

Estabilidade de sólitons em fibras óticas dielétricas de tipo $\chi^{(2)}$

L. H. Yamai e W. Galléas

Departamento de Física, Universidade Estadual de Londrina
86051-990 Londrina, PR

P. L. Natti

Departamento de Matemática Universidade Estadual de Londrina
86051-990 Londrina, PR

E. R. Takano Natti

Pontifícia Universidade Católica do Paraná - Campus Londrina
86060-000 Londrina, PR

(Recebido: 10 de novembro de 2003)

Resumo: *Neste artigo, obtemos o sistema de equações diferenciais acopladas que descreve a propagação de ondas do tipo bright-bright e bright-dark sólitons em um guia dielétrico com não-linearidade quadrática. Estudamos as condições necessárias para a existência destas ondas no guia, em função das propriedades não-lineares da fibra ótica dielétrica. Enfim, obtemos e discutimos as equações de estabilidade destes sólitons.*

Palavras-chave: *guia dielétrico, sólitons, estabilidade*

Abstract: *In this work we obtain a coupled differential equations system, wich describe the propagation of bright-bright and bright-dark solitons wave packet in a quadratic nonlinear dielectric waveguide. We study the conditions for existence these solitons as function of the nonlinear properties of the dielectric optical fibers. Finally, we obtain the stability equations these solitons and discuss them.*

Key words: *dielectric waveguide, solitons, stability*

1 Introdução

Sólitons representam fenômenos que apresentam a característica de serem não-lineares, localizados, quase-estáticos e que interagem fortemente mantendo sua identidade. Uma grande variedade de fenômenos apresentam tais propriedades, em particular, fenômenos não-lineares em ótica. Do ponto de vista matemático, sólitons são soluções de equações (ou de um sistema de equações) diferenciais não-lineares integráveis. Tais equações (ou sistemas) são conservativos e conseqüentemente deriváveis de uma Hamiltoniana. O método do espalhamento inverso [1, 2] permite tal integração. A equação de Schrödinger não-linear (NLSE) pertence a esta classe de equações integráveis [3] e foi utilizada para descrever a propagação de sólitons em fibras de vidro especiais [4]. Experiências, conduzidas no ATT Bell Laboratories no início dos anos oitenta, confirmaram com extraordinária precisão as previsões feitas pela NLSE [5]. Devido à estabilidade de tais ondas, em meados dos anos oitenta, A. Hasegawa [6] propôs que sólitons pudessem ser utilizados em comunicações transoceânicas e, a partir de então, vários desenvolvimentos tecnológicos foram realizados em propagação de sólitons por grandes distâncias [5].

Atualmente, comunicações transoceânicas utilizam sinais do tipo linear no formato NRZ (*nonreturn to zero*) [5]. O estudo teórico das propriedades que uma fibra ótica dielétricas deve apresentar, de modo que a comunicação via sólitons seja mais estável e eficaz do que a comunicação via sinais lineares no formato NRZ, é um tema de grande importância tecnológica e econômica, e que na última década tem sido abordado com intensidade. Tais estudos, teóricos e experimentais, abordam temas relacionados com os processos de geração, propagação e estabilidade de sólitons em fibras dielétricas.

Em particular, neste trabalho, investigaremos a estabilidade de sólitons quando sujeitos a perturbações harmônicas. Este estudo será implementado por meio de técnicas conhecidas na literatura [7, 8], as quais têm como objetivo identificar e interpretar a possibilidade de geração de estados ligados, estados ressonantes ou estados oscilantes de sólitons, durante a propagação destas ondas em fibras óticas. Tecnologicamente, tais estados estão associados à perda de informação.

Tratando-se de comunicação ótica via sólitons, neste trabalho vamos estudar, dadas condições iniciais, a propagação de pacotes de ondas em guias dielétricos. Na seção 2, consideramos a propagação de um pacote de ondas, composto de duas ondas com frequências ω_0 (modo fundamental) e $2\omega_0$ (segundo harmônico), em um guia de onda retangular dielétrico com não-linearidade do tipo $\chi^{(2)}$. Supondo que a amplitude do pacote de ondas no meio dielétrico varie lentamente, podemos impor condições de contorno do tipo SVEA (*slowly varying envelope amplitude*), e a partir das equações de Maxwell, obter o sistema de equações diferenciais acopladas, que descreve a evolução temporal deste pacote de ondas no meio. Na seção 3, resolvemos o sistema de equações diferenciais acopladas, obtendo soluções do tipo *bright-bright* sóliton e do tipo *bright-dark* sóliton. Analisando as soluções obtidas, identificamos, em função das propriedades não-lineares da fibra ótica dielétrica, as condições necessárias para a existência (propagação) destes sólitons no guia. Na

seção 4, realizando perturbações nas soluções estacionárias do tipo sólitons, obtemos as equações de estabilidade deste sistema. Enfim, estudamos o caso particular de perturbações do tipo harmônicas.

2 Dinâmica longitudinal de campos acoplados em dielétricos tipo $\chi^{(2)}$

Primeiramente, vamos deduzir as equações diferenciais que descrevem a dinâmica da propagação de ondas eletromagnéticas, em particular do primeiro e segundo harmônico, em um guia de ondas retangular com não-linearidade quadrática. Assumiremos que a onda fundamental e o segundo harmônico propagam-se na direção do eixo z e são confinadas nas direções transversais. Também, consideraremos que, ao longo do guia de onda, a variação dos campos elétricos da onda fundamental $\varepsilon_1(x, y, z, t)$ e do segundo harmônico $\varepsilon_2(x, y, z, t)$ ocorrem em escalas de comprimentos grandes, quando comparadas com as dimensões transversais. Tal condição de contorno, chamada SVEA (*slowly varying envelope amplitude*), impõe que as soluções longitudinais de nosso sistema, sejam quase-estáticas quando comparadas com a evolução temporal das componentes transversais dos campos elétricos. Experimentalmente, a duração de um pulso de luz tende a ser de nanosegundos (10^{-9} seg) a picosegundos (10^{-12} seg), enquanto que o período de oscilação do campo é da ordem de 10^{-15} seg, de modo que mesmo os pulsos mais curtos contém muitos períodos. Logo, escreveremos a magnitude do campo elétrico, como uma onda viajante de oscilação rápida com um envelope variando lentamente. Implementando a condição de contorno citada acima, podemos desacoplar a evolução transversal da evolução longitudinal dos campos, ou seja,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(x, y, z, t) &= \Psi_1(x, y) E_1(z, t) \\ \varepsilon_2(x, y, z, t) &= \Psi_2(x, y) E_2(z, t)\end{aligned}\quad (1)$$

Na expressão acima, as funções $\Psi_1(x, y)$ e $\Psi_2(x, y)$ descrevem os campos elétricos transversais das ondas fundamental e segundo harmônico, respectivamente. Como estamos considerando que a seção transversal do guia de ondas é retangular, as formas funcionais de $\Psi_1(x, y)$ e $\Psi_2(x, y)$ são determinadas pelos modos normais do guia, os quais dependem da sua geometria [9]. Em particular estamos interessados apenas no estudo de $E_1(z, t)$ e $E_2(z, t)$ que descrevem a propagação longitudinal das ondas no guia. Consideramos as componentes longitudinais dos campos elétricos das ondas fundamental e segundo harmônico ondas planas, ou seja,

$$\begin{aligned}E_1(z, t) &= A_1(z, t) \exp[i k_1 z - i \omega_0 t] \\ E_2(z, t) &= A_2(z, t) \exp[i k_2 z - 2 i \omega_0 t]\end{aligned}\quad (2)$$

em que $A_1(z, t)$ e $A_2(z, t)$ são as amplitudes dos respectivos campos, ω_0 é a frequência da onda fundamental e, $k_1 = k_1(\omega_0)$ e $k_2 = k_2(2\omega_0)$ são as relações de dispersão

das duas ondas. Consistentemente com a condição de contorno SVEA, assume-se que a variação das amplitudes $A_1(z, t)$ e $A_2(z, t)$, com relação à coordenada z , é lenta quando comparada com a variação das exponenciais, que contêm as relações de dispersão $k_1(\omega_0)$ e $k_2(2\omega_0)$; e que suas variações, com relação à variável t , também são lentas quando comparadas com a variação da exponencial que contém a frequência ω_0 da onda fundamental. O campo elétrico longitudinal total no guia de ondas é dado por

$$\vec{E}(z, t) = E_1(z, t) : \hat{e}_1 + E_1^*(z, t) : \hat{e}_1^* + E_2(z, t) : \hat{e}_2 + E_2^*(z, t) : \hat{e}_2^* \quad (3)$$

em que \hat{e}_1 e \hat{e}_2 são as possíveis polarizações transversais dos modos fundamental e segundo harmônico, respectivamente.

