Existência, Unicidade e Decaimento Exponencial de Solução da Equação de Ondas com uma Dissipação Localizada

Existence, Uniqueness and Exponential Decay of Solution for the Wave Equation with Localized Dissipation

Daiane Cristina Zanatta
Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO, Irati, PR
daiaczanatta@gmail.com

Alisson Rafael Aguiar Barbosa
Universidade Federal de Uberlândia – UFU, Ituiutaba, MG
alissonrafael@yahoo.com.br

Resumo: Neste trabalho, estudou-se, via teoria de semigrupos de operadores lineares, a existência, unicidade e a estabilidade exponencial de solução do problema de valor inicial e de contorno associado com a equação da onda em um domínio retangular com uma dissipação localizada.Para mostrar a existência, a unicidade e o decaimento exponencial da solução do problema, reescreveu-se o modelo como um problema de primeira ordem no tempo. Provou-se a existência e unicidade de solução usando o Teorema de Lumer-Phillips e a estabilidade exponencial do semigrupo de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, associado ao sistema dissipativo, usando o Teorema de Gearhart.

Palavras-chave: equação da onda; estabilidade exponencial; semigrupos.

Abstract: This work investigated the theory of linear semigroup operators, focusing on existence, uniqueness and exponential stability of solution for the initial and boundary value problems associated with the wave equation in a rectangular domain with localized dissipation. In order to demonstrate existence, uniqueness and exponential decay of solution, the model was rewritten as a first-order problem in time. The results proved existence and uniqueness of solution using Lumer-Phillips Theorem and

Recebido em 03/11/2015 - Aceito em 23/02/2016.

exponential stability of C_0 class semigroup $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, associated with a dissipative system, using the Gearhart Theorem.

Keywords: exponential stability; semigroups; wave equation.

1 Introdução

O presente trabalho se insere no campo da dinâmica assintótica da equação da onda com dissipação localizada em domínios compactos. Foram estudados, via teoria de semigrupos, a existência, unicidade e a estabilidade exponencial do problema de valor inicial e de contorno associado com a equação de ondas em domínio retangular, Ω, com uma dissipação localizada. Efetivamente, nosso problema é governado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \triangle u + \sigma(x,y)u_t = 0,\ \ (x,y,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,y,t) = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,y,0) = u_0(x,y),\ \ (x,y) \in \Omega \\ u_t(x,y,0) = u_1(x,y),\ \ (x,y) \in \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

sendo $\triangle$ o operador Laplaciano, que em dimensão dois se escreve como

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

e σ uma função do espaço $W^{1,\infty}(\Omega)$, com $\sigma(x,y) \geq 0$, para todo $(x,y) \in \Omega = (0,a) \times (0,b)$ e $\int_0^b \int_0^a \sigma(x,y)dxdy > 0$. A função σ pode se anular em uma parte de Ω. Assim, o termo dissipativo pode ser efetivo apenas em uma parte do domínio Ω, o que justifica as hipóteses feitas sobre as propriedades da função sigma.

O estudo do comportamento assintótico de sistemas dissipativos é um ramo fértil para a pesquisa em Equações Diferenciais Parciais - EDP. Nessa direção, algumas técnicas analíticas foram utilizadas por muitos autores para obter propriedades assintóticas de problemas clássicos envolvendo a equação da onda. Como exemplo, cita-se o método de Komornik (ver Komornik e Zuazua [1]), método de Nakao (ver Nakao [2]) e o método de energia (ver Rivera [3]).

O objetivo deste trabalho é utilizar um método apresentado em Liu e Zheng [4] que se aplica a uma grande variedade de problemas dissipativos. Essa técnica é diferente dos demais métodos clássicos de estabilidade e consiste em explorar as propriedades dissipativas do semigrupo associado ao sistema.

Para motivar nosso problema, foi considerado o modelo matemático que descreve as pequenas vibrações verticais de uma corda de comprimento finito L e presa nas extremidades. Supondo que, em estado de equilíbrio, a corda esteja em repouso sobre o eixo dos x e cada ponto da corda se desloca perpendicularmente a esse eixo, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0, \;\; (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \\
&u(0,t) = u(L,t) = 0, \\
&u(x,0) = u_0(x), \;\; x \in (0,L) \\
&u_t(x,0) = u_1(x), \;\; x \in (0,L),
\end{aligned}$$

sendo $u(x,t)$ o deslocamento de cada ponto $x \in (0,L)$ da corda no instante de tempo $t > 0$ a partir de sua posição de equilíbrio.

