Esquema de Diferenças Finitas de Alta Ordem para Resolver a Equação de Reação Subdifusão Bidimensional

Finite Difference Scheme of High Order for Solving the Two-dimensional Subdiffusion-reaction Equation

Aurelio José Parreira
Universidade Norte do Paraná - UNOPAR, Arapongas, PR
profaurelioparreira@gmail.com

Marcelle Flavia Carvalho
Universidade Estadual de Londrina - UEL, Londrina, PR
marcelle.flavia@hotmail.com

Rolfgan Canavez Raposo
Universidade Estadual de Londrina - UEL, Londrina, PR
despachantecanavez@hotmail.com

Resumo: As derivadas fracionárias tem sido amplamente utilizadas em vários campos da ciência e da engenharia pois tem se mostrado ser uma ferramenta valiosa para modelar muitos fenômenos físicos. Existe rica literatura sobre a pesquisa teórica das equações diferenciais fracionárias. Além dos métodos analíticos, os métodos numéricos também receberam atenção dos pesquisadores, e um grande número de métodos numéricos para resolver as equações diferenciais fracionárias unidimensionais foram desenvolvidos nos últimos anos. No entanto, em comparação com os problemas unidimensionais, há pouco trabalho de investigação sobre os métodos numéricos para resolver as equações fracionárias bidimensionais. Assim, métodos numéricos eficazes para resolver problemas bidimensionais estão em sua fase inicial. Neste trabalho apresentamos um método numérico para resolver uma equação de reação subdifusão fracionária não linear bidimensional.

Palavras-Chave: esquemas numéricos de alta ordem; método numérico compacto; equações diferenciais fracionárias.

Abstract: The fractional derivatives have been widely used in various fields of science and engineering as it has been shown to be a valuable tool to model many physical phenomena. There is rich literature on the theoretical research of fractional differential equations. In addition to the analytical methods, numerical methods also receive attention from researchers, and a large number of numerical methods to solve the fractional-dimensional differential equations have been developed in recent years. However, compared with the one-dimensional problems, there is only a little research on numerical methods for solving two-dimensional fractional equations. Thus, effective numerical methods for solving two-dimensional problems are still in their early stages. We present a numerical method to solve two-dimensional nonlinear fractional subdiffusion-reaction equation.

Keywords: numerical schemes of high order; compact numerical method; fractional diffe-

Recebido em 27/03/2016 - Aceito em 07/02/2017

rential equations.

1 Introdução

O cálculo fracionário tem sido amplamente aplicado em vários campos da ciência e das engenharias e tem se mostrado ser uma ferramenta valiosa na modelagem de muitos fenômenos físicos. Encontramos rica literatura na pesquisa teórica de equações diferenciais fracionárias. Além dos métodos analíticos, métodos e técnicas numéricas também receberam a atenção dos estudiosos e um grande número de métodos para resolver equações diferenciais fracionárias unidimensionais tem surgido. No entanto, em comparação com os problemas unidimensionais, encontramos pouco trabalho de investigação de métodos numéricos para resolução de equações diferenciais fracionárias bidimensionais. Isso justifica a busca de métodos numéricos eficazes e técnicas para resolver os problemas bidimensionais, especialmente os métodos numéricos compactos de alta ordem.

Neste trabalho apresentamos um método numérico para a equação de reação subdifusão fracionária bidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\gamma}\left[K_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(u,x,y,t)\right] + g(u,x,y,t) \tag{1}$$

com as condições iniciais e de contorno

$$u(x,y,0) = \phi(x,y), \qquad 0 \le x, y \le L, \tag{2}$$

$$u(0,y,t) = \varphi_1(y,t), \qquad u(L,y,t) = \varphi_2(y,t), \qquad 0 \le y \le L, \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0,t) = \psi_1(x,t), \qquad u(x,L,t) = \psi_2(x,t), \qquad 0 \le x \le L, \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

em que $0 < \gamma < 1$, K_1, K_2 são constantes de difusão positivas, $\phi(x,y)$, $\varphi_1(y,t)$, $\varphi_2(y,t)$, $\psi_1(x,t)$, $\psi_2(x,t)$, são funções suficientemente suaves.