Queremos estudar a propagação do campo elétrico dado na Eq. (3) em meios quadraticamente não-lineares. Em tais meios chamados dielétricos $\chi^{(2)}$, o vetor deslocamento elétrico $\vec{D}(z, t)$ contém contribuições lineares e quadráticas em $E(z, t)$, as quais no caso geral são não-locais no tempo, ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{D}(z, t) &= \vec{E}(z, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \chi^{(1)}(t-t') \cdot \vec{E}(z, t') \\ &+ 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' \chi^{(2)}(t-t', t-t'') : \vec{E}(z, t') \vec{E}(z, t'') \end{aligned} \quad (4)$$

Observa-se que o primeiro termo do lado direito em (4) é a contribuição do vácuo, pois no vácuo temos que $\vec{D}(z, t) = \vec{E}(z, t)$. O segundo termo do lado direito é a contribuição da polarização linear do meio para o vetor deslocamento elétrico, $\vec{D}(z, t) = \vec{E}(z, t) + 4\pi\vec{P}(z, t)$, em que a quantidade $\chi^{(1)}$ é um tensor de segunda ordem e o símbolo \cdot representa um produto tensorial (escalar), a qual somamos sobre um índice repetido, ou seja,

$$\sum_{j=1}^2 [\chi_{i,j}^{(1)}(t-t') E_j(z, t')]$$

em que o índice $j = 1, 2$ são as possíveis polarizações dadas em (3). O terceiro termo do lado direito é a contribuição não-linear do material, e a quantidade $\chi^{(2)}$ é um tensor de terceira ordem e o símbolo $:$ também representa um produto tensorial, que agora devemos somar sobre dois índices repetidos (para maiores detalhes sobre produto tensorial veja Ref. [10]),

$$\sum_{j,k=1}^2 [\chi_{i,j,k}^{(2)}(t-t', t-t'') E_j(z, t') E_k(z, t'')]$$

Em analogia às equações (2) e (3), escrevemos o vetor deslocamento elétrico longitudinal total $\vec{D}(z, t)$ na forma

$$\vec{D}(z, t) = D_1(z, t) : \hat{e}_1 + D_1^*(z, t) : \hat{e}_1^* + D_2(z, t) : \hat{e}_2 + D_2^*(z, t) : \hat{e}_2^* \quad (5)$$

em que $D_1(z, t)$ e $D_2(z, t)$ são dados por

$$D_1(z, t) = U_1(z, t) \exp[i k_1 z - i \omega_0 t] \quad (6)$$

$$D_2(z, t) = U_2(z, t) \exp[i k_2 z - 2 i \omega_0 t]$$

Poderíamos substituir o vetor deslocamento elétrico longitudinal total $\vec{D}(z, t)$ acima nas equações de Maxwell, e obter as equações dinâmicas para nosso sistema. Por outro lado, neste trabalho estamos especificamente interessados no estudo da evolução de sólitons em materiais dielétricos do tipo $\chi^{(2)}$. Com este objetivo, vamos impor algumas condições sobre as amplitudes de oscilação $U_1(z, t)$ e $U_2(z, t)$ das componentes do vetor deslocamento elétrico $\vec{D}(z, t)$, consistentes com as condições de contorno assumidas do tipo SVEA. Primeiramente, devemos obter a expressão funcional das amplitudes de oscilação. Substituindo a Eq. (2) na Eq. (3) e levando o resultado à Eq. (4), obtemos uma expressão para $\vec{D}(z, t)$ em termos das amplitudes $A_1(z, t)$ e $A_2(z, t)$. Igualando o resultado obtido, com a expressão dada para $\vec{D}(z, t)$ a partir das Eqs. (5) e (6), em termos das amplitudes $U_1(z, t)$ e $U_2(z, t)$, obtemos uma expansão em ondas planas de onde identificamos as componentes abaixo

$$\begin{aligned} U_1(z, t) &= A_1(z, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' [\hat{e}_1^* \cdot \chi^{(1)}(t-t') \cdot \hat{e}_1] \exp[i\omega_0(t-t')] A_1(z, t') \\ &+ 8\pi \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' [\hat{e}_1^* \cdot \chi^{(2)}(t-t', t-t'') : \hat{e}_1^* \hat{e}_2] \exp[2i\omega_0(t-t'') - i\omega_0(t-t')] \\ &\times [A_1^*(z, t') A_2(z, t'') \exp\{-i[2k_1(\omega_0) - k_2(2\omega_0)]z\}] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} U_2(z, t) &= A_2(z, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t dt' [\hat{e}_2^* \cdot \chi^{(1)}(t-t') \cdot \hat{e}_2] \exp[2i\omega_0(t-t')] A_2(z, t') \\ &+ 4\pi \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^t dt'' [\hat{e}_2^* \cdot \chi^{(2)}(t-t', t-t'') : \hat{e}_1 \hat{e}_1] \exp[i\omega_0(t-t'') + i\omega_0(t-t')] \\ &\times [A_1(z, t') A_1(z, t'') \exp\{i[2k_1(\omega_0) - k_2(2\omega_0)]z\}] \end{aligned}$$

Observa-se que podemos deslocar os limites superiores de integração presentes em (7) para $t = +\infty$, impondo que para $t' > t$ e $t'' > t$, temos que $\chi^{(1)}(t-t') = \chi^{(2)}(t-t', t-t'') = 0$, de forma que a integração neste intervalo é nula. Essas

condições supõem que somente o passado do sistema, de $-\infty$ ao presente t , contribui para a sua atual configuração, ou seja, é uma condição de causalidade, motivo pelo qual as integrais temporais em (7) são também chamadas de integrais de memória.

Para calcular as integrais na Eq. (7), com os limites superiores de integração alterados, definimos pela transformada de Fourier as seguintes quantidades.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\chi}_1^{(1)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\hat{e}_1^* \cdot \chi^{(1)}(t) \cdot \hat{e}_1] \exp(i\omega t) \\
 \tilde{\chi}_2^{(1)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt [\hat{e}_2^* \cdot \chi^{(1)}(t) \cdot \hat{e}_2] \exp(i\omega t) \\
 \tilde{\chi}_1^{(2)}(2\omega, -\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' [\hat{e}_1^* \cdot \chi^{(2)}(t, t') : \hat{e}_1^* \hat{e}_2] \exp(2i\omega t' - i\omega t) \\
 \tilde{\chi}_2^{(2)}(\omega, \omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' [\hat{e}_2^* \cdot \chi^{(2)}(t, t') : \hat{e}_1 \hat{e}_1] \exp(i\omega t' + i\omega t)
 \end{aligned} \tag{8}$$

com suas respectivas transformadas inversas dadas por

$$\begin{aligned}
 [\hat{e}_1^* \cdot \chi^{(1)}(t - t') \cdot \hat{e}_1] &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\chi}_1^{(1)}(\omega) \exp[-i\omega(t - t')] \\
 [\hat{e}_2^* \cdot \chi^{(1)}(t - t') \cdot \hat{e}_2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\chi}_2^{(1)}(\omega) \exp[-i\omega(t - t')] \\
 [\hat{e}_1^* \cdot \chi^{(2)}(t - t', t - t'') : \hat{e}_1^* \hat{e}_2] &= \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} d(-\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} d(2\omega) \tilde{\chi}_1^{(2)}(2\omega, -\omega) \exp[-2i\omega(t - t'') + i\omega(t - t')] \\
 [\hat{e}_2^* \cdot \chi^{(2)}(t - t', t - t'') : \hat{e}_1 \hat{e}_1] &= \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\chi}_2^{(2)}(\omega, \omega) \exp[-i\omega(t - t') - i\omega(t - t'')]
 \end{aligned} \tag{9}$$