Multiplicando a equação de onda por u_t e integrando por partes no intervalo $(0,L)$, é possível deduzir que a energia total desse modelo, a qual denotou-se por $E(t)$, é

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L |u_t|^2 + |u_x|^2 dx, \tag{2}$$

sendo a parcela associada a u_t a energia cinética e a parcela associada a u_x a energia potencial.

Como $\frac{d}{dt}E(t) = 0$, a equação de onda acima mostra que esse modelo é conservativo, isto é, a energia total $E(t)$ é constante. Agora, sabe-se que, em situações reais, esse modelo se estabiliza em razão de diversos fatores, tais como: o atrito, a viscosidade, a diferença de temperatura entre o meio ambiente e o material, etc.

Nesse sentido, ao longo do tempo, diversos autores como Zuazua e Haraux [5], Rivera [3] e Zuazua [6] introduziram diferentes tipos de mecanismos de dissipação para estabilizar as oscilações. No caso da dissipação ocorrer em razão da troca de temperatura entre o material e o meio ambiente, tem-se o sistema termoelástico (ver Rivera [3]). Tem-se, também, a dissipação provocada pelo atrito representado por σu_t, sendo σ uma constante real positiva (ver Zuazua e Haraux [5]). Nesse caso, o atrito σu_t atua uniforme em todo o material. Existe, ainda, a possibilidade do material constitutivo possuir a propriedade de recuperar sua posição inicial em razão da viscosidade, nesse caso, a dissipação é do tipo memória (ver Ammar-Khodja, Benabdallah, Rivera e Racke [7]).

Algumas técnicas analíticas para obter o decaimento foram utilizadas por vários autores, sempre adequadas aos problemas em questão. Por exemplo, Nakao [8] e Ikehata [9] investigaram a existência e o decaimento exponencial de soluções para o problema da equação da onda em um domínio exterior em $\mathbb{R}^n$, utilizando as técnicas de Galerking e o método clássico de energia. Cunha [10] mostrou a existência, a unicidade e o decaimento exponencial de solução para o problema de valor inicial e de contorno associado com a equação da onda unidimensional com a dissipação provocada pelo atrito representado por σu_t, sendo σ uma constante real positiva, via teoria de semigrupos. Esse método se aplica a uma variedade de problemas dissipativos e consiste em explorar as propriedades dissipativas do semigrupo associado ao sistema (ver Liu e Zheng [4]).

1.1 Método

Para mostrar a existência, unicidade e o decaimento exponencial da solução para o problema (1) considera-se $v = u_t$. Assim, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_t - v = 0 \\ v_t - \triangle u + \sigma(x,y)u_t = 0. \end{cases}$$

Considerando $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e definindo o operador A da seguinte forma:

$$AU = \begin{pmatrix} v \\ \triangle u - \sigma(x,y)u_t \end{pmatrix},$$

pode-se reescrever o problema (1) no seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{3}$$

Assim, A é um operador linear associado à equação (3). Inicialmente, mostra-se que A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 denotado por $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e, em seguida, demonstra-se que o problema possui uma única solução fraca da forma:

$$U(t) = S(t)U_0,$$

para os dados iniciais no espaço de fase do problema. Caso $U_0 \in D(A)$, sendo

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H; u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \text{ e } v \in H_0^1(\Omega) \right\},$$

o domínio do operador A, obtém-se a solução clássica. Prova-se também a estabilidade exponencial do semigrupo de contrações de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, associado ao sistema dissipativo, utilizando o Teorema de Gearhart.

O texto está organizado da seguinte forma: após esta introdução (seção 1), serão mostrados resultados da teoria de semigrupos, seção 2; na seção 3, mostra-se que o modelo (1) possui uma única solução com decaimento exponencial. Na última seção, são apresentadas algumas conclusões, seguidas das referências bibliográficas.

2 Alguns resultados importantes

Nesta seção, apresentam-se os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips, os quais caracterizam geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0. Será usado o Teorema de Lumer-Phillips para obter a existência e unicidade de solução para o modelo dissipativo. Também será apresentado o Teorema de Gearhart que estabelece as condições necessárias e suficientes para um semigrupo de classe C_0 ser exponencialmente estável.

