

Unificación de la condensación de Bose-Einstein con la teoría BCS de superconductores

M. de Llano

Instituto de Investigaciones en Materiales, UNAM
04510 México, DF, México

(Recebido: 28 de agosto de 2003)

Resumen: Hemos desarrollado (en colaboración con numerosos colegas y estudiantes de Argentina, Brasil, España, Estados Unidos, Rusia y Sudáfrica) una nueva teoría estadística de superconductores que constituye un modelo microscópico, es decir, que parte de un hamiltoniano dinámico definido, y que es de carácter muy general. Recientemente logramos unificar las teorías estadísticas de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) y la teoría de la condensación de Bose-Einstein (BEC, por sus siglas en inglés). La teoría BCS, sin embargo, es incapaz de describir correctamente los superconductores modernos, y mucho menos predecir nuevos superconductores. La unificación lograda se obtiene a través de un modelo “completo” bosón-fermión en el que — a diferencia de los tratamientos comunes — no se desprecian los pares de Cooper de agujeros en la BEC, sino que forman parte integral del propio formalismo. Un modelo bosón-fermión representa un gas binario de fermiones (e.g., los electrones portadores de carga) y de bosones (e.g., los pares de electrones llamados de Cooper). El nuevo modelo contiene como casos particulares todas las teorías estadísticas continuas de la superconductividad en sistemas de muchos electrones, incluyendo las de BCS y de la BEC. Los pares de Cooper por definición se trasladan dentro del mar de Fermi del material. Como resultados prácticos de la unificación se tiene que el nuevo modelo: a) reproduce las temperaturas críticas T_c de todos los superconductores conocidos sin abandonar la dinámica convencional electrón-fonón; b) sugiere que aquellos superconductores con portadores tipo agujero en su estado normal tendrán T_c 's sistemáticamente más altas, como se verifica empíricamente; y c) predice la posibilidad de superconductores a temperatura ambiente pero únicamente vía condensados tipo BE de agujeros.

Palabras clave: *superconductividad; pares de Cooper; condensación de Bose-Einstein*

Abstract: *Thanks to a collaboration with several colleagues and students from Argentina,*

Brasil, Spain, the United States, Russia y South Africa a new statistical theory of superconductors has been developed which is a microscopic model. Such models start from a specified dynamical Hamiltonian and, in our case, leads to a very general theory. We have recently succeeded in unifying two statistical theories, that of Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) and that of Bose-Einstein condensation (BEC), in a manner leading to a substantial extension of both. The BCS theory alone, for example, has been unable to describe correctly modern superconductors, and much less predict new ones. The BEC-BCS unification is achieved in terms of a “complete” boson-fermion model (CBFM) which, in contrast to previous BF models does not neglect hole Cooper pairs in the different BE condensates. Cooper pairs, by definition, propagate not in vacuo but in the Fermi sea of the other, background, electrons of the many-electron system. A BF model is a binary gas of fermions (e.g., the electron charge carriers) and of bosons (e.g., Cooper pairs of electrons). The new, complete model contains as special cases all the known continuous (as opposed to “lattice” or “spin”) statistical theories of superconductivity, including those of BCS and BEC. As to practical results the new complete model: a) reproduces both high and low critical temperatures T_c associated with all known superconductors without abandoning the conventional electron-phonon; b) suggests why superconductors with hole carriers in the normal state will possess higher T_c 's than those with electron carriers, as found experimentally; and c) predicts the possibility of room temperature superconductivity but only via hole-pair BE condensates.

Key words: *superconductivity; Cooper pairs; Bose-Einstein condensation*

Antecedentes

Esta línea de trabajo es de carácter interdisciplinario pues comprende las siguientes ramas de la física:

- Física teórica/matemática
- Mecánica cuántica
- Teoría cuántica de muchos cuerpos
- Física del estado sólido (o de la materia condensada)
- Termodinámica
- Física estadística, principalmente cuántica, y
- Física de materiales, en particular de superconductores.