Substituindo em (7) as quantidades definidas em (9), segue que

$$\begin{aligned}
U_1(z, t) &= A_1(z, t) + 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' d\omega \tilde{\chi}_1^{(1)}(\omega) \exp[-i(t-t')(\omega - \omega_0)] A_1(z, t') \\
&+ 8\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' dt'' d(-\omega) d(2\omega) \tilde{\chi}_1^{(2)}(2\omega, -\omega) \exp[i(t-t')(\omega - \omega_0)] \\
&\times \exp[-2i(t-t'')(\omega - \omega_0)] [A_1^*(z, t') A_2(z, t'') \exp\{-i[2k_1(\omega_0) - k_2(2\omega_0)]z\}]
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
U_2(z, t) &= A_2(z, t) + 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' d\omega \tilde{\chi}_2^{(1)}(\omega) \exp[-i(t-t')(\omega - 2\omega_0)] A_2(z, t') \\
&+ 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' dt'' d\omega d\omega \tilde{\chi}_2^{(2)}(\omega, \omega) \exp[-i(t-t')(\omega - \omega_0)] \\
&\times \exp[-i(t-t'')(\omega - \omega_0)] [A_1(z, t') A_1(z, t'') \exp\{i[2k_1(\omega_0) - k_2(2\omega_0)]z\}]
\end{aligned}$$

Neste ponto do desenvolvimento, impomos condições de contorno SVEA, as quais, como veremos, conduzem a soluções longitudinais quase-estáticas para nosso sistema. Para implementar as condições SVEA, expandimos em torno de $\omega = \omega_0$, até segunda ordem, as quantidades lineares $\tilde{\chi}_1^{(1)}(\omega)$ e $\tilde{\chi}_2^{(1)}(\omega)$, enquanto as quantidades quadráticas $\tilde{\chi}_1^{(2)}(\omega)$ e $\tilde{\chi}_2^{(2)}(\omega)$ são expandidas em ordem zero, ou seja,

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_1^{(1)}(\omega) &\cong \tilde{\chi}_1^{(1)}(\omega_0) + \left[\frac{\partial \tilde{\chi}_1^{(1)}}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\chi}_1^{(1)}}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \\
\tilde{\chi}_2^{(1)}(\omega) &\cong \tilde{\chi}_2^{(1)}(2\omega_0) + \left[\frac{\partial \tilde{\chi}_2^{(1)}}{\partial \omega} \right]_{\omega=2\omega_0} (\omega - 2\omega_0) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\chi}_2^{(1)}}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=2\omega_0} (\omega - 2\omega_0)^2
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\tilde{\chi}_1^{(2)}(2\omega, -\omega) \cong \tilde{\chi}_1^{(2)}(2\omega_0, -\omega_0)$$

$$\tilde{\chi}_2^{(2)}(\omega, \omega) \cong \tilde{\chi}_2^{(2)}(\omega_0, \omega_0)$$

Substituindo (11) em (10), identificamos as seguintes representações da distribuição delta de Dirac,

$$\begin{aligned}\delta(t' - t) &= \int_{+\infty}^{-\infty} d\omega \exp i(t' - t)(\omega - \omega_0) & \delta(t' - t) &= \int_{+\infty}^{-\infty} d(-\omega) \exp i(t' - t)(\omega_0 - \omega) \\ \delta(t'' - t) &= \int_{+\infty}^{-\infty} d(2\omega) \exp i(t'' - t)(2\omega - 2\omega_0) & & \\ \delta(t' - t) &= \int_{+\infty}^{-\infty} d\omega \exp i(t' - t)(\omega - 2\omega_0) & \delta(t'' - t) &= \int_{+\infty}^{-\infty} d\omega \exp i(t'' - t)(\omega - \omega_0)\end{aligned}\quad (12)$$

que simplificam as expressões para as amplitudes $U_1(z, t)$ e $U_2(z, t)$, que se reduzem às formas diferenciais,

$$\begin{aligned}U_1(z, t) &= \tilde{\epsilon}_1^{(1)} A_1(z, t) + i(\tilde{\epsilon}_1^{(1)})' \frac{\partial A_1(z, t)}{\partial t} - \frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}_1^{(1)})'' \frac{\partial^2 A_1(z, t)}{\partial t^2} \\ &\quad + 2\tilde{\epsilon}_1^{(2)} A_1^*(z, t) A_2(z, t) \exp(-i\Delta k z) \\ U_2(z, t) &= \tilde{\epsilon}_2^{(1)} A_2(z, t) + i(\tilde{\epsilon}_2^{(1)})' \frac{\partial A_2(z, t)}{\partial t} - \frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}_2^{(1)})'' \frac{\partial^2 A_2(z, t)}{\partial t^2} \\ &\quad + \tilde{\epsilon}_2^{(2)} A_1^2(z, t) \exp(i\Delta k z)\end{aligned}\quad (13)$$

e definimos as quantidades

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_1^{(1)} &= 1 + 4\pi\tilde{\chi}_1^{(1)}(\omega_0) & \tilde{\epsilon}_2^{(1)} &= 1 + 4\pi\tilde{\chi}_2^{(1)}(2\omega_0) \\ (\tilde{\epsilon}_1^{(1)})' &= 4\pi \left[\frac{\partial \tilde{\chi}_1^{(1)}}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} & (\tilde{\epsilon}_2^{(1)})' &= 4\pi \left[\frac{\partial \tilde{\chi}_2^{(1)}}{\partial \omega} \right]_{\omega=2\omega_0} \\ (\tilde{\epsilon}_1^{(1)})'' &= 4\pi \left[\frac{\partial^2 \tilde{\chi}_1^{(1)}}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=\omega_0} & (\tilde{\epsilon}_2^{(1)})'' &= 4\pi \left[\frac{\partial^2 \tilde{\chi}_2^{(1)}}{\partial \omega^2} \right]_{\omega=2\omega_0} \\ \tilde{\epsilon}_1^{(2)} &= 4\pi\tilde{\chi}_1^{(2)}(2\omega_0, -\omega_0) & \tilde{\epsilon}_2^{(2)} &= 4\pi\tilde{\chi}_2^{(2)}(\omega_0, \omega_0) \\ \Delta k &= 2k_1(\omega_0) - k_2(2\omega_0)\end{aligned}\quad (14)$$

A partir das expressões (13) obtidas para as amplitudes de oscilação $U_1(z, t)$ e $U_2(z, t)$, podemos retornar à Eq. (6) e obter as equações dinâmicas que descrevem a evolução de nosso sistema. Das equações de Maxwell,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

isolando primeiramente as contribuições devido à E_1 e D_1 , correspondente à polarização \hat{e}_1 , obtemos a equação diferencial:

$$\begin{aligned} & -k_1^2 A_1 + 2ik_1 \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} + \frac{\omega_0^2}{c^2} \tilde{\epsilon}_1^{(1)} A_1 + i \left[\frac{\omega_0^2}{c^2} (\tilde{\epsilon}_1^{(1)})' + \frac{2\omega_0}{c^2} \tilde{\epsilon}_1^{(1)} \right] \frac{\partial A_1}{\partial t} \\ & - \left[\frac{\omega_0^2}{2c^2} (\tilde{\epsilon}_1^{(1)})'' + \frac{2\omega_0}{c^2} (\tilde{\epsilon}_1^{(1)})' + \frac{1}{c^2} \tilde{\epsilon}_1^{(1)} \right] \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + \frac{2\omega_0^2}{c^2} \tilde{\epsilon}_1^{(2)} A_1^* A_2 \exp(-i\Delta kz) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