Definição 1: *Seja A um operador linear em X, sendo X um espaço de Banach. O conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$, sendo $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, para os quais o operador linear $\lambda I - A$, sendo I o operador identidade, é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em X, representado por $\rho(A)$, é chamado conjunto resolvente de A. O operador linear $(\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, representado por $R(\lambda, A)$, é dito resolvente de A.*

Teorema 1 (Hille-Yosida): *Seja X um espaço de Banach. Um operador linear A, definido em $D(A) \subset X$ e com valores em X, é um gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de classe C_0 se, e somente se,*
i) A é fechado e seu domínio é denso em X;
ii) Existam números reais M e w tal que, para cada real $\lambda > w$ se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e $||R(\lambda, A)^n|| \leq \dfrac{M}{(\lambda - \omega)^n}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Essa demonstração pode ser encontrada em Gomes [16].

Notação 1: *Escreve-se $A \in G(M, \omega)$ para indicar que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, que satisfaz a condição $||S(t)|| \leq M e^{wt}$, para todo $t \geq 0$.*

Notação 2: *Usa-se $R(\lambda I - A)$ para indicar a imagem de $\lambda I - A$.*

Será feita, a seguir, uma outra caracterização dos geradores infinitesimais dos semigrupos de contrações de classe C_0 devida a Lumer e Phillips.

Teorema 2 (Lumer-Phillips): *Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear com domínio denso em X.*
(i) Se $A \in G(1, 0)$, então A é dissipativo e $R(\lambda - A) = X$, para todo $\lambda > 0$;
(ii) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $R(\lambda_0 I - A) = X$, então $A \in G(1, 0)$.

Essa prova pode ser encontrada em Pazy [11].

A seguir, apresenta-se um importante resultado que estabelece quais são as condições para que um operador linear seja um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações C_0. Esse resultado será usado para provar a existência e unicidade de solução do problema dissipativo.

Corolário 1: *Seja A um operador linear com domínio denso em um espaço de Hilbert H. Se A é dissipativo e $0 \in \rho(A)$, então A é um gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0.*

Demonstração:

Por hipótese, $0 \in \rho(A)$. Então A é inversível e seu inverso é limitado e tem domínio denso em H. Portanto, o operador

$$\lambda I - A = A(\lambda A^{-1} - I) \tag{4}$$

é inversível para $0 < \lambda < ||A^{-1}||$. Assim, pelo Teorema de Lumer-Phillips, A é um gerador de um semigrupo de contrações de classe C_0.

A seguir, apresenta-se o Teorema de Gearhart que foi usado para provar o decaimento exponencial da solução do modelo (1).

Teorema 3 (Teorema de Gearhart): *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de contrações de classe C_0 em um espaço de Hilbert H e A seu gerador infinitesimal. Então, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se,*

$$\{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \subseteq \rho(A) \tag{5}$$

e

$$\limsup_{|\beta|\to\infty} ||(i\beta I - A)^{-1}|| < \infty. \tag{6}$$

A prova que as condições (5) e (6) são suficientes para a estabilidade exponencial de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ pode ser encontrada em Pazy [11].

Para mostrar a condição (5), para o modelo (1), foi usado o seguinte resultado:

Teorema 4: *Seja X um espaço normado e seja $A : X \to X$ um operador linear compacto. Então, se $\lambda \neq 0$, a equação*

$$Ax - \lambda x = y \tag{7}$$

possui uma solução x para cada $y \in X$ se, e somente se, a equação

$$Ax - \lambda x = 0$$

admite apenas a solução trivial $x = 0$. Nesse caso, a solução da equação (7) é única e $A - \lambda I$ tem inversa limitada.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Kreyszig [12].

3 Existência, unicidade e estabilidade exponencial

3.1 Existência e Unicidade

Nesta seção, mostra-se que o modelo (1) possui única solução

$$u \in C([0,\infty), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty), L^2(\Omega)).$$

Seja $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, munido da norma:

$$||U||_H = \left(||u||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dz + \int_\Omega |v|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}},$$

sendo $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in H$. Assim, H é um espaço de Hilbert.

Em relação ao operador A definido em (3), têm-se os seguintes resultados:

Teorema 5: *O operador A gera um semigrupo de contrações de classe C_0 em H.*

Demonstração:

Mostra-se que A é dissipativo e que $0 \in \rho(A)$ para então aplicar o Teorema 1:

i) A dissipativo: Se $U \in D(A)$, então $(AU, U)_H \leq 0$.