Tres de nosotros de la UNAM (M. Fortes, M. A. Solís y el suscrito) veníamos colaborando muy productivamente [1]-[12] en el estudio de la materia condensada en sistemas de muchas partículas neutras como los helios líquidos fermiónicos y bosónicos, materia nuclear, etc. Desde hace unos diez años empecé a especializarme en la superconductividad desde el punto de vista microscópico cuántico, abordando el estudio de sistemas de muchas partículas cargadas [13]-[53], y enfocado a la superconductividad con temperaturas T_c de transición relativamente altas, es decir, a los superconductores modernos.

Motivación práctica

Una vez encontrados materiales superconductores a temperatura ambiente éstos podrían implicar una revolución tecnológica comparable a la Revolución Industrial o a la invención del transistor que impulsó la sociedad industrial hacia la sociedad informática en que vivimos. El superconductor de más alta T_c que se conocía desde 1973 hasta 1986 no rebasaba los 23 kelvin (K). En 1986 se dio un salto notable en la T_c a 40 K al descubrirse los llamados superconductores cupratos de alta temperatura. Éstos alcanzaron en 1993 la temperatura de 164 K a muy altas presiones – valor de T_c que no ha sido superado hasta la fecha – en un determinado cuprato que contiene mercurio. Evidentemente, esto queda aún muy por debajo de la temperatura ambiente de 300 K. Actualmente, la búsqueda experimental de materiales con temperaturas críticas mayores procede a “prueba y error”, al no haber una teoría microscópica satisfactoria que además de explicar el fenómeno de la superconductividad tenga el poder predictivo para orientar la búsqueda de nuevos materiales.

Un aspecto muy importante es la dimensionalidad. Los superconductores conocidos se dividen así: a) los organo-metálicos (cuyas T_c 's rondan 1 K) que consisten en cadenas de átomos paralelas, que son casi-1D; b) los orgánicos llamados ET (cuyas T_c 's llegan a 13 K) así como los cupratos (con las más altas T_c 's hasta la fecha) que consisten en planos atómicos, siendo éstos dos tipos materiales casi-2D; y finalmente, c) los superconductores 3D tanto convencionales (e.g., los elementales, las aleaciones binarias simples, etc.) así como los exóticos (bismutatos, fermiones pesados, fullleruros, etc.).

Dogmas falsos

Hemos identificado varios dogmas (o mitos) falsos que vienen impidiendo el desarrollo de una teoría adecuada, a saber que:

1. Con el mecanismo electrón-fonón la T_c más alta posible no puede rebasar unos 45 K. Para superar este límite se requiere reemplazar los fonones por magnones, excitones, o plasmones, o por otros mecanismos electrónicos [54].
2. La superconductividad BCS no tiene relación alguna con la BEC [55].
3. La BEC es imposible en 2D [56].
4. Los pares de Cooper:
 - a) se forman como estados ligados con energías negativas (respecto a la energía en la superficie de Fermi) [57];
 - b) se propagan en el mar de Fermi con una relación energía-momento (relación de dispersión) cuadrática [58];
 - c) la dispersión lineal que surge no es mas que la excitación acústica del gas de Fermi ideal [59];
 - d) con momentos totales $\neq 0$ representan estados con flujo neto de corriente eléctrica [60];
 - e) y los pares de BCS son la misma cosa [61] (Nota: este asunto ya fue resuelto, dando lugar a la colaboración [62]);
 - f) no son bosones [63].

La teoría BCS

El ingrediente básico del formalismo de BCS es la formación (justo por debajo de la T_c) de pares de Cooper [57] de electrones (y de agujeros) asociados al mar de Fermi de un metal. Es decir, no existen pares “preformados” arriba de T_c . Empíricamente, como lo demuestran mediciones de la cuantización del flujo magnético en anillos superconductores, se forman pares pero no cúmulos (o agregados o “clusters”) mayores – como ocurre in vacuo con partículas idénticas que se atraen por pares. Concretamente, el flujo magnético más pequeño no es h/e (en donde h es la constante de Planck y e es la carga electrónica), como venía conjeturando London en base a un análisis dimensional, sino $h/2e$. Es más, no aparecen valores h/ne con $n > 2$, aparentemente como efecto del mar de Fermi. Parece ser un consenso universal que, independientemente del tipo de superconductor, estos pares son indispensables para precipitar, por debajo de T_c , la aparición de la fase termodinámica coherente superconductora, es decir, un estado estable en que la corriente eléctrica fluye sin resistencia y en que se expulsa cualquier campo magnético externo (efecto Meissner) por debajo de un valor crítico determinado.