A utilização das condições SVEA corresponde a impor que:

$$\begin{aligned} |k_1^2 A_1| & \gg |k_1 \frac{\partial A_1}{\partial z}| \gg \left| \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \right| \\ |\omega_0^2 A_1| & \gg \left| \omega_0 \frac{\partial A_1}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} \right| \end{aligned}$$

de forma que podemos interpretar a equação (16) como uma expansão em ordem de derivadas. Agora deve ficar claro que a razão de termos expandindo as quantidades lineares $\tilde{\chi}_1^{(1)}(\omega)$ e $\tilde{\chi}_2^{(1)}(\omega)$, até segunda ordem, e as quantidades quadráticas $\tilde{\chi}_1^{(2)}(\omega)$ e $\tilde{\chi}_2^{(2)}(\omega)$, em ordem zero em (11), era com o objetivo de “guardar” todos os termos de até segunda ordem na Eq. (16). Resolvendo a Eq. (16) na ordem mais baixa de derivadas, segue que:

$$k_1^2(\omega_0) - \frac{\omega_0^2}{c^2} \tilde{\epsilon}_1^{(1)} = 0 \quad (17)$$

de onde fixamos a relação de dispersão:

$$k_1(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\epsilon}_1^{(1)}} \quad (18)$$

Na ordem seguinte, ou seja, considerando os termos com derivadas de primeira ordem, segue que:

$$i \frac{\partial A_1}{\partial z} + ik_1' \frac{\partial A_1}{\partial t} = 0 \quad (19)$$

em que $k'_1 = [\partial k_1 / \partial \omega]_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0^2}{2 c^2 k_1} (\tilde{\epsilon}_1^{(1)})' + \frac{\omega_0}{c^2 k_1} \tilde{\epsilon}_1^{(1)}$ é a velocidade de grupo da onda fundamental. Da equação (19), temos:

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} = (k'_1)^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} \quad (20)$$

Assim, substituindo (17) e (20) em (16), obtemos a equação diferencial:

$$i \frac{\partial A_1}{\partial z} + i k'_1 \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{k''_1}{2} \frac{\partial^2 A_1}{\partial t^2} + K_1 A_1^* A_2 \exp(-i \Delta k z) = 0 \quad (21)$$

em que $k''_1 = [\partial^2 k_1 / \partial \omega^2]_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0^2}{2 c^2 k_1} (\tilde{\epsilon}_1^{(1)})'' + \frac{2 \omega_0}{c^2 k_1} (\tilde{\epsilon}_1^{(1)})' + \frac{1}{c^2 k_1} \tilde{\epsilon}_1^{(1)}$ é a dispersão da velocidade de grupo (GVD) da onda fundamental e $K_1 = \frac{\omega_0^2}{k_1(\omega_0) c^2} \tilde{\epsilon}_1^{(2)}$.

De forma análoga, a partir de (13), isolando as contribuições de E_2 e D_2 na equação de Maxwell, obtemos a segunda equação diferencial que descreve a dinâmica de nosso sistema

$$i \frac{\partial A_2}{\partial z} + i k'_2 \frac{\partial A_2}{\partial t} - \frac{k''_2}{2} \frac{\partial^2 A_2}{\partial t^2} + K_2 A_1^2 \exp(i \Delta k z) = 0 \quad (22)$$

em que $k_2(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\epsilon}_2^{(1)}}$ é a relação de dispersão, $k'_2 = [\partial k_2 / \partial \omega]_{\omega=2\omega_0}$ é a velocidade de grupo, $k''_2 = [\partial^2 k_2 / \partial \omega^2]_{\omega=2\omega_0}$ é a dispersão da velocidade de grupo (GVD) e $K_2 = \frac{2 \omega_0^2}{k_2(2\omega_0) c^2} \tilde{\epsilon}_2^{(2)}$, todas quantidades referentes à onda segundo harmônico.

As equações (21) e (22) podem ainda ser reduzidas a sua forma normalizada fazendo as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{|k''_1|}{\tau^2} z & s &= \frac{t}{\tau} - \frac{k'_1}{\tau} z \\ \delta &= \frac{(k'_1 - k'_2) \tau}{|k''_1|} & \alpha &= \frac{k''_2}{|k''_1|} \\ \beta &= \frac{\Delta k \tau^2}{|k''_1|} & a_1 &= \frac{|K_1 K_2|^{\frac{1}{2}} \tau^2 A_1}{|k''_1|} \\ a_2 &= \frac{K_1 \tau^2 A_2}{|k''_1|} & r &= \text{sgn}(k''_1) \end{aligned} \quad (23)$$

em que $k''_1 \neq 0$ e τ é uma escala de tempo arbitrária, normalmente escolhida igual à duração sob a qual a amplitude do pacote de ondas varia. Também assumimos que

$\text{sgn}(K_1 K_2) = 1$ devido à simetria de Kleinman, a qual correlaciona as componentes do tensor $\chi^{(2)}$ [11]. Nestas novas variáveis, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial a_1}{\partial \xi} - \frac{r}{2} \frac{\partial^2 a_1}{\partial s^2} + a_1^* a_2 \exp(-i\beta\xi) &= 0 \\ i \frac{\partial a_2}{\partial \xi} - i\delta \frac{\partial a_2}{\partial s} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 a_2}{\partial s^2} + a_1^2 \exp(i\beta\xi) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

que descreve a evolução dos campos elétricos longitudinais de ondas de frequências ω_0 (onda fundamental) e $2\omega_0$ (onda segundo harmônico) numa fibra ótica dielétrica do tipo $\chi^{(2)}$.

Na próxima seção, resolveremos o sistema de equações diferenciais acopladas (24), obtendo soluções do tipo *bright-bright* sóliton e do tipo *bright-dark* sóliton. Em seguida, estudando as soluções obtidas, identificaremos, em função das propriedades não-lineares da fibra ótica dielétrica, as condições necessárias para a propagação (existência) destas ondas na fibra ótica.

3 Sólitons em guias dielétricos

Sabemos que no limite da variável $\beta \rightarrow \infty$, o sistema de equações (24), que descreve a propagação de ondas de frequências ω_0 (onda fundamental) e $2\omega_0$ (onda segundo harmônica), em uma fibra ótica dielétrica não-linear do tipo $\chi^{(2)}$, desacopla-se, transformando-se na equação de Schrödinger não-linear [12]. Como o acoplamento das equações diferenciais (24) é realizado pelos termos não-lineares, conclui-se que a intensidade efetiva da não-linearidade é inversamente proporcional a $|\beta|$, ou ainda, que o sistema de equações (24) pode ser visto como uma deformação da equação de Schrödinger não-linear, onde $1/|\beta|$ mede esta deformação. Outro resultado importante, para o estudo das equações (24), é que a equação de Schrödinger não-linear possui soluções do tipo sóliton [3, 13]. Logo, espera-se que tais soluções também resolvam o sistema de equações diferenciais acopladas obtido na seção precedente. Consideramos o *ansatz* abaixo do tipo *bright-bright* sóliton

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \Lambda_1 \text{sech}^2(\lambda s - v\xi) \exp(i\kappa\xi + i\nu s) \\ \hat{a}_2 &= \Lambda_2 \text{sech}^2(\lambda s - v\xi) \exp(2i\kappa\xi + 2i\nu s) \end{aligned} \quad (25)$$

onde Λ_1 , Λ_2 , λ , v , κ e ν são parâmetros a serem ajustados pelo sistema (24), enquanto s , ξ , δ , α , β e r são as variáveis do problema definidas em (23). Substituindo este *ansatz* no sistema, obtemos as equações algébricas

$$\Lambda_1 \left[\frac{r\nu^2}{2} - \kappa - 2r\lambda^2 \right] + 2i\Lambda_1 \operatorname{tgh}(\lambda s - v\xi)[v + r\lambda\nu] + \Lambda_1 \operatorname{sech}^2(\lambda s - v\xi)[\Lambda_2 + 3r\lambda^2] = 0$$

$$\Lambda_2[-2\kappa - \beta + 2\delta\nu + 2\alpha\nu^2 - 2\alpha\lambda^2] + 2i\Lambda_2 \operatorname{tgh}(\lambda s - v\xi)[v + \delta\lambda + 2\alpha\lambda\nu] \quad (26)$$

$$+ \Lambda_2 \operatorname{sech}^2(\lambda s - v\xi)[3\alpha\lambda^2 + |\beta|\Lambda_1^2] = 0$$