De fato,

$$
\begin{aligned}
(AU,U)_H &= \left(\begin{pmatrix} v \\ \triangle u - \sigma(x,y)v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_H \\
&= \int_0^a \int_0^b [\nabla v \cdot \nabla u + (\triangle u - \sigma(x,y)v)v]\, dxdy \\
&= \int_0^a \int_0^b \nabla v \cdot \nabla u\, dxdy + \int_0^a \int_0^b (\triangle u) v\, dxdy - \int_0^a \int_0^b \sigma(x,y)|v|^2 dxdy \\
&= -\int_0^a \int_0^b v \triangle u\, dxdy + \int_0^a \int_0^b (\triangle u) v\, dxdy - \int_0^a \int_0^b \sigma(x,y)|v|^2 dxdy \\
&= -\int_0^a \int_0^b \sigma(x,y)|v|^2 dxdy \leq 0,
\end{aligned}
$$

sendo $U \in D(A)$. Como $(AU,U)_H = -\int_0^a \int_0^b \sigma(x,y)|v|^2 dxdy \leq 0$, então A é dissipativo.

ii) $0 \in \rho(A)$: Prova-se que, dado $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$, existe um único $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ tal que $AU = F$.

Seja $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in H$. A equação $AU = F$, em termos de seus componentes, é dada por:

$$
\begin{cases} v = f \in H_0^1(\Omega) \\ \triangle u - \sigma(x,y)v = g \in L^2(\Omega) \end{cases}
$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$
\triangle u = g + \sigma(x,y) f \in L^2(\Omega), \tag{8}
$$

pois $a \in L^\infty(\Omega)$. É possível mostrar que (8) admite uma única solução $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Para isto, primeiramente, define-se uma forma bilinear:

$$
\begin{array}{rccl}
B(\cdot,\cdot): & H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& (u,v) & \longmapsto & B(u,v) = (\nabla u, \nabla v),
\end{array}
$$

sendo $(\cdot,\cdot)$ o produto interno em $L^2(\Omega)$. É possível verificar que $B(\cdot,\cdot)$ é coerciva e contínua:

i) Coercividade de $B(\cdot,\cdot)$: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$B(u,u) = (\nabla u, \nabla u) = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)} = ||u||^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Portanto, $B(\cdot,\cdot)$ é coerciva.

ii) Continuidade de $B(\cdot,\cdot)$: Sejam u e $v \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$|B(u,v)| = |(\nabla u, \nabla v)| \leq ||\nabla u||_{L^2(\Omega)} ||\nabla v||_{L^2(\Omega)} = ||u||_{H_0^1(\Omega)} ||v||_{H_0^1(\Omega)}.$$

Portanto, $B(\cdot,\cdot)$ é contínua.

Na sequência, defini-se o funcional:

$$\begin{array}{rccl} L: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & L(v) = (-g - \sigma(\cdot,\cdot)f, v) \end{array}$$

É possível mostrar que o funcional L é linear e contínuo sobre $H_0^1(\Omega)$:

(i) A linearidade de L segue diretamente da linearidade do produto interno;

(ii) Continuidade de L: Seja $v \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Como

$$-g - \sigma(\cdot,\cdot)f \in L^2(\Omega),$$

então pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$|L(v)| = |(-g - \sigma(x,y)f, v)| \leq ||-g - \sigma(\cdot,\cdot)f||_{L^2(\Omega)} ||v||_{L^2(\Omega)}.$$

Logo, L é contínuo.

Portanto, $L \in H^{-1}(\Omega)$.

Pelo Teorema de Lax-Milgram, que pode ser encontrado em Brezis [13], existe uma única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u,v) = (-g - \sigma(\cdot,\cdot)f, v),$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Isto é,

$$(\nabla u, \nabla v) = (-g - \sigma(\cdot,\cdot)f, v), \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, tem-se

$$(\nabla u, \nabla \phi) = (-g - \sigma(\cdot,\cdot)f, \phi), \text{ para toda } \phi \in D(\Omega),$$

sendo $D(\Omega)$ o espaço das funções $C_0^\infty(\Omega)$. Assim,

$$\triangle u = g + \sigma(\cdot,\cdot)f$$

no sentido distribucional.

Como $g + \sigma(\cdot,\cdot)f \in L^2(\Omega)$, pelo Teorema da Regularidade Elíptica que pode ser encontrado em Agmon, Douglis e Nirenberg [14], resulta que $u \in H^2(\Omega)$.