${}_0D_t^{1-\gamma}u(x,y,t)$ denota a derivada temporal fracionária de Riemann-Liouville de ordem $1-\gamma$ definida por Podlubny [1]

$${}_0D_t^{1-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{u(x,y,\xi)}{(t-\xi)^{1-\gamma}}d\xi, \qquad 0 < \gamma < 1, \tag{5}$$

onde $\Gamma(\gamma)$ denota a função Gama e ξ passa a ser uma variável de integração temporal.

Temos ainda

$${}_0D_t^{-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t \frac{u(x,y,\xi)}{(t-\xi)^{1-\gamma}}d\xi, \qquad \gamma > 0. \tag{6}$$

Adicionalmente assumiremos neste trabalho que $f(u,x,y,t)$ é uma função linear de u e o termo fonte $g(u,x,y,t)$ tem a derivada parcial de segunda ordem $\frac{\partial^2 g(u,x,y,t)}{\partial t^2}$ contínua e satisfaz a condição de Lipschitz com relação a u, isto é,

$$|g(u_1,x,y,t) - g(u_2,x,y,t)| \le L_g|u_1 - u_2|, \qquad \forall u_1, u_2, \tag{7}$$

onde L_g é a constante de Lipschitz.

Na Seção 2, um método compacto de alta ordem com precisão de segunda ordem temporal e quarta ordem espacial para a equação de reação subdifusão fracionária bidimensional não linear foi apresentado. E na seção 3 fazemos a análise da consistência, estabilidade e convergência do método.

2 Esquema Numérico Implícito de Diferença Finita Compacta

Neste trabalho, nós adotamos uma malha uniforme de pontos (x_n, y_m, t_k), com $x_n = nh_x$, $n = 0, 1, 2, ..., M_1$, $y_m = mh_y$, $m = 0, 1, 2, ..., M_2$ e $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, 2, ..., N$ onde M_1, M_2 e N são inteiros positivos, $h_x = \frac{L}{M_1}$, $h_y = \frac{L}{M_2}$ e $\tau = \frac{T}{N}$ são os passos espaciais e temporal, respectivamente. A solução analítica u nos pontos (x_n, y_m, t_k) da malha é denotada por $u^k_{n,m}$, e a solução pelo método numérico nos pontos (x_n, y_m, t_k) é denotada por $U^k_{n,m}$. É necessário também mencionar que, neste trabalho, C é uma constante positiva que pode ter diferentes valores em diferentes lugares.

Introduziremos as notações

$$\delta_x^2 U^k_{n,m} = U^k_{n-1,m} - 2U^k_{n,m} + U^k_{n+1,m}, \tag{8}$$

$$\delta_y^2 U^k_{n,m} = U^k_{n,m-1} - 2U^k_{n,m} + U^k_{n,m+1}, \tag{9}$$

para os operadores de diferença finita centrada espacial.

Introduziremos,como em [1],os operadores de diferença finita compacta

$$\frac{1}{h_x^2}\Big[\frac{\delta_x^2}{1+\frac{1}{12}\delta_x^2}\Big]U^k_{n,m} \qquad\qquad \frac{1}{h_y^2}\Big[\frac{\delta_y^2}{1+\frac{1}{12}\delta_y^2}\Big]U^k_{n,m}, \tag{10}$$

e o operador de diferença finita temporal para tras

$$\delta_t^- U^k_{n,m} = U^k_{n,m} - U^{k-1}_{n,m}. \tag{11}$$

Substituindo os operadores de diferença finita compacta, diferença fracionária de Grünwald-Letnikov e diferença finita temporal para trás na equação diferencial (1) obtemos o esquema numérico de Diferença Finita Compacta:

