Flow in Annuli Ducts with Constant Wall Temperature. *Int Com Heat Mass Tran*, v. 25, p. 227-236, 1998.
- [17] PARK, S., LEE, D.S. Predictions of Pressure Drop for Modified Power Law Fluids in Conduits of Three Different Cross-Sectional Shapes. *Chem Eng Sci*, v. 57, p. 1057-1067, 2002.
- [18] ROHSENOW, W.M., HARTNETT, J.P., CHO, Y.I. Handbook of Heat Transfer. New York: McGraw-Hill, 1334p, 1998.