La condensación de Bose-Einstein (BEC)

Por otro lado, la BEC sufrida por un gas de partículas bosónicas sin interacción lleva a una nueva fase de la materia con propiedades de coherencia muy especial. Esa fase es actualmente llamada como un quinto estado [64] de la materia – después del gas, líquido, sólido y plasma. En la teoría BCS se consideran sólo pares de Cooper (CPs, por sus siglas en inglés) ya sea de electrones o de agujeros con momento total (o de centro de masas) igual a cero. Si además se incluyen pares con momentos totales diferentes de cero, aparecen los llamados CPs “preformados” [52] que dan lugar al llamado “pseudogap” [65] que aparece arriba de T_c . Hemos encontrado que éstos pares producen valores de T_c en la BEC mucho más elevados [36] que las temperaturas críticas correspondientes de la teoría BCS. Esto se logra en 3D pero también en 2D [47]. La BEC ocurre porque en un sistema que es una mezcla de CPs y de electrones no apareados se tiene, para empezar, un gas binario ideal de bosones y fermiones donde es concebible que la componente bosónica pueda sufrir una BEC. A pesar de un dogma falso muy generalizado [61], los CPs de momento total definido son auténticos bosones ya que es fácil demostrar [62] que obedecen la estadística de BE. En el límite de momentos totales pequeños del par, la relación energía-momento (llamada de “dispersión”) no es cuadrática como lo sería in vacuo sino lineal. La curva exacta (determinada numéricamente [35][40][51]) casi coincide con la curva lineal para acoplamientos débiles pero relativamente moderados. La linealidad se debe a que un CP no se traslada en el vacío (como, e.g., un deuterón aislado cuya relación de dispersión es la cuadrática familiar) sino dentro del mar de Fermi correspondiente a los ($\sim 10^{23}$) electrones restantes del sistema. Recordemos que en la teoría BCS: a) se restringe uno a pares de Cooper de momento total cero; y b) se limita uno al llamado condensado de que es una mezcla en proporciones iguales

de pares de electrones y de agujeros. Hemos demostrado dentro de nuestro modelo general “completo” que el condensado de BCS resulta ser justamente un condensado de BE con las características mencionadas arriba en (b).

Mencionemos que muchos autores han abordado [66]-[68], erróneamente, modelos estadísticos tipo BE aplicados a superconductores pero suponiendo que la relación de dispersión de cada CP es cuadrática. Sin embargo, ya quedó bien establecido [40][51] explícitamente que la relación cuadrática rige únicamente en el límite cuando desaparece (matemáticamente) el mar de Fermi, es decir in vacuo, o bien cuando la densidad del trasfondo electrónico es estrictamente cero. Buena parte de nuestra línea de trabajo se inspiró originalmente, desde principios de los años 90, en las ideas de S. Fujita cuyos trabajos se resumen en dos libros de texto [69] recientes. Y cabe también señalar que la linealidad de la relación de dispersión de los pares de Cooper en 3D ya fue mencionada sin pruebas detalladas desde 1964 por Schrieffer, Ref. [63] pág. 33.

La unificación

Habiendo unificado [70]-[76] por primera vez la teoría de la BEC y la teoría de BCS a través del “modelo bosón-fermión completo” (CBFM, por sus siglas en inglés), nos propusimos lograr varios objetivos específicos.