De modo a satisfazer o sistema de equações diferenciais (24), todos os termos entre colchetes do sistema de equações algébricas (26) devem se anular, o que resulta no sistema abaixo

$$\begin{aligned} -2\kappa - \beta + 2\delta\nu + 2\alpha\nu^2 - 2\alpha\lambda^2 &= 0 & \Lambda_2 + 3r\lambda^2 &= 0 \\ \frac{r\nu^2}{2} - \kappa - 2r\lambda^2 &= 0 & v + r\lambda\nu &= 0 \\ v + \delta\lambda + 2\alpha\lambda\nu &= 0 & 3\alpha\lambda^2 + |\beta|\Lambda_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Note que o sistema (27) contém termos quadráticos, de modo que resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{r\delta^2}{2(2\alpha - r)^2} - \frac{r\delta^2}{(2r - \alpha)(2\alpha - r)} - \frac{r\beta}{2r - \alpha} \\ \lambda &= \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{2(2r - \alpha)(2\alpha - r)} + \frac{\beta}{2(2r - \alpha)}} \\ v &= \pm \frac{r\delta}{2\alpha - r} \sqrt{\frac{\delta^2}{2(2r - \alpha)(2\alpha - r)} + \frac{\beta}{2(2r - \alpha)}} \\ \Lambda_1 &= \pm \frac{3}{2(\alpha - 2r)} \sqrt{\frac{\alpha r}{|\beta|} \left[\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right]} \\ \Lambda_2 &= \frac{3r}{2(\alpha - 2r)} \left[\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right] \quad \text{e} \quad \nu = -\frac{\delta}{2\alpha - r} \end{aligned} \quad (28)$$

Substituindo no *ansatz* (25), os parâmetros encontrados em (28), obtemos a solução particular do tipo *bright-bright* sóliton para o sistema de equações diferenciais (24), ou seja,

$$\begin{aligned}
\hat{a}_1 &= \pm \frac{3}{2(\alpha - 2r)} \sqrt{\frac{\alpha r}{|\beta|}} \left[\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right] \\
&\times \operatorname{sech}^2 \left[\pm \sqrt{\frac{\delta^2}{2(2r - \alpha)(2\alpha - r)} + \frac{\beta}{2(2r - \alpha)}} \left(s - \frac{r\delta}{2\alpha - r} \xi \right) \right] \\
&\times \exp \left\{ i \left[\frac{r\delta^2}{2(2\alpha - r)^2} - \frac{r\delta^2}{(2r - \alpha)(2\alpha - r)} - \frac{r\beta}{2r - \alpha} \right] \xi - \frac{i\delta}{2\alpha - r} s \right\}
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\hat{a}_2 &= \frac{3r}{2(\alpha - 2r)} \left[\frac{\delta^2}{2\alpha - r} + \beta \right] \\
&\times \operatorname{sech}^2 \left[\pm \sqrt{\frac{\delta^2}{2(2r - \alpha)(2\alpha - r)} + \frac{\beta}{2(2r - \alpha)}} \left(s - \frac{r\delta}{2\alpha - r} \xi \right) \right] \\
&\times \exp \left\{ i \left[\frac{2r\delta^2}{2(2\alpha - r)^2} - \frac{2r\delta^2}{(2r - \alpha)(2\alpha - r)} - \frac{2r\beta}{2r - \alpha} \right] \xi - \frac{2i\delta}{2\alpha - r} s \right\}
\end{aligned}$$

Observa-se que as soluções do tipo sóliton (29) correspondem a duas ondas de frequências ω_0 e $2\omega_0$ [veja exponenciais complexas de (29)], com amplitudes dadas por funções do tipo $A_i(z, t) = \Lambda_i \operatorname{sech}^2[C(z - vt)]$. Lembrando que a condição de contorno SVEA implica que as ondas de frequências ω_0 e $2\omega_0$ oscilam rapidamente, em comparação com as oscilações de suas amplitudes $A_i(z, t)$, e verificando, a partir de (29), que as duas ondas propagam-se com a mesma velocidade $v = r\delta/(2\alpha - r)$, concluímos que a solução (29) corresponde a um pacote de ondas do tipo sóliton, formado por duas ondas de frequências ω_0 e $2\omega_0$, em um guia dielétrico do tipo $\chi^{(2)}$. Enfim, nota-se que (29) é solução do sistema de equações diferenciais não-lineares dispersivas (24), que devido à competição destes dois efeitos, ou seja, efeito dispersivo que tende a espalhar o pacote de ondas e efeito não-linear, que tende a concentrá-lo [12], obtemos um pacote de ondas **estável** do tipo *bright-bright* sóliton que se propaga com velocidade v .

Analisaremos, em seguida, as condições necessárias que as variáveis reais α , β , δ e r devem satisfazer para que a propagação (existência) destas soluções (pacotes de ondas do tipo sólitons) sejam possíveis no guia dielétrico. Impondo que os parâmetros λ , v , k e ν sejam reais, juntamente com a condição de evitarmos os pontos singulares da solução, obtemos condições sobre as variáveis β e δ com relação aos possíveis valores da variável α . Para uma melhor visualização, essas condições são apresentadas de forma gráfica. As figuras (1) e (2) são guias nos quais estão contidos todos os requisitos necessários para a produção de sinais *bright-bright* sóliton no sistema em questão. Para utilizar os gráficos, primeiramente, devemos escolher o valor da variável r , que somente pode assumir os valores $r = +1$ e $r = -1$ conforme sua definição em (23). Com o valor de r , escolhemos o valor da variável α , que pode estar em três regiões distintas. Por exemplo, quando $r = 1$, verificamos a partir da figura (1), que os valores que α pode assumir são $\alpha < \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ ou

$\alpha > 2$. Cada uma dessas regiões contém uma condição sobre as variáveis β e δ , onde β pode ser positivo ou negativo e δ deve ser escolhido na região hachurada indicada no gráfico. Observe que, definido r e α , o sinal de β está fixado. Escolhido β com sinal apropriado, a partir de α e β , obtemos os possíveis valores que a variável δ pode assumir, observando as regiões superior ou inferior da figura.

● $r = 1$

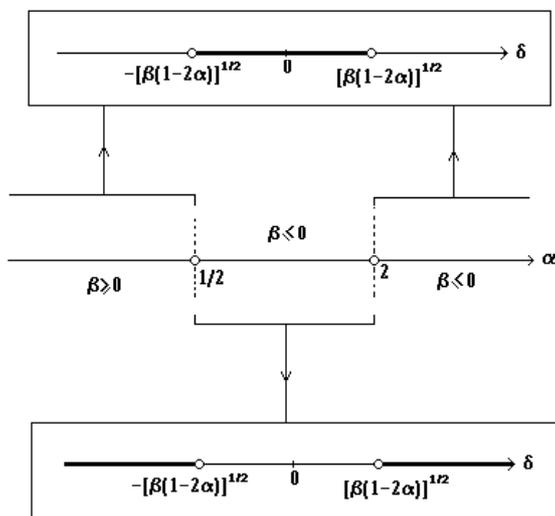


Figura 1

Figura 1. Condições sobre as variáveis da solução *bright-bright* sóliton quando $r = +1$.