$$\frac{1}{\tau}\delta_t^- U^k_{n,m} \quad = \quad {}_0\delta_t^{1-\gamma}\Big(K_1\frac{1}{h_x^2}\Big[\frac{\delta_x^2}{1+\frac{1}{12}\delta_x^2}\Big]U^k_{n,m} + K_2\frac{1}{h_y^2}\Big[\frac{\delta_y^2}{1+\frac{1}{12}\delta_y^2}\Big]U^k_{n,m} + f^k_{n,m}\Big) + g^k_{n,m} \tag{12}$$

onde $U^k_{n,m}$ é solução pelo esquema numérico no nó (n, m, k).

Arranjando os termos de (12) temos

$$\begin{aligned}\delta_t^- U^k_{n,m} = {} & \left[\frac{K_1\tau}{h_x^2}\Big[1+\frac{1}{12}\delta_x^2\Big]^{-1}({}_0\delta_t^{1-\gamma})\delta_x^2 U^k_{n,m}\right] + \left[\frac{K_2\tau}{h_y^2}\Big[1+\frac{1}{12}\delta_y^2\Big]^{-1}({}_0\delta_t^{1-\gamma})\delta_y^2 U^k_{n,m}\right] \\ & + \tau\ {}_0\delta_t^{1-\gamma} f^k_{n,m} + \tau g^k_{n,m} \quad .\end{aligned} \tag{13}$$

Denotando $\mu_1 = K_1 \frac{\tau}{h_x^2}$ e $\mu_2 = K_2 \frac{\tau}{h_y^2}$ encontramos

$$\left[1 + \frac{1}{12}\delta_x^2 + \frac{1}{12}\delta_y^2 + \frac{1}{144}\delta_x^2\delta_y^2\right]\left(U_{n,m}^k - U_{n,m}^{k-1}\right) =$$
$$\mu_1\left[1 + \frac{1}{12}\delta_y^2\right]\delta_x^2 {}_0\delta_t^{1-\gamma}U_{n,m}^k + \mu_2\left[1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right]\delta_y^2 {}_0\delta_t^{1-\gamma}U_{n,m}^k +$$
$$\left[1 + \frac{1}{12}\delta_x^2 + \frac{1}{12}\delta_y^2 + \frac{1}{144}\delta_x^2\right]\left(\tau\ {}_0\delta_t^{1-\gamma}f_{n,m}^k + \tau g_{n,m}^k\right) \quad .$$

De acordo com [1] a derivada temporal fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha = 1-\gamma > 0$ é equivalente a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov também de ordem α. Como em [2] o operador fracionário de Grünwald-Letnikov será definido por

$${}_0\delta_t^{1-\gamma}U_{n,m}^k = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau^\alpha}\sum_{j=0}^{n}\omega_j^{1-\gamma}U_{n,m}^{k-j} = \frac{1}{\tau^\alpha}\left[U_{n,m}^k + \sum_{j=1}^{k}\omega_j^\alpha U_{n,m}^{k-j}\right], \tag{14}$$

onde os coeficientes ω_j^α são obtidos de forma recursiva através da seguinte fórmula:

$$\omega_0^\alpha = 1, \quad \omega_j^\alpha = \left[1 - \frac{\alpha+1}{j}\right]\omega_{j-1}^\alpha, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{15}$$

Substituindo (14) encontramos:

$$\left[1 + \frac{1}{12}\delta_y^2 + \frac{1}{12}\delta_x^2 + \frac{1}{144}\delta_x^2\delta_y^2\right]\left(U_{n,m}^k - U_{n,m}^{k-1}\right) =$$
$$\frac{\mu_1}{\tau^\alpha}\left[1 + \frac{1}{12}\delta_y^2\right]\delta_x^2\left(U_{n,m}^k + \sum_{j=1}^{k}\omega_j^\alpha U_{n,m}^{k-j}\right) + \frac{\mu_2}{\tau^\alpha}\left[1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right]\delta_y^2\left(U_{n,m}^k + \sum_{j=1}^{k}\omega_j^\alpha U_{n,m}^{k-j}\right)$$
$$+\left[1 + \frac{1}{12}\delta_x^2 + \frac{1}{12}\delta_y^2 + \frac{1}{144}\delta_x^2\delta_y^2\right]\left(\tau^{1-\alpha}\left[f_{n,m}^k + \sum_{j=1}^{k}\omega_j^\alpha f_{n,m}^{k-j}\right] + \tau g_{n,m}^k\right),$$