Pares de Cooper generalizados

El papel que desempeñan los portadores de carga positiva tipo “agujero” en el fenómeno superconductor [77], ya sea de baja o alta temperatura, se investigó gracias al formalismo del modelo BF completo ya desarrollado [71][74] con V.V. Tolmachev, destacado alumno, colaborador y coautor de Bogoliubov. En nuestra nueva teoría, llamada CBFM, se pueden abordar tanto pares de dos electrones ($2e$) como de dos agujeros (o huecos) ($2h$) en proporciones arbitrarias, y en particular, variarse paramétricamente las densidades de número bosónico de CPs de ambos tipos $2e$ y $2h$, así como exhibir su contribución relativa a la BEC. Con objeto de tratar tanto pares $2e$ como $2h$ a la par, se utilizaron las funciones de Green que aparecen en la ecuación de Bethe-Salpeter (en la aproximación de diagramas de Feynman de “escaleras”) [72][76] aplicada al problema del apareamiento de Cooper. Este apareamiento se basó primero sobre el estado fundamental del gas ideal de fermiones, tal y como lo hizo Cooper en 1956 [57]. Despreciando en la nueva fórmula los pares $2h$ se recuperan los resultados de Cooper bien conocidos. Pero sin imponer esta limitación (en el fondo arbitraria), es decir, tomando ambos pares de $2e$ y de $2h$ en cuenta, se obtienen energías puramente imaginarias. Es decir, el problema no tiene sentido físico cuando la formación de pares en el mar de Fermi está basada en el gas ideal de fermiones, o sea, el mar de Fermi usual. Sin embargo, utilizando como base para la formación de los pares el estado fundamental correlacionado de BCS, se recuperan energías de Cooper reales (pero positivas en lugar de las negativas de Cooper), más una parte imaginaria asociable a la vida media finita de los pares.

Esto es de esperarse en un gas binario de fermiones en el que constantemente se forman (o asocian) en bosones, y éstos a su vez se desintegran (o disocian) continuamente en fermiones desapareados. Tratando tanto a los pares $2h$ como a los de $2e$ sin preferencias a priori, descubrimos que surgen dos soluciones distintas en las ecuaciones de Bethe-Salpeter, ambas soluciones con relación de dispersión lineal: 1) la muy familiar y usual de Anderson-Bogoliubov-Higgs (ABH) (que representa las excitaciones fonónicas asociadas a la velocidad del sonido en un sistema de muchos fermiones en interacción), así como 2) una nueva solución nada trivial que corresponde a los CPs “en movimiento,” es decir, CPs con momentos de centro de masa distinto de cero, ignorados totalmente en la teoría de BCS. Conjeturamos entonces que éstos son justamente los pares preformados ausentes en la teoría de BCS y que surgen muy naturalmente arriba de T_c como “resonancias” (o “fluctuaciones”) de energía positiva y con una vida media finita.

El CBFM que unifica BEC con BCS contiene todas las teorías estadísticas continuas conocidas de superconductores. Lleva a una generalización de la imagen o formalismo llamado “crossover de BCS-Bose” tan discutido y aplicado [78][83] desde su introducción hace unos 35 años. Este formalismo pretendía ser una importante generalización de la teoría BCS. Sin embargo, encontramos que en realidad resulta ser una modestísima generalización – comparado con el CBFM que incluye explícitamente la presencia de pares de agujeros en proporciones arbitrarias con respecto a los pares de electrones. Si no hay pares $2h$ en absoluto, se obtiene del CBFM como otro caso límite particular el modelo tipo BEC de superconductores de T. D. Lee et al. [66], mismo del cual, sin embargo, no puede obtenerse como caso especial la teoría BCS puesto que faltan la mitad de los pares contenidos en ella, es decir, los pares $2h$. Del modelo de Lee, apagando la interacción BF (que hace anularse el “gap” sin anularse el condensado BE que existe por debajo de T_c) surge otro caso particular, el modelo bosón-fermión ideal (IBFM, por sus siglas en inglés) con el cual ya se predijeron [47][52][53] valores de T_c realistas en 2D para los cupratos, ubicándose esos valores como “singularidades” al disminuirse la temperatura, y por tanto sin pretender describir la fase superconductor que por supuesto requiere de un “gap”. Finalmente, del IBFM se recupera la fórmula T_c familiar de BE, como otro caso especial del CBFM, en el límite formal en que se hacen desaparecer matemáticamente los fermiones desapareados.