● $r = -1$

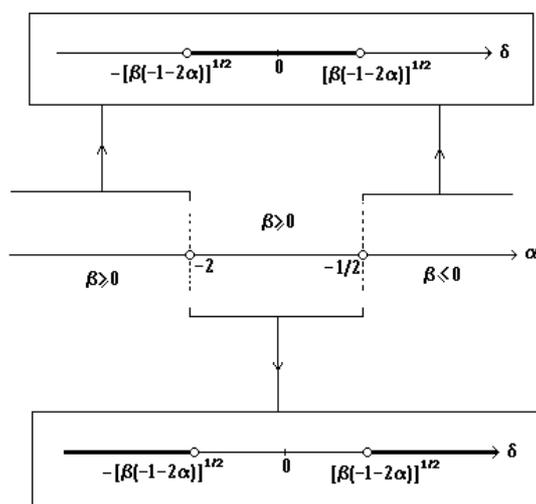


Figura 2. Condições sobre as variáveis da solução *bright-bright* sóliton quando $r = -1$.

Pacotes de ondas, do tipo *bright-dark* s3l3iton, tamb3m s3o poss3veis neste sistema. Consideremos um *ansatz* que descreve um pacote de ondas do tipo *bright-dark* s3l3iton, ou seja,

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= \Lambda_1 \operatorname{sech}^2(\lambda s - v\xi) \exp(i\kappa\xi + i\nu s) \\ \hat{a}_2 &= \Lambda_2 \operatorname{tgh}^2(\lambda s - v\xi) \exp[2(i\kappa\xi + i\nu s)]\end{aligned}\tag{30}$$

em que as ondas *bright* s3l3itons, devido 3 a fun33o secante hiperb3lico ao quadrado, s3o ondas com o envelope semelhante 3s ondas Gaussianas e as ondas *dark* s3l3itons, devido 3 a fun33o tangente hiperb3lico ao quadrado, s3o ondas do tipo degrau. Fazendo as mesmas considera33es anteriores, obtemos a solu33o:

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= \Lambda_1 \operatorname{sech}^2 \left[\pm \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}} [s + \delta \xi] \right) \right] \exp \left(i \frac{\delta}{r} [s + \delta \xi] \right) \\ \hat{a}_2 &= \frac{3}{2} r \delta^2 \operatorname{tgh}^2 \left[\pm \left(\frac{\delta}{\sqrt{2}} [s + \delta \xi] \right) \right] \exp \left(2i \frac{\delta}{r} [s + \delta \xi] \right)\end{aligned}\tag{31}$$

onde as vari3vel α e β anulam-se para que (31) seja solu33o de (24) e o par3metro amplitude Λ_1 3 livre [14]. Neste caso, a propaga33o (exist3ncia) da solu33o (31) no guia diel3trico depende apenas dos valores das vari3veis reais r e δ . A solu33o (31) tamb3m corresponde a um pacote de ondas do tipo s3l3iton, formado por duas ondas de frequ3ncias ω_0 (*bright* s3l3iton) e $2\omega_0$ (*dark* s3l3iton), que se propagam com a mesma velocidade $v = \delta$, em um guia diel3trico do tipo $\chi^{(2)}$.

Finalmente, em [12], as quantidades r , α , β e δ , definidas em (23), s3o interpretadas a partir das propriedades n3o-lineares da fibra 3tica. Verifica-se que a vari3vel β 3 uma medida do inverso da intensidade de n3o-linearidade do material. Sendo a n3o-linearidade respons3vel pela gera33o do segundo harm3nico [15], ent3o β mede o balan3o entre os modos fundamental e segundo harm3nico. A vari3vel α mede a dispers3o relativa das velocidades de grupo das ondas fundamental e segundo harm3nico. Quando $|\alpha| > 1$, a onda do segundo harm3nico possui dispers3o maior que a onda fundamental. Quando $|\alpha| < 1$, a onda do segundo harm3nico possui dispers3o menor que a onda fundamental. Dizemos que para valores de α positivos, a onda do segundo harm3nico se encontra no regime de dispers3o normal, enquanto que para valores de α negativos, a onda do segundo harm3nico se encontra no regime de dispers3o an3malo. De maneira similar, podemos interpretar a vari3vel r como sendo um indicador do regime de dispers3o da onda fundamental no guia de ondas n3o-linear. Quando $r = +1$, a onda fundamental se encontra no regime de dispers3o normal, enquanto que para $r = -1$ a onda fundamental se encontra no regime de dispers3o an3malo. Enfim, a vari3vel δ mede a diferen3a da velocidade de grupo entre os modos fundamental e o segundo harm3nico.

Na pr3xima se33o, no contexto de comunica33es 3ticas, estudaremos a estabilidade das ondas *bright-bright* s3l3itons, que formam um pacote de ondas com envelope tipo Gaussiano, em guias diel3tricos n3o-ideais do tipo $\chi^{(2)}$.

4 Estabilidade de sólitons

Inomogeneidades e junções no guia de ondas dielétrico [16], geração de ruído devido ao processo de bombeamento do sinal [4, 5] e outros efeitos, podem causar absorção-dissipação da onda sóliton. Estudaremos a estabilidade das soluções obtidas em (29), quando sujeitas a pequenas perturbações. Estas perturbações têm o objetivo de descrever o comportamento de um sóliton propagando-se num guia de ondas não-ideal do tipo $\chi^{(2)}$. Para realizar este estudo é conveniente analisar soluções na forma

$$\begin{aligned}\hat{a}'_1 &= \Lambda_1 \operatorname{sech}^2(\lambda s') \exp(i\kappa'\xi' + i\nu s') \\ \hat{a}'_2 &= \Lambda_2 \operatorname{sech}^2(\lambda s') \exp(2i\kappa'\xi' + 2i\nu s')\end{aligned}\quad (32)$$

onde foi utilizada a transformação de coordenadas:

$$s' = s - \frac{v}{\lambda}\xi \quad \text{e} \quad \xi' = \xi \quad (33)$$

nas soluções (25) juntamente com o parâmetro:

$$\kappa' = \kappa + \frac{v}{\lambda}\nu \quad (34)$$

Evidentemente os parâmetros Λ_1 , Λ_2 , λ , v , κ e ν continuam sendo dados por (28). Enfim, para a transformação de coordenadas (33), as equações diferenciais acopladas não-lineares (24) transformam-se em:

$$\begin{aligned}i\frac{\partial\hat{a}'_1}{\partial\xi'} - i\eta\frac{\partial\hat{a}'_1}{\partial s'} - \frac{r}{2}\frac{\partial^2\hat{a}'_1}{\partial s'^2} + (\hat{a}'_1)^*\hat{a}'_2 &= 0 \\ i\frac{\partial\hat{a}'_2}{\partial\xi'} - \beta\hat{a}'_2 - i\delta'\frac{\partial\hat{a}'_2}{\partial s'} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2\hat{a}'_2}{\partial s'^2} + |\beta|(\hat{a}'_1)^2 &= 0\end{aligned}\quad (35)$$

e também foram definidos novos parâmetro e variável dados por:

$$\eta = \frac{v}{\lambda} \quad \text{e} \quad \delta' = \frac{v}{\lambda} + \delta \quad (36)$$

O passo seguinte é permitir pequenas perturbações em torno das soluções estacionárias (32). Na literatura, encontramos várias maneiras de implementar tal estudo, veja, por exemplo, [17] e referências lá citadas. De modo geral, estas perturbações são representadas por funções que são somadas às soluções estacionárias.