ou seja,

$$(100\tau^{\alpha}+240\mu_1+240\mu_2)U^k_{n,m}+(10\tau^{\alpha}-120\mu_1+24\mu_2)U^k_{n-1,m}+$$
$$(10\tau^{\alpha}-120\mu_1+24\mu_2)U^k_{n+1,m}+(10\tau^{\alpha}+24\mu_1-120\mu_2)U^k_{n,m-1}+$$
$$(10\tau^{\alpha}+24\mu_1-120\mu_2)U^k_{n,m+1}+(\tau^{\alpha}-12\mu-1-12\mu_2)U^k_{n-1,m-1}+$$
$$(\tau^{\alpha}-12\mu_1-12\mu_2)U^k_{n+1,m-1}+(\tau^{\alpha}-12\mu_1-12\mu_2)U^k_{n-1,m+1}+$$
$$(\tau^{\alpha}-12\mu_1-12\mu_2)U^k_{n+1,m+1}=\tau^{\alpha}U^{k-1}_{n-1,m-1}+\tau^{\alpha}U^{k-1}_{n+1,m-1}+\tau^{\alpha}U^{k-1}_{n-1,m+1}+$$
$$\tau^{\alpha}U^{k-1}_{n+1,m+1}+100\tau^{\alpha}U^{k-1}_{n,m}+10\tau^{\alpha}U^{k-1}_{n-1,m}+10\tau^{\alpha}U^{k-1}_{n+1,m}+10\tau^{\alpha}U^{k-1}_{n,m-1}+$$
$$10\tau^{\alpha}U^{k-1}_{n,m+1}+\sum_{j=1}^{k}\omega_j^{\alpha}[(120\mu_1-24\mu_2)U^{k-j}_{n-1,m}+(-240\mu_1-240\mu_2)U^{k-j}_{n,m}+$$
$$(120\mu_1-24\mu_2)U^{k-j}_{n+1,m}+(12\mu_1+12\mu_2)U^{k-j}_{n-1,m-1}+(120\mu_2-24\mu_1)U^{k-j}_{n,m-1}]+$$
$$\sum_{j=1}^{k}\omega_j^{\alpha}[(12\mu_1+12\mu_2)U^{k-j}_{n+1,m-1}+(12\mu_1+12\mu_2)U^{k-j}_{n-1,m+1}+(120\mu_2-24\mu_1)U^{k-j}_{n,m+1}+$$
$$(12\mu_1+12\mu_2)U^{k-j}_{n+1,m+1}]+[144\tau+12\tau\delta_x^2+12\tau\delta_y^2+\tau\delta_x^2\delta_y^2]\left[\sum_{j=0}^{k}\omega_j^{\alpha}f^{k-j}_{n,m}\right]+$$
$$[144\tau^{\alpha+1}+12\tau^{\alpha+1}\delta_x^2+12\tau^{\alpha+1}\delta_y^2+\tau^{\alpha+1}\delta_x^2\delta_y^2]g^k_{n,m}$$

Note que o Esquema Numérico encontrado é implícito e pode ser escrito em termos matriciais:

$$A\mathbf{U}^k=B\mathbf{U}^{k-1}+C\sum_{j=1}^{k}\omega_j^{\alpha}\mathbf{U}^{k-j}+D\sum_{j=0}^{k}\omega_j^{\alpha}\mathbf{F}^{k-j}+E\mathbf{G}^k, \tag{16}$$

onde, $A=tridiag(a,b,a)$, $a=tridiag(\tau^{\alpha}-12\mu_1-12\mu_2,10\tau^{\alpha}-120\mu_1+24\mu_2,\tau^{\alpha}-12\mu_1-12\mu_2)$ e $b=tridiag(10\tau^{\alpha}+24\mu_1-120\mu_2,100\tau^{\alpha}+240\mu_1+240\mu_2,10\tau^{\alpha}+24\mu_1-120\mu_2)$.