Logo, $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Portanto, obteve-se um único $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$, tal que, $AU = F$. Assim, existe o operador A^{-1}. Além disso, usando a Desigualdade de Poincaré que pode ser encontrada em Medeiros e Miranda [15], tem-se:

$$\begin{aligned}
||U||_H^2 &= ||u||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||v||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq ||u||^2_{H^2(\Omega)} + ||f||^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c_1||af + g||^2_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq c_3||f||^2_{H_0^1(\Omega)} + c_4||g||^2_{L^2(\Omega)} + ||f||^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq c_5\left(||f||^2_{H_0^1(\Omega)} + ||g||^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&= c_5||F||_H^2
\end{aligned}$$

sendo c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 constantes positivas. Assim, o operador A^{-1} é limitado.

Portanto, $0 \in \rho(A)$.

Logo, pelo Teorema 1, segue que A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0.

Teorema 6: *(Existência e unicidade de solução) Seja* $u_0 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ *e* $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, *então existe uma única solução de (1) na classe*

$$u \in C([0,\infty), H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty), L^2(\Omega)).$$

Demonstração:

Considerando $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A)$, como A é gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, de classe C_0, pela teoria de semigrupos que pode ser encontrada em Gomes [16], Cunha [10] e Pazy [11], é possível concluir que $U(t) = S(t)U_0$ é a única solução clássica do problema de valor inicial (3).

Assim,

$$U \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); H). \tag{9}$$

Como $v = u_t$, resulta que:

$$U \in C([0,\infty), H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&u \in C([0,\infty), H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega));\\
&u_t \in C([0,\infty), H_0^1(\Omega)), \ \text{ ou seja },\ u \in C^1([0,\infty), H_0^1(\Omega));\\
&u \in C^1([0,\infty); H_0^1(\Omega));\\
&u_t \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega)), \ \text{ ou seja },\ u \in C^2([0,\infty); L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Portanto, para $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ existe uma única solução de (1) que satisfaz:

$$u \in C([0,\infty), H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty), H_0^1(\Omega)) \cap C^2([0,\infty), L^2(\Omega)).$$

3.2 Estabilidade exponencial

Nesta seção, usa-se o Teorema de Gearhart para mostrar que a solução do problema (1) é exponencialmente estável.

Teorema 7: *O semigrupo de contrações de classe C_0, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, gerado por A é exponencialmente estável, isto é, existem constantes positiva M e α tal que*

$$||S(t)|| \leq Me^{-\alpha t}, \text{ para todo } t > 0.$$

Demonstração:

Para provar a estabilidade exponencial de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, verificam-se as condições (5) e (6) do Teorema de Gearhart.

Primeiramente, foi provado, por contradição, que $\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$. Para isso, considerou-se que

$$\rho(A) \supseteq \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\}$$

é falso. Então, existe $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ tal que $i\beta \in \sigma(A)$, ou seja, $i\beta$ pertencente ao espectro de A. Como a inversa de A, A^{-1}, é definida e contínua em todo H com valores em $D(A)$, isto é,

$$A^{-1} : H \to D(A),$$

a imersão i_A

$$i_A : D(A) \to H$$

é compacta. Assim, a aplicação

$$A^{-1} = A^{-1} \circ i_A : H \to H$$

é compacta. Logo, pelo Teorema 4, $i\beta$ é um autovalor de A.

De fato, considerando $\lambda = i\beta$, têm-se as seguintes equações:

$$(1)\ A^{-1}x - \frac{1}{\lambda}x = y \Leftrightarrow x - \frac{1}{\lambda}Ax = Ay \Leftrightarrow \lambda x - Ax = \lambda Ay;$$
$$(2)\ A^{-1}x - \frac{1}{\lambda}x = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{\lambda}Ax = 0 \Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0.$$

Supondo que a equação:

$$\left(A^{-1}-\frac{1}{\lambda}\right)x=0$$

admite apenas a solução trivial, então

$$\lambda x-Ax=0$$

admite apenas a solução trivial. Assim, pelo Teorema 4, a equação:

$$A^{-1}x-\frac{1}{\lambda}x=y$$

possui uma solução x para cada $y\in H$ e, o operador $A^{-1}-\dfrac{1}{\lambda}$ tem inversa limitada, ou seja, $\lambda I-A$ tem inversa limitada. Logo, $\lambda\in\rho(A)$, o que é uma contradição. Portanto, a equação:

$$\left(A^{-1}-\frac{1}{\lambda}\right)x=0$$

não possui apenas a solução trivial e, dessa forma, λ é um autovalor de A. Assim, existe um vetor $U\in D(A)$, com $||U||_H=1$, tal que