Cristalinidad

Hemos también refinado un modelo estadístico continuo tipo BE utilizando una red cristalina bidimensional cuadrada con átomos de cobre rodeados por cuatro de oxígeno, y viceversa, en un escenario de Van Hove [39]. En este escenario la densidad de estados lleva una singularidad logarítmica en lugar de la densidad de estados electrónicos lisa de un gas ideal de fermiones. También hemos estudiado la propuesta de Abrikosov con singularidades de tipo exponencial. Los cupratos consisten en tales redes planas paralelas entre sí y acopladas débilmente, permitiéndose considerarlos como materiales casi-2D (con anisotropías empíricas de hasta cinco órdenes de magnitud, e.g., en la resistividad).

Resultados

Hemos demostrado:

- Que la fase superconductor observada es un ejemplo más de la BEC, propuesta por Bose y por Einstein en 1924-25, y finalmente descubierta experimentalmente [64] en 1995 con nubes ultra-enfrías ($\sim 10^{-7}$ K), originalmente de átomos alcalinos ^{87}Rb que son bosónicos.
- Que los pares de Cooper con momentos totales distintos de cero, ignorados en la teoría “estándar” de BCS, y que poseen una relación de dispersión no cuadrática sino lineal, jugarán un papel crítico, tanto en permitir la BEC en exactamente 2D así como elevar las posibles temperaturas de transición. Este mecanismo de transición en 2D es mucho más natural que el de la transición de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless a la que recurren (sin necesidad estricta) muchos autores en busca de una transición en exactamente 2D porque al parecer desconocen la dispersión lineal de los CPs.
- Que el fenómeno de la superconductividad, visto a través de nuestro modelo bosón-fermión completo (el CBFM) admite en forma natural el mecanismo estadístico de la BEC de pares bosónicos con relación de dispersión lineal, lo que ya conduce a temperaturas críticas, para toda dimensionalidad $d > 1$, mucho mayores que las de la teoría BCS. La teoría BCS a su vez predice superconductividad para toda $d > 0$ aun cuando no ha sido observada en ningún material con $d \leq 1$. Con bosones de relación de dispersión cuadrática, la BEC en principio sería posible [37] sólo para $d > 2$, en tanto que existen materiales desde los casi-1D (las sales organo-metálicas llamadas de Bechgaard) hasta los más comunes que se caracterizan por 3D.
- Que (al menos en una primera instancia muy buena) es posible entender la superconductividad en general sin abandonar la dinámica electrón-fonón, sin la necesidad de recurrir a dinámicas no convencionales o exóticas que involucran magnones, excitones, bipolarones, plasmones u otros mecanismos electrónicos.
- Que el nuevo modelo es consistente con los valores de T_c de los superconductores convencionales que se caracterizan empíricamente por valores de T_c (en unidades de la temperatura de Fermi T_F del material) ≤ 0.001 , así como con los de los “exóticos” con valores bastante mayores para T_c/T_F , el intervalo 0.01-0.1. Finalmente, se esperan valores de $T_c/T \geq 0.3$ para superconductores a temperatura ambiente, mismos que se consiguen con el CBFM pero sólo mediante condensados de BE de pares de agujeros.

Conclusiones

El CBFM puede constituir un primer paso en proporcionar un nuevo “paradigma” (o estado de orden cero) para eventualmente describir correctamente, dada una

dinámica definida, el fenómeno de la superconductividad tanto de alta como de bajas temperaturas en materiales convencionales y exóticos. Puede muy posiblemente llevarnos a construir una teoría con auténtica capacidad de predicción que orientaría al experimentador en la búsqueda de superconductores a temperatura ambiente. Es tentador pensar que el papel que eventualmente viniesen a jugar los pares de agujeros en la superconductividad, como lo demuestra el CBFM, pueda asemejarse en su fecundidad al que desempeñan los agujeros individuales en los semiconductores, sin cuyo concepto no hubiese sido posible inventar el transistor ni por consiguiente crear la revolución digital en que vivimos.