Consideremos:

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= [\Lambda_1 \operatorname{sech}^2(\lambda s') + f_1(s', \xi')] \exp(i\kappa' \xi' + i\nu s') = \hat{a}'_1 + \delta \hat{a}'_1 \\ \bar{a}_2 &= [\Lambda_2 \operatorname{sech}^2(\lambda s') + f_2(s', \xi')] \exp(2i\kappa' \xi' + 2i\nu s') = \hat{a}'_2 + \delta \hat{a}'_2\end{aligned}\quad (37)$$

em que:

$$\delta \hat{a}'_1 = f_1(s', \xi') \exp(i\kappa' \xi' + i\nu s') \quad \text{e} \quad \delta \hat{a}'_2 = f_2(s', \xi') \exp(2i\kappa' \xi' + 2i\nu s') \quad (38)$$

são as funções que representam as perturbações em torno das soluções $\hat{a}'_1(s', \xi')$ e $\hat{a}'_2(s', \xi')$, respectivamente. Observa-se que a escolha (37) supõe, devido ao fator exponencial comum, que as soluções estacionárias $\hat{a}'_1(s', \xi')$ e $\hat{a}'_2(s', \xi')$, bem como as perturbações $\delta \hat{a}'_1$ e $\delta \hat{a}'_2$, propagam-se com a mesma velocidade. Tal escolha tem por objetivo fornecer soluções perturbadas estáveis (sem dispersão) para o problema.

Para examinar a evolução de nosso sistema não-ideal, devemos substituir a solução perturbada (37) nas equações diferenciais (35). Segue que:

$$\begin{aligned}\left[i \frac{\partial \hat{a}'_1}{\partial \xi'} - i\eta \frac{\partial \hat{a}'_1}{\partial s'} - \frac{r}{2} \frac{\partial^2 \hat{a}'_1}{\partial s'^2} + (\hat{a}'_1)^* \hat{a}'_2 \right] + i \frac{\partial \delta \hat{a}'_1}{\partial \xi'} - i\eta \frac{\partial \delta \hat{a}'_1}{\partial s'} - \frac{r}{2} \frac{\partial^2 \delta \hat{a}'_1}{\partial s'^2} \\ + (\hat{a}'_1)^* \delta \hat{a}'_2 + (\delta \hat{a}'_1)^* \hat{a}'_2 + (\delta \hat{a}'_1)^* \delta \hat{a}'_2 = 0\end{aligned}\quad (39)$$

$$\begin{aligned}\left[i \frac{\partial \hat{a}'_2}{\partial \xi'} - \beta \hat{a}'_2 - i\delta' \frac{\partial \hat{a}'_2}{\partial s'} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \hat{a}'_2}{\partial s'^2} + |\beta| (\hat{a}'_1)^2 \right] + i \frac{\partial \delta \hat{a}'_2}{\partial \xi'} - i\delta' \frac{\partial \delta \hat{a}'_2}{\partial s'} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \delta \hat{a}'_2}{\partial s'^2} \\ - \beta \delta \hat{a}'_2 + 2|\beta| \hat{a}'_1 \delta \hat{a}'_1 + |\beta| (\delta \hat{a}'_1)^2 = 0\end{aligned}$$

em que os termos entre colchetes se anulam devido às equações estacionárias (35).

Ademais, como estamos supondo pequenas perturbações em torno das soluções estáveis, desprezamos os termos não-lineares de $\delta \hat{a}'_1$ e $\delta \hat{a}'_2$, de modo que obtemos as equações diferenciais para as funções perturbadas $\delta \hat{a}'_1$ e $\delta \hat{a}'_2$, ou seja,

$$\begin{aligned}i \frac{\partial \delta \hat{a}'_1}{\partial \xi'} - i\eta \frac{\partial \delta \hat{a}'_1}{\partial s'} - \frac{r}{2} \frac{\partial^2 \delta \hat{a}'_1}{\partial s'^2} + (\hat{a}'_1)^* \delta \hat{a}'_2 + (\delta \hat{a}'_1)^* \hat{a}'_2 = 0 \\ i \frac{\partial \delta \hat{a}'_2}{\partial \xi'} - i\delta' \frac{\partial \delta \hat{a}'_2}{\partial s'} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \delta \hat{a}'_2}{\partial s'^2} - \beta \delta \hat{a}'_2 + 2|\beta| \hat{a}'_1 \delta \hat{a}'_1 = 0\end{aligned}\quad (40)$$

ou ainda, a partir de (38), em termos das amplitudes $f_1(s', \xi')$ e $f_2(s', \xi')$ das perturbações:

$$\begin{aligned}
& i \frac{\partial f_1}{\partial \xi'} + \left[-\kappa' + \eta\nu + \frac{r}{2}\nu^2 \right] f_1 - i [\eta + r\nu] \frac{\partial f_1}{\partial s'} - \frac{r}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial s'^2} \\
& \quad + (\Lambda_1 f_2 + \Lambda_2 f_1^*) \operatorname{sech}^2(\lambda s') = 0 \\
& i \frac{\partial f_2}{\partial \xi'} + \left[-2\kappa' + 2\delta'\nu - \beta + 2\alpha\nu^2 \right] f_2 - i [\delta' + 2\alpha\nu] \frac{\partial f_2}{\partial s'} \\
& \quad - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial s'^2} + 2|\beta| f_1 \Lambda_1 \operatorname{sech}^2(\lambda s') = 0
\end{aligned} \tag{41}$$

Enfim, escrito em termos dos novos parâmetros, o sistema de equações algébricas (27) é dado por:

$$\begin{aligned}
\left[-\kappa' + \eta\nu + \frac{r}{2}\nu^2 \right] &= 2r\lambda^2 & [\delta' + 2\alpha\nu] &= 0 \\
\left[-2\kappa' + 2\delta'\nu - \beta + 2\alpha\nu^2 \right] &= 2\alpha\lambda^2 & [\eta + r\nu] &= 0 \\
\Lambda_1 &= \pm 3 \sqrt{\frac{\alpha r}{|\beta|}} \lambda^2 & \Lambda_2 &= -3r\lambda^2
\end{aligned} \tag{42}$$

que substituídos nas equações diferenciais (41), fornecem as chamadas equações de estabilidade dos sólitons no guia não-ideal:

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial f_1}{\partial \xi'} + 2r\lambda^2 f_1 - \frac{r}{2} \frac{\partial^2 f_1}{\partial s'^2} + 3\lambda^2 \left[\pm \sqrt{\frac{\alpha r}{|\beta|}} f_2 - r (f_1)^* \right] \operatorname{sech}^2(\lambda s') &= 0 \\
i \frac{\partial f_2}{\partial \xi'} + 2\alpha\lambda^2 f_2 - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial s'^2} + 2|\beta| f_1 \left[\pm 3 \sqrt{\frac{\alpha r}{|\beta|}} \lambda^2 \right] \operatorname{sech}^2(\lambda s') &= 0
\end{aligned} \tag{43}$$

No momento, está em andamento a realização de uma análise numérica das equações de estabilidade (43), pelo qual pretendemos construir um diagrama de fases das regiões de estabilidade e instabilidade de (43) em função das propriedades dielétricas da fibra ótica dadas pelas variáveis α , β , δ e r . Por meio deste diagrama, pretendemos propor experiência de propagação de sólitons por grandes distâncias em materiais dielétricos com propriedades específicas, acreditando que a perda de informação nestes experimentos será pequena, comparativamente com a perda em experimentos similares realizados com sinais no formato NRZ [5].

Especificamente, neste artigo realizaremos uma análise qualitativa do comportamento de f_1 e f_2 , que descrevem as amplitudes da parte perturbada da solução sóliton, quando o sistema é submetido a perturbações tipo harmônicas, ou seja,

$$\begin{aligned} f_1(s', \xi') &= \phi_1(s') \exp(\omega \xi') \\ f_2(s', \xi') &= \phi_2(s') \exp(\omega \xi') \end{aligned} \quad (44)$$

Imediatamente, observamos que se o parâmetro ω for imaginário, o que implica em soluções oscilantes do tipo seno e co-seno, ou ainda, em sólitons oscilantes sem perda de informação, as exponenciais de (44) não são canceladas após a substituição em (43) devido ao termo complexo conjugado de f_1 . Tal fato inviabiliza o estudo analítico de (43) para ω imaginário em (44). Isso, também, sugere que as soluções perturbadas oscilantes devem ter uma forma analítica mais complexa do que aquela dada em (44), veja referências em [18]. Por outro lado, se o parâmetro ω for real, o sistema de equações diferenciais (43) reescreve-se como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi_1}{ds'^2} + \omega_1^2 \phi_1 + (\gamma_1 \phi_2 + \gamma_2 \phi_1^*) \lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda s') &= 0 \\ \frac{d^2 \phi_2}{ds'^2} + \omega_2^2 \phi_2 + \gamma_3 \phi_1 \lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda s') &= 0 \end{aligned} \quad (45)$$

e, por simplicidade, definimos os novos parâmetros:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \left(-\frac{2}{r}\right) (i\omega + 2r\lambda^2) & \omega_2^2 &= \left(-\frac{2}{\alpha}\right) (i\omega + 2\alpha\lambda^2) \\ \gamma_1 &= \pm 6 \sqrt{\frac{\alpha}{r|\beta|}} & \gamma_2 &= \left(-\frac{2}{r}\right) (-3r) = 6 & \gamma_3 &= \pm 12 \sqrt{\frac{r|\beta|}{\alpha}} \\ \lambda &= \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{2(2r-\alpha)(2\alpha-r)} + \frac{\beta}{2(2r-\alpha)}} \end{aligned} \quad (46)$$

em termos das variáveis α , β , δ e r da solução estacionária.