$$i\beta U-AU=0, \tag{10}$$

isto é,

$$i\beta u-v=0 \tag{11}$$

$$i\beta v-\triangle u+\sigma(x,y)v=0. \tag{12}$$

O cálculo do produto interno de (10), com U em H, resulta em:

$$0=(i\beta U-AU,U)_H=\left(\left(\begin{array}{c} i\beta u-v \\ i\beta v-\triangle u+\sigma(x,y)v \end{array}\right),\left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array}\right)\right)_H$$
$$=(i\beta u-v,u)_{H_0^1(\Omega)}+(i\beta v-\triangle u+\sigma(x,y)v,v)_{L^2(\Omega)}$$
$$=i(\beta u,u)_{H_0^1(\Omega)}-(v,u)_{H_0^1(\Omega)}+i(\beta v,v)_{L^2(\Omega)}+(\sigma(x,y)v-$$
$$(\triangle u,v)_{L^2(\Omega)}$$

Considerando a parte real e usando as condições de contorno, segue que

$$0=Re(i\beta U-AU,U)_H=(\sigma(x,y)v-\triangle u,v)_{L^2(\Omega)}-(v,u)_{H_0^1(\Omega)}$$
$$=\int_0^b\int_0^a(\sigma(x,y)v-\triangle u)v\,dxdy-\int_0^b\int_0^a\nabla v\nabla u\,dxdy$$
$$=\int_0^b\int_0^a\sigma(x,y)|v|^2dxdy-\int_0^b\int_0^a(\triangle u)v\,dxdy-$$
$$\int_0^b\int_0^a\nabla v\nabla u\,dxdy$$
$$=\int_0^b\int_0^a\sigma(x,y)|v|^2dxdy-\int_0^b\int_0^a(\triangle u)v\,dxdy+$$
$$\int_0^b\int_0^a v\triangle u\,dxdy$$
$$=\int_0^b\int_0^a\sigma(x,y)|v|^2dxdy.$$

Como

$$||av||^2_{L^2(\Omega)}=\int_0^b\int_0^a|\sigma(x,y)v|^2dxdy\le||a||_{L^\infty(\Omega)}\int_0^b\int_0^a\sigma(x,y)|v|^2dxdy=0,$$

então

$$\sigma(x,y)v(x,y)=0,\ \text{para todo } (x,y)\in\Omega. \qquad (13)$$

Substituindo (11) e (13) em (12), obtém-se:

$$-\beta^2u-\triangle u=0,$$

em Ω. Como $u(x,y,t)=0$ sobre $\partial\Omega\times(0,\infty)$, a solução da equação acima é dada por:

$$u(x,y)=k sen\left(\frac{m\pi}{a}x\right)sen\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \text{ com } \beta^2=\frac{m^2}{a^2}\pi^2+\frac{n^2}{b^2}\pi^2, \tag{14}$$

sendo $k\neq 0$ e $m,n\geq 1$.

Substituindo (14) na equação (13), chega-se a:

$$0=\beta k\sigma(x,y)sen\left(\frac{m\pi}{a}x\right)sen\left(\frac{m\pi}{b}y\right),$$

para todo $(x,y)\in\Omega$. Assim, obtém-se:

$$\sigma(x,y)=0,$$

exceto sobre um conjunto enumerável de pontos, o que é uma contradição, pois

$$\int_0^b\int_0^a\sigma(x,y)dxdy>0.$$

Portanto, pode-se afirmar que $\rho(A)\supseteq\{i\beta;\beta\in\mathbb{R}\}$.

Para a segunda parte da demonstração, considerou-se que

$$\limsup_{|\beta|\to\infty}||(i\beta I-A)^{-1}||=\infty.$$

Então, existe uma sequência de números reais $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $|\beta_n|\to\infty$ quando $n\to\infty$ e uma sequência vetorial de funções $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em H tal que

$$\frac{||(i\beta_n-A)^{-1}V_n||}{||V_n||}\geq n, \text{ para todo } n\in\mathbb{N},$$

ou seja,

$$||(i\beta_n-A)^{-1}V_n||\geq n||V_n||, \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Uma vez que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}\in H$ e que $i\beta_n\in\rho(A)$, existe uma única sequência