Agradecimientos

Agradezco discusiones con J. Batle, M. Casas, J. R. Clem, M. Fortes, F. J. Sevilla, M. A. Solís, S. Tapia, O. Rojo, V. V. Tolmachev, J. J. Valencia, A. A. Valladares y H. Vucetich, así como a la UNAM-DGAPA-PAPIIT (México) # IN106401 y al CONACyT (México) # 41302 por el apoyo económico parcial.

Bibliografía

- [1] G. A. Baker, Jr., L. P. Benofy, M. Fortes, M. de Llano, S. Peltier & A. Plastino. *Hard core square well Fermions*. Phys. Rev. A 26, 3575 (1982).
- [2] V. C. Aguilera-Navarro, M. Fortes, M. de Llano & A. Plastino. *Padé approximants and the random close packing of hard spheres and disks*. J. Chem. Phys. 76, 749 (1982).
- [3] V. C. Aguilera-Navarro, M. Fortes, M. de Llano, J. del Río, A. Plastino & O. Rojo. *Hard-core-fluid-to-solid transition from the virial expansion*. J. Stat. Phys. 32, 95 (1983).
- [4] M. Fortes & M. de Llano. *La materia condensada*. Ciencia y Desarrollo 57, 77 (1984).
- [5] V. C. Aguilera-Navarro, M. Fortes, M. de Llano & O. Rojo. *May low density virial expansions contain information about condensed phases?* J. Chem. Phys. 81, 1450 (1984).
- [6] G. A. Baker, Jr., L. P. Benofy, M. Fortes & M. de Llano. *Ground state energy of a hard-sphere Fermi fluid*. Phys. Rev. C 34, 678 (1986).
- [7] V. C. Aguilera-Navarro, R. Guardiola, C. Keller, M. Fortes, M. de Llano & M. Popovic. *Van der Waals perturbation theory for Fermion and Boson ground-state matter*. Phys. Rev. A 35, 3901 (1987).
- [8] M. A. Solís, V. C. Aguilera-Navarro, M. de Llano & R. Guardiola. *Thermodynamic perturbation scheme for the ground-state energy of Lennard-Jones bosons*. Phys. Rev. Lett. 59, 2322 (1987).
- [9] V. C. Aguilera-Navarro, G. A. Baker, Jr., L. P. Benofy, M. Fortes & M. de Llano. *Constructive methods for the ground-state energy of fully-interacting Fermion gases*. Phys. Rev. A 36, 4338 (1987).

- [10] M. A. Solís, M. Fortes, S. Ho, E. Buendía, R. Guardiola, M. de Llano & W. C. Stwalley. *Zero-temperature properties of fluid spin-polarized atomic hydrogen*. Rev. Mex. Fís. 36, 294 (1990).
- [11] M. A. Solís, R. Guardiola, M. Fortes, M. de Llano & W. C. Stwalley. *Quantum thermodynamic study of spin-polarized boson fluids*. J. Phys.: Cond. Matter 5, 5783 (1993).
- [12] M. A. Solís, M. de Llano & R. Guardiola. *London Equation-of-state for a quantum-hard-sphere system*. Phys. Rev. B 49, 13201 (1994).
- [13] V. C. Aguilera-Navarro, G. A. Baker, Jr. & M. de Llano. *Ground state energy of jellium*. Phys. Rev. B 32, 4502 (1985).
- [14] M. Casas, C. Esebbag, A. Extremera, J. M. Getino, M. de Llano, A. Plastino & H. Rubio. *Cooper pairing in a soluble one-dimensional many-fermion model*. Phys. Rev. A 44, 4915 (1991).
- [15] C. Esebbag, J. M. Getino, M. de Llano, S. A. Moszkowski, U. Oseguera, A. Plastino & H. Rubio. *Cooper pairing in one, two and three dimensions*. J. Math. Phys. 33, 1221 (1992).
- [16] J.M. Getino, M. de Llano & H. Rubio. *Cooper pairing in the Van Hove singularity scenario of high-temperature superconductivity*. Sol. State Comm. 83, 891 (1992).
- [17] D. M. van der Walt, R. M. Quick & M. de Llano. *Analytic solution of the BCS gap equation in one, two and three dimensions*. J. Math. Phys. 34, 3980 (1993).
- [18] C. Esebbag, M. de Llano & R. Carter. *Pairing and BCS theory in an exactly-soluble many-fermion model*. Cond. Matter Theories 8, 45 (1993).
- [19] R. Quick, C. Esebbag & M. de Llano. *BCS theory tested in an exactly-soluble fermion fluid*. Phys. Rev. B 47, 11512 (1993).
- [20] M. Casas, M. de Llano, A. Puente, R.M. Quick & D. M. van der Walt. *Test of BCS Theory in an Exactly-Soluble Many-Fermion System*. Proceedings of II CINVESTAV Superconductivity Symposium [ed. por R. Baquero] (World Scientific, 1993).
- [21] J. M. Getino, M. de Llano & H. Rubio. *Properties of the gap energy in Van Hove scenario of high-temperature superconductivity*. Phys. Rev. B 48, 597 (1993).
- [22] M. Casas, M. Fortes, J. M. Getino, A. Puente, R. M. Quick, M. A. Solís & D. M. van der Walt. *Electron Clusters in Superconductivity*. Cond. Matter Theories 9, 169 (1994).
- [23] M. Casas, J. M. Getino, M. de Llano, A. Puente, R. M. Quick & H. Rubio. *BCS-Bose model of exotic superconductors: Generalized coherence length*. Phys. Rev. B 50, 15945 (1994).