No sistema de equações diferenciais (45), observa-se que, para valores distantes de $s' = 0$, os termos proporcionais a $\lambda^2 \operatorname{sech}^2(\lambda s')$ contribuem muito pouco e o sistema se comporta como:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi_1}{ds'^2} + \omega_1^2 \phi_1 &\cong 0 \\ \frac{d^2 \phi_2}{ds'^2} + \omega_2^2 \phi_2 &\cong 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Isso nos leva a concluir que a estabilidade das soluções (37) é governada pelos parâmetros ω_1^2 e ω_2^2 definidos em (46). Como ω_1^2 e ω_2^2 são números complexos, pois α , β , δ , r e ω são reais, as soluções ϕ_1 e ϕ_2 são combinações do produto de funções exponenciais imaginárias, que geram oscilações, e de funções exponenciais reais, que geram atenuação da onda sóliton. Logo, para $\omega \neq 0$ as soluções dadas por (37), (38) e (44) são instáveis. Para $\omega = 0$, temos $\omega_1^2 \omega_2^2 = -4\lambda^2 < 0$, pois λ é real conforme (28), de modo que as soluções (37) são instáveis para quaisquer valores assumidos pelas variáveis α , β , δ e r se ω for real.

Em resumo, neste trabalho estudamos um sistema de equações diferenciais acopladas, com condições de contorno do tipo SVEA, que descreve a evolução longitudinal de um pacote de ondas do tipo sóliton, composto do primeiro e segundo harmônicos, em um guia de ondas retangular com não-linearidade quadrática. Para este sistema obtivemos soluções do tipo *bright-bright* e *bright-dark* sólitons. Em seguida, estudamos as condições para a existência destas ondas no guia dielétricos tipo $\chi^{(2)}$, representando-as, esquematicamente, nas figuras 1 e 2. Finalmente, sendo a solução do tipo sóliton dependente das quantidades r , α , β e δ , definidas em (23), relacionamos tais quantidades com as propriedades não-lineares da fibra ótica, concluindo que podemos escolher a configuração da onda do tipo sóliton (amplitude, largura, velocidade, balanço de energia dos modos..), selecionando a fibra ótica não-linear adequada. Enfim, obtivemos as equações de estabilidade dos pacotes de ondas tipo *bright-bright* sólitons quando sujeitos a pequenas perturbações. Como uma aplicação analítica das equações de estabilidade, estudamos o comportamento do pacote sóliton quando sujeito a perturbações tipo harmônicas, verificando que perturbações exponenciais geram perda de informação, enquanto que ondas estáveis do tipo sólitons oscilantes devem ter uma forma analítica mais complexa do que aquela dada pela nossa escolha (44). Obviamente, um estudo numérico das equações de estabilidade (43) faz-se necessário. Tal estudo permitiria propor materiais dielétricos, com propriedades específicas, que forneceriam altas taxas de transmissão com baixa perda.

Referências

- [1] GARDNER, C. S., GREENE, J. M., KRUSKAL, M. D. e MIURA R. M. Method for solving the KdV equation. *Phys. Rev. Lett.*, v.19, p. 1095-1097, 1967; LAX, P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, v.21, p. 467-490, 1968.
- [2] ABLOWITZ, M. J. e SEGUR, H. Solitons and the inverse scattering transform. *SIAM - Studies in Applied Mathematics*, Philadelphia, Vol. 4, 1981.
- [3] ZAKHAROV, V. E. e SABAT, A. B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34, p. 62-69, 1972; ZAKHAROV, V. E. e SABAT, A. B. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. *Funct. Anal. Appl.*, 8, p. 226-235, 1974.

- [4] HASEGAWA, A. e TAPPERT, F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. I. Anomalous dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, 23, p. 142-144, 1973.
- [5] HAUS, H. A. e WONG, W. S. Soliton in optical communications. *Reviews of Modern Physics*, 68, p. 423-444, 1996.
- [6] HASEGAWA, A. Numerical study of optical soliton transmission amplified periodically by the stimulated Raman process. *Appl. Opt.*, 23, p. 3302-3309, 1984.
- [7] HAUS, H. A e LAI, Y. Quantum theory of soliton squeezing: a linearized approach, *J. Opt. Soc. Am.*, B7, p. 386-392, 1990; CHEN, Y. e ATAI, J. Stability of fundamental solitons of coupled nonlinear Schrödinger equation. *Optics Communications*, 150, p.381-389, 1994.
- [8] KERMAN, A. e LIN, C-Y. Time-dependent variational principle for ϕ^4 field theory: RPA approximation and renormalization. *Ann. Phys.*, N.Y., 241, p. 185-211, 1995; NATTI, P. L. e PIZA TOLEDO de A. F. R. Small oscillation of a chiral Gross-Neveu system. *Phys. Rev.*, D 55, p. 3403-3410, 1997.
- [9] JACKSON, J. D. *Eletrodinâmica Clássica*. Rio de Janeiro:Editora Guanabara Dois S. A., 1983.
- [10] BUTKOV, E. *Física Matemática*. Rio de Janeiro:Editora Guanabara Dois S. A., 1978.
- [11] MENYUK, C. R.; SCHIEK, R. e TORNER, L. Solitary waves due to $\chi^{(2)}:\chi^{(2)}$ cascading. *J. Opt. Soc. Am.*, B11, p. 2434-244, 1994.
- [12] GALLÉAS, W.; YAMAI, L. H.; NATTI, P. L. e NATTI, E. R. T. Ondas do tipo sóliton em guias dielétricos. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, 25, 2003. No prelo.
- [13] AGRAWAL, G. P. *Nonlinear Fiber Optics*. New York: Academic Press, 1995.
- [14] GALLÉAS, W. *Sólitos em Guias Dielétricos*. Londrina, 2000. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Estadual de Londrina. Disponível em <http://www.mat.uel.br/plnatti/index-colaboradores/Galleas.htm>.
- [15] BUTCHER, P. N. e COTTER, D. *The Elements of Nonlinear Optics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1991; Y. R. Shen. *The Principles of Nonlinear Optics*. New York: John Wiley and Sons Inc., 1984.
- [16] RAGHAVAN, S. e AGRAWAL, G. P. Spatiotemporal solitons in inhomogeneous non-linear media. *Optics Comm.*, 180, p. 377-382, 2000.
- [17] CHEN, Y. e ATAI, J. Stability of fundamental solitons of coupled nonlinear Schrödinger equations. *Optics Comm.*, 150, p.381-389, 1998.
- [18] AKHMEDIEV, N. N. e OSTROVSKAYA, N. V. Stability of nonlinear waves in a symmetric planar waveguide. *Sov. Phys. Tech. Phys.*, 33, p.1333-1337, 1988; ARTIGAS, D.; TORNER, L. e AKHMEDIEV, N. N. Dynamics of quadratic soliton excitation. *Optics Comm.*, 162, p. 347-356, 1999.