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$ tal que

$$i\beta_n U_n - AU_n = V_n, \text{ com } \|U_n\| = 1.$$

Assim,

$$\|U_n\| \geq n\|i\beta_n U_n - AU_n\|, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Isso implica que

$$\|(i\beta_n I - A)U_n\|_H \to 0,$$

quando $n \to \infty$, ou seja, sendo $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$:

$$f_n = i\beta_n u_n - v_n \to 0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \tag{15}$$

$$g_n = i\beta_n v_n - \triangle u_n + \sigma(x,y)v_n \to 0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{16}$$

Fazendo o produto interno de $i\beta_n U_n - AU_n$ com U_n em H, tem-se:

$$\begin{aligned}(i\beta_n U_n - AU_n, U_n)_H &= \left(\begin{pmatrix} i\beta_n u_n - v_n \\ i\beta_n v_n - \triangle u_n + \sigma(x,y)v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \right)_H \\ &= (i\beta_n u_n - v_n, u_n)_{H_0^1(\Omega)} + (i\beta_n v_n - \triangle u_n + \\ &\sigma(x,y)v_n, v_n)_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Considerando a parte real e usando as condições de contorno, obtém-se:

$$\begin{aligned}Re(i\beta_n U_n - AU_n, U_n)_H &= (\sigma(x,y)v_n - \triangle u_n, v_n)_{L^2(\Omega)} - (v_n, u_n)_{H_0^1(\Omega)} \\ &= (\sigma(x,y)v_n, v_n)_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Como $i\beta_n U_n - AU_n \to 0$ em H e U_n é limitada em H, segue que:

$$(\sigma(x,y)v_n, v_n) \to 0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{17}$$

Considerando a seguinte desigualdade:

$$||\sigma v_n||^2_{L^2(\Omega)} = \int_0^b \int_0^a |\sigma v_n|^2 dxdy \leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_0^b \int_0^a \sigma |v_n|^2 dxdy$$

e utilizando (17), chega-se a:

$$\sigma v_n \to 0 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{18}$$

Substituindo $v_n = i\beta_n u_n - f_n$ em $g_n = i\beta_n v_n - \triangle u_n + \sigma(x,y)v_n$, obtém-se:

$$-\beta_n^2 u_n - \triangle u_n = g_n + i\beta_n f_n - \sigma(x,y)v_n. \tag{19}$$

Considerando uma função $q : \Omega \to \mathbb{R}^2$ tal que $q \in C^1(\Omega)$ e fazendo o produto interno em $L^2(\Omega)$ de (19) com $q(x,y)\cdot\nabla u_n$, conclui-se que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^b \int_0^a div(q)(\beta_n^2|u_n|^2 + |\nabla u_n|^2)dxdy + \int_{\partial\Omega} q\cdot\eta |\nabla u_n|^2 d\Gamma + \\
&2\int_0^b \int_0^a \sum_{i,j=1}^{2} (D_j q_i)(D_i u_n)(D_j u_n)dxdy = 2(g_n, q\cdot\nabla u_n) - 2(\sigma v_n, q\cdot\nabla u_n) - \\
&2(i\beta_n div(f_n q), u_n) = 2(g_n, q\cdot\nabla u_n) - 2(\sigma v_n, q\cdot\nabla u_n) - 2(i\beta_n f_n div(q), u_n) - \\
&2(i\beta_n(\nabla f_n)q, u_n),
\end{aligned} \tag{20}$$

sendo $div(q)$ e $div(f_n q)$ o divergente de q e $f_n q$, respectivamente, e $\eta = \eta(x,y)$ a variável exterior unitária em $(x,y) \in \partial\Omega$.

Como $\beta_n u_n$ é uniformemente limitada em $L^2(\Omega)$, usando (15), (16), (18) e (20), chega-se a:

$$2(g_n, q\cdot\nabla u_n) - 2(\sigma v_n, q\cdot\nabla u_n) - 2(i\beta_n f_n div(q), u_n) - 2(i\beta_n(\nabla f_n)\cdot q, u_n) \to 0,$$

ou seja,

$$\int_0^b\int_0^a div(q)(\beta_n^2|u_n|^2+|\nabla u_n|^2)dxdy+\int_{\partial\Omega} q\cdot\eta|\nabla u_n|^2 d\Gamma+$$
$$2\int_0^b\int_0^a\sum_{i,j=1}^{2}(D_jq_i)(D_iu_n)(D_ju_n)dxdy\to 0.$$