- [24] R. M. Carter, M. Casas, J. M. Getino, M. de Llano, A. Puente, H. Rubio & D. M. van der Walt. *Coherence lengths for three dimensional superconductors in the BCS-Bose picture*. Phys. Rev. B 52, 16149 (1995).
- [25] V.C. Aguilera-Navarro, M. Casas, S. Fujita, J.M. Getino, M. de Llano & H. Rubio. *Superconductivity as a Bose-Einstein condensation of moving Cooper pairs*. Proceedings of Theoretical Physics Symposium in honor of Professor Paulo Leal Ferreira (IFT, São Paulo, Brasil, 1995) pág. 377.
- [26] M. Casas, J. M. Getino, A. Puente, M. de Llano, R. M. Quick, H. Rubio & D. M. van der Walt. *BCS-Bose theory of the superconducting coherence length*. Sol. State Comm. 94, 419 (1995).
- [27] M. Casas, M. Fortes, M. de Llano, A. Puente & M. A. Solís. *Bound-state properties of the bare BCS interaction model*. Cond. Matter Theories 10, 233 (1995).
- [28] M. Casas, M. Fortes, M. de Llano, A. Puente & M. A. Solís. *Quantum Binding of the BCS In-teraction Model*. Int. J. Theor. Phys. 34, 707 (1995).
- [29] R. M. Carter, M. Casas, M. de Llano, A. Puente & D. M. van der Walt. *The BCS-Bose picture of superconductivity in three dimensions*. Cond. Matter Theories 11, 447 (1996).
- [30] M. Casas, M. Fortes, S. Fujita, J. M. Getino, M. de Llano, O. Rojo, H. Rubio & M. A. Solís. *Condensación de Bose-Einstein y Superconductividad*. Ciencia y Desarrollo 129, 42 (1996).
- [31] M. Casas, J. M. Getino, M. de Llano & H. Rubio. *Superconductividad como condensación de Bose-Einstein*. Rev. Española Fís. 10, 26 (1996).
- [32] M. de Llano, S. Fujita, M. A. Solís & A. A. Valladares. *T_F -scaled superconductivity in a fer-mion-quasiboson mixture with Bose-Einstein condensation*. Czech. J. Phys. 46 [S2], 599 (1996).
- [33] V. C. Aguilera-Navarro, M. Casas, A. Rigo, N. J. Davidson, R. M. Quick, S. Fujita, M. G. López, M. de Llano, A. A. Valladares, O. Rojo & M. A. Solís. *Can BCS and BEC be synthesized?* Cond. Matter Theories 12, 199 (1997).
- [34] M. Casas, A. Rigo, J. M. Getino, H. Rubio, M. de Llano, O. Rojo & M. A. Solís. *Simple Statistical Model of Superconductivity*. Cond. Matter Theories 13, 273 (1998).
- [35] M. Casas, S. Fujita, M. de Llano, A. Puente, A. Rigo & M. A. Solís. *The Cooper pair dispersion relation*. Physica C 295, 93 (1998).
- [36] M. Casas, A. Rigo, M. de Llano, O. Rojo & M. A. Solís. *Bose-Einstein condensation with a BCS model interaction*. Phys. Lett. A 245, 55 (1998).
- [37] V. C. Aguilera-Navarro, M. de Llano & M. A. Solís. *Bose-Einstein condensation for general-dispersion-relation bosons*. Eur. J. Phys. 20, 177 (1999).