Temos ainda que $B=tridiag(c,d,c)$,
onde, $c=tridiag(\tau^{\alpha},10\tau^{\alpha},\tau^{\alpha})$ e $d=tridiag(10\tau^{\alpha},100\tau^{\alpha},10\tau^{\alpha})$.

A matriz C é dada por $C=tridiag(h,i,h)$, onde, $h=tridiag(12\mu_1+12\mu_2,120\mu_1-24\mu-2,12\mu-1+12\mu-2)$ e $i=tridiag(120\mu_2-24\mu_1,-240\mu_1-240\mu_2,120\mu_2-24\mu_1)$.

A matriz D é dada por $D=\frac{1}{\tau^{\alpha-1}}B$. A matriz E é dada por $E=\tau^{\alpha}D$. E, por fim,

$$\mathbf{F}^{k-j}=\begin{bmatrix} f^{k-j}_{0,0} & f^{k-j}_{0,1} & \cdots & f^{k-j}_{0,m}\\ f^{k-j}_{1,0} & f^{k-j}_{1,1} & \cdots & f^{k-j}_{1,m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f^{k-j}_{n,0} & f^{k-j}_{n,1} & \cdots & f^{k-j}_{n,m}\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}^{k-j}=\begin{bmatrix} g^{k-j}_{0,0} & g^{k-j}_{0,1} & \cdots & g^{k-j}_{0,m}\\ g^{k-j}_{1,0} & g^{k-j}_{1,1} & \cdots & g^{k-j}_{1,m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g^{k-j}_{n,0} & g^{k-j}_{n,1} & \cdots & g^{k-j}_{n,m}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{U}^k=(U^k_{1,1},...,U^k_{1,M_2-1},U^k_{2,1},...,U^k_{2,M_2-1},...,U^k_{M_1-1,M_2-1})^T$ é o vetor incógnita.

O seguinte Teorema garante a existência e unicidade de solução para o esquema (16).

Teorema 2.1 *O Sistema Linear associado ao esquema (16) possui solução única.*

Demonstração. Note que a matriz A é estritamente diagonal dominante. Consequentemente ela é não singular e, portanto, invertível. Com isso o esquema numérico de diferença finita compacta(DFC) tem solução única. ∎

3 Consistência, Estabilidade e Convergência do Esquema Numérico

3.1 Consistência

Provaremos que nosso esquema é consistente com a equação diferencial fracionária, com ordem de precisão 4 para a variável espacial e ordem de precisão 1 para a variável temporal.

Lema 3.1 *Para cada* $n = 1, ..., N$, *seja* y^{n-j} *uma função limitada,* $0 < \gamma < 1$ *e* $\lambda_j = \omega_j^{1-\gamma}$. *Então,*

$$\left|\sum_{j=0}^{n} \lambda_j y^{n-j}\right| \leq C_n, \qquad C_n = c_n n^{\gamma-1}, \qquad c_n = \max_{j\in\{0,\ldots,n\}} |y^{n-j}| \tag{17}$$

Demonstração.

$$\left|\frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j y^{n-j}\right| \leq c_n \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^{n} |\lambda_j|, \qquad c_n = \max_{j\in\{0,\ldots,n\}} |y^{n-j}| \tag{18}$$