Considerando $q(x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, tem-se:

$$2\int_0^b\int_0^a(\beta_n^2|u_n|^2+|\nabla u_n|^2)dxdy+\int_{\partial\Omega} q\cdot\eta|\nabla u_n|^2 d\Gamma+2\int_0^b\int_0^a u_{nx}^2+u_{ny}^2 dxdy\to 0,$$

o que é uma contradição, pois

$$\int_{\partial\Omega} q(x,y)\cdot\eta|\nabla u_n|^2 d\Gamma\geq 0,\ 2\int_0^b\int_0^a\left(u_{nx}^2+u_{ny}^2\right)dxdy\geq 0$$

e

$$2=\lim_{n\to\infty}2\int_0^b\int_0^a\left(|\nabla u_n|^2+|v_n|^2+\right)dxdy=\lim_{n\to\infty}2\int_0^b\int_0^a\left(\beta_n^2|u_n|^2+|\nabla u_n|^2\right)dxdy,$$

uma vez que, $\beta_n u_n - v_n\to 0$ em $L^2(\Omega)$.

Assim, $\limsup\limits_{|\beta|\to\infty}||(i\beta I-A)^{-1}||<\infty$.

Logo, pelo Teorema de Gearhart, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é exponencialmente estável.

4 Conclusão

O método de semigrupos se mostrou efetivo tanto para mostrar a boa colocação do problema (1) quanto o decaimento exponencial. O resultado para nosso problema já foi mostrado nos trabalhos de diversos autores, mas nesses trabalhos foram utilizados métodos de energia. Neste trabalho, foi mostrado a existência, unicidade e o comportamento assintótico para o problema (1) através da teoria de semigrupos. Além disso, foi obtido, mais facilmente, a regularidade da nossa solução, o que mostra o poder do método, já que na técnica de Galerking precisa-se obter certas estimativas de energia. Esse método não se restringe apenas aos problemas de evolução, ou seja, problemas que envolvem equações tipo onda, mas se aplica também a qualquer equação semilinear autônoma (ver Rivera [17]).

Referências

[1] KOMORNIK, V.; ZUAZUA, E. A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. *J Math Pures Appl*, vol. 69, n. 1, p. 33-54, 1990.

[2] NAKAO, M. On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations. *Math Z*, vol. 193, n. 2, p. 227-234, 1986.

[3] RIVERA, J. E. M. Energy decay rates in linear thermoelasticity. *Funkc Ekvacioj-Ser I*, vol. 35, p. 19-30, 1992.

[4] LIU, Z.; ZHENG, S. Semigroups associated with dissipative systems. Chapman & Hall/CRC. London, 1999.

[5] ZUAZUA, E.; HARAUX, A. Decay wstimates for some aemilinear samping hyperbolic problems. *Arch Ration Mech An*, vol. 100, n. 2, p. 191-206, 1988.

[6] ZUAZUA, E. Exponencial decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping. *Commun Part Diff Eq*, vol. 15, n. 2, p. 205-235, 1990.

[7] AMMAR-KHODJA F.; BENABDALLAH, A.; RIVERA, J. E. M.; RACKE R. Energy decay for Timoshenko systems of memory type. *J Differ Equations*, vo. 194, n. 1, p. 82-115, 2003.

[8] NAKAO, M. Decay and global existence for nonlinear wave equations with localized sissipations in general exterior domains. *New Trends in the Theory of Hyperbolic Equations*, *Oper. Theory Advances Applications, Birkhauser*, vol. 159, p. 213-299, 2005.

[9] IKEHATA, R. Local energy decay for linear wave equation with localized dissipation. *Funkc Ekvacioj-Ser I*, vol. 48, n. 3, p. 351-366, 2005.

[10] CUNHA. C. R. Semigrupos aplicados a sistemas dissipativos em EDP. *Notas em Matemática Aplicada*, vol. 32, SBMAC. São Carlos, 2007.

[11] PAZY, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag. New York, 1983.

[12] KREYSZIG, E. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons. New York, 1989.

[13] BREZIS, H. Analyse Fonctionnelle: Theórie et Applications. Dunod. Paris, 2005.

[14] AGMON, S.; DOUGLIS, H.; NIRENBERG, L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II. *Commun Pure Appl Math*, vol. 17, n. 1, p. 35-92, 1964.

[15] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. Espaços de Sobolev: Iniciação aos problemas elíticos não homogêneos e aplicações às equações diferenciais parciais. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.

[16] GOMES, A. M. Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1985.

[17] RIVERA, J. E. M. Semigrupos e equações diferenciais parciais. LNCC. Petrópolis, 2007.