De (15) temos $\lambda_j < 0$ para todo $j = 1, ..., N$,

$$\left|\frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j y^{n-j}\right| \leq -c_n \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j, \qquad c_n = \max_{j\in\{0,\ldots,n\}} |y^{n-j}| \tag{19}$$

$$\left|\frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j y^{n-j}\right| \leq -c_n \left(\frac{2}{\tau^{1-\gamma}} - \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j\right), \qquad c_n = \max_{j\in\{0,\ldots,n\}} |y^{n-j}| \tag{20}$$

De (2) temos

$$\frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = \frac{t_n^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \mathcal{O}(\tau) = \frac{(n\tau)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \mathcal{O}(\tau).$$

Com isso,

$$\left|\tau^{\gamma-1} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j y^{n-j}\right| \leq -c_n \left(2\tau^{\gamma-1} - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} n^{\gamma-1} \tau^{\gamma-1} + c_0 \tau\right), \tag{21}$$

$$\left|\sum_{j=0}^{n} \lambda_j y^{n-j}\right| \leq -c_n \left(2 - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} n^{\gamma-1} + c_0 \tau^{2-\gamma}\right), \tag{22}$$

onde c_0 é uma constante. Logo,

$$\left|\sum_{j=0}^{n} \lambda_j y^{n-j}\right| \leq C_n, \tag{23}$$

e concluímos nossa prova. ∎

O erro de truncamento local de nosso esquema, em um nó (n, m, k) é dado por

$$R^k_{n,m}(h,\tau) = \frac{1}{\tau}\delta^-_t U^k_{n,m} -_0 \delta^{1-\gamma}_t\left(K_1\frac{1}{h^2_x}\left[\frac{\delta^2_x}{1+\frac{1}{12}\delta^2_x}\right]U^k_{n,m}\right)+$$
$$_0\delta^{1-\gamma}_t\left(K_2\frac{1}{h^2_y}\left[\frac{\delta^2_y}{1+\frac{1}{12}\delta^2_y}\right]U^k_{n,m}+f^k_{n,m}\right)-g^k_{n,m}. \tag{24}$$

Teorema 3.1 *O esquema numérico DFC (12) é consistente com a equação diferencial (1) e existe uma constante $C_{n,m,k} > 0$ tal que,*

$$|R^k_{n,m}| \leq C_{n,m,k}(n^{\gamma-1}\tau^{\gamma-1}+1)(h^4+\tau), \tag{25}$$

para todo $0 < \gamma < 1$ e h, τ suficientemente pequenos.

Demonstração.

$$\frac{1}{\tau}\delta^-_t U^k_{n,m} = (u_t)^k_{n,m} + \mathcal{O}(\tau), \tag{26}$$

$$\begin{aligned}{}_0\delta^{1-\gamma}_t\left(K_1\tfrac{1}{h^2_x}\left[\tfrac{\delta^2_x}{1+\frac{1}{12}\delta^2_x}\right]U^k_{n,m}\right) &= K_{1\,0}\delta^{1-\gamma}_t\left((u_{xx})^k_{n,m} - \tfrac{1}{240}h^4_x(u_{xxxxxx})^k_{n,m} + \mathcal{O}(h^6_x)\right)\\ &= K_1\left({}_0D^{1-\gamma}_t(u_{xx})^k_{n,m} - \tfrac{1}{240}h^4_x\tfrac{1}{\tau^{1-\gamma}}\textstyle\sum_{j=0}^k\lambda_j(u_{xxxxxx})^{k-j}_{n,m} + \mathcal{O}(\tau)\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0\delta^{1-\gamma}_t\left(K_2\tfrac{1}{h^2_y}\left[\tfrac{\delta^2_y}{1+\frac{1}{12}\delta^2_y}\right]U^k_{n,m}\right) &= K_{2\,0}\delta^{1-\gamma}_t\left((u_{yy})^k_{n,m} - \tfrac{1}{240}h^4_y(u_{yyyyyy})^k_{n,m} + \mathcal{O}(h^6_y)\right)\\ &= K_2\left({}_0D^{1-\gamma}_t(u_{yy})^k_{n,m} - \tfrac{1}{240}h^4_y\tfrac{1}{\tau^{1-\gamma}}\textstyle\sum_{j=0}^k\lambda_j(u_{yyyyyy})^{k-j}_{n,m} + \mathcal{O}(\tau)\right),\end{aligned}$$

$${}_0\delta^{1-\gamma}_t(f^k_{n,m}) = K({}_0D^{1-\gamma}_t f^k_{n,m} + \mathcal{O}(\tau)). \tag{27}$$

Substituindo (26)-(27) em (3.1)

$$\begin{aligned}R^k_{n,m} = (u_t)^k_{n,m} + \mathcal{O}(\tau) &- K_1\left({}_0D^{1-\gamma}_t(u_{xx})^k_{n,m} - \tfrac{1}{240}h^4_x\tfrac{1}{\tau^{1-\gamma}}\textstyle\sum_{j=0}^k\lambda_j(u_{xxxxxx})^{k-j}_{n,m} + \mathcal{O}(\tau)\right)\\ &-K_2\left({}_0D^{1-\gamma}_t(u_{yy})^k_{n,m} - \tfrac{1}{240}h^4_y\tfrac{1}{\tau^{1-\gamma}}\textstyle\sum_{j=0}^k\lambda_j(u_{yyyyyy})^{k-j}_{n,m} + \mathcal{O}(\tau)\right)\\ &-({}_0D^{1-\gamma}_t f^k_{n,m} + \mathcal{O}(\tau)) - g^k_{n,m}\end{aligned}$$

$$= \frac{K_1}{240}h^4_x\tau^{\gamma-1}\left(\sum_{j=0}^k\lambda_j(u_{xxxxxx})^{k-j}_{n,m}\right) + \frac{K_2}{240}h^4_y\tau^{\gamma-1}\left(\sum_{j=0}^k\lambda_j(u_{yyyyyy})^{k-j}_{n,m}\right) + \mathcal{O}(\tau) \tag{28}$$

Pelo Lema (3.1), o termo somatório é limitado e, os termos $h^4_x\tau^{\gamma-1} \to 0$ e $h^4_y\tau^{\gamma-1} \to 0$, se $h^4_x \to 0$ e $h^4_y \to 0$ mais rapidamente que $\tau^{\gamma-1}$. Assim, o erro de truncamento $R^k_{n,m} \to 0$ quando $h_x, h_y, \tau \to 0$. Para cada (n, m, k) fixo, a equação (28) e a constante C_n em (17), implicam

$$\begin{aligned}R^k_{n,m} &= \mathcal{O}(h^4_x\tau^{\gamma-1}n^{\gamma-1}+\tau) + \mathcal{O}(h^4_y\tau^{\gamma-1}n^{\gamma-1}+\tau)\\ &= \mathcal{O}((n^{\gamma-1}\tau^{\gamma-1}+1)((h^4_x+h^4_y)\tau)), \quad h_x, h_y, \tau \to 0\end{aligned} \tag{29}$$

Portanto, existe uma constante positiva $C_{n,m,k}$ tal que, $|R^k_{n,n}| \leq C_{n,m,k}(n^{\gamma-1}\tau^{\gamma-1}+1)(h^4_x + h^4_y + \tau)$ para todo $0 < \gamma < 1$ e h_x, h_y, τ suficientemente pequenos. ∎

3.2 Estabilidade e Convergência

O estudo da estabilidade do esquema numérico através da análise de Fourier segue da mesma forma que o caso unidimensional já demonstrado por Avila *et al.* [2]. Por fim, pelo Teorema de Lax podemos concluir que o método é convergente, pois já foi mostrado que ele é consistente e estável.

4 Conclusão

Aplicamos o Método de Diferenças Finitas Compactas à Equação de Reação Difusão Bidimensional e conseguimos demonstrar que o mesmo é um método incondicionalmente estável com alta ordem de convergência, isto é, converge com precisão de quarta ordem nas variáveis espaciais e primeira ordem na variável temporal. Com isso deixamos aberto o caminho para que se discuta o caso tridimensional e esperamos ter colaborado no avanço dos métodos para solução de Equaçoes Diferenciais Fracionárias.

Referências

[1] PODLUBNY, I. Fractional Differential Equations, ACADEMIC PRESSS, 1999.

[2] AVILA, J. A. J. ; Parreira, A. J. e AGUILAR, J. C. Z. About The Convergence of a Numerical Scheme Of High Order to Solve Fractional Reaction-Ssubdiffusion Equation, *International Journal of Applied Mathematics*, v.27, n.4, p.365–386, 2014, DOI: 10.12732/ijam.v27i4.5.

[3] BALEANU, D. ; DIEHTELM, K. ;SCALAS, E. e TRUJILLO, J. J. Fractional Calculus, WORLD SCIENTIFIC, 2012.

[4] BURRAGE, K. ; HALE, N. e KAY, D. An efficient implicit FEM scheme for fractional-in-space reactiondiffusion equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, v.34, n.4, p.A2145–A2172, 2012.

[5] CHEN, C. M. *et al.* Numerical approximation for a variable-order non-linear fractional reaction-subdiffusion equation, *Numerical Algorithms*, v.63, p.265–290, 2013.

[6] CUI, M. R. Compact finite difference method for the fractional diffusion equation, *Journal Comput. Phys.*, v. 228, n.20, p.7792–7804, 2009.

[7] CUI, M. R. Convergence analysis of high-order compact alternating direction implicit schemes for the two-dimensional time fractional diffusion equation. *Numer. Algorithms*, v.62, n.3, p.383–409, 2013.

[8] DENG, W. Numerical algorithm for the time fractional Fokker-Planck equation, *Journal Comput. Phys.*, v.227, n.2, p.1510–1522, 2007.

[9] DENG, W. e LI, C. Finite difference methods and their physical constraints for the fractional kleinkramers equation, *Numerical Methods Partial Differ. Equ.*, v.27, n.6, p.1561–1583, 2011.

[10] DIETHELM, K. e FORD, N. J. Analysis of fractional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, v.265, n.2, p.229–248, 2002.

[11] LI, C. P. ; ZHAO, Z. e CHEN, Y. Q. Numerical approximation of nonlinear fractional differential equations with subdiffusion and superdiffusion. *Comput. Math. Appl.*, v.62, n.3, p.855–875, 2011.

[12] MEERSCHAERT, M. M. ; SCHEFFLER, H.P. e TADJERAN, A. Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation, *Journal Comput. Phys.*, v.211, n.1, p.249–261, 2006.

[13] METZLER, R. e KLAFTER, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Phys. Rep.*, v. 339, n.1, p.1–77, 2000.

[14] TADJERAN, C. e MEERSCHAERT, M. M. A second-order accurate numerical method for the two-dimensional fractional diffusion equation, *Journal Comput. Phys.*, v.220, n.2, p.813–823, 2007.

[15] XU, H. ; LIAO, S. J. e YOU, X. C. Analysis of nonlinear fractional partial differential equations with the homotopy analysis method,]*Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, v.14, n.4, p.1152–1156, 2009.

[16] ZENG, F. ; LI, C. e LIU, F. High-order explicit-implicit numerical methods for nonlinear anomalous diffusion equations, *Eur. Phys. Journal*, v.222, n.8, p.1885–1900, 2013.

[17] ZHUANG, P. e LIU, F. Finite difference approximation for two-dimensional time fractional diffusion equation, *Journal Algorithms Comput. Technol.*, v.1, n.1, p.1–15, 2007.

[18] ZHUANG, P. ; LIU, F. ; ANH, V. e TURNER, I. Stability and convergence of an implicit numerical method for the non-linear fractional reaction-subdiffusion process, *IMA J. Appl. Math.*, v.74, n.5, p.645–667, 2009.