- [38] M. Casas, A. Puente, A. Rigo, N. J. Davidson, R. M. Quick, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, O. Navarro, A. A. Valladares & O. Rojo. *BEC-driven super-conductivity in the cuprates*. Int. J. Mod. Phys. B 13, 3489 (1999).
- [39] V. Fuentes, M. de Llano, M. Grether & M. A. Solís. *Superconducting transition-temperature en-hancement due to electronic-band-structure density-of-states*. Rev. Mex. Fís. 45, 158 (1999).
- [40] S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano, A. A. Valladares & O. Rojo. *Cooper pair dispersion relation for weak to strong coupling*. Phys. Rev. B 62, 8671 (2000).
- [41] F. J. Sevilla, M. Grether, M. de Llano, M. Fortes, O. Rojo, M. A. Solís & A. A. Valladares. *Low-dimensional BEC* J. Low Temp. Phys. 121, 281 (2000).
- [42] S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M. de Llano, M. A. Solís, A. A. Valladares & O. Rojo. *Superconductivity as a Bose-Einstein condensation?* Physica C 341, 233 (2000).
- [43] S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, Rigo, M. Fortes, M. de Llano, M. A. Solís, A. A. Valladares & O. Rojo. *Cooper pair dispersion relation in two dimensions*. Physica C 341, 151 (2000).
- [44] V. C. Aguilera-Navarro, V. Fuentes, M. Grether, M. G. López-Arrieta, M. de Llano, J. J. Valencia, A. Salazar, O. Rojo & M. A. Solís. *Ideal quantum gases with any positive-power dispersion-law in any positive dimension*. Cond. Matter Theories 14, 61 (2000).
- [45] J. Batle, M. Casas, M. Fortes, M. de Llano, M. A. Solís, A. A. Valladares & O. Rojo. *Bose-Einstein condensation of nonzero-center-of-mass-momentum Cooper pairs*. Physica C 364, 161 (2001).
- [46] M. Grether, M. Fortes, M. de Llano, F. J. Sevilla, M. A. Solís, S. Tapia, A. A. Valladares & V. V. Tolmachev. *Free and trapped Fermi gases: some novel results*. Cond. Matter Theories 15, 425 (2001).
- [47] M. Casas, N. J. Davidson, S. Fujita, M. de Llano, A. Puente, R. M. Quick & A. Rigo. *Statistical model of superconductivity in a 2D binary boson-fermion model*. Physica A 295, 146 (2001).
- [48] M. G. López-Arrieta, M. de Llano & M. A. Solís. *Excited Cooper pairs*. Rev. Mex. Fís. 47, 54 (2001).
- [49] M. Grether, M. Fortes, F. J. Sevilla, M. A. Solís, M. de Llano, A. Salazar, A. A. Valladares & O. Rojo. *BCS and Bose-Einstein condensates in superconductivity and superfluidity*. Cond. Matter Theories 16, 305 (2001).
- [50] M. de Llano & O. Navarro. *Materiales Superconductores*. El Faro (UNAM) (3 mayo 2001).
- [51] S. K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M. de Llano, M. A. Solís, A. A. Valladares & O. Rojo. *Linear to quadratic crossover of Cooper pair dispersion relation*. Physica C 351, 341 (2001).

- [52] M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. de Llano & M. A. Solís. *Pre-formed Cooper pairs and Bose-Einstein condensation in cuprate superconductors*. J. Phys. Chem. Sol. 123, 101 (2002).
- [53] M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. de Llano & M. A. Solís. *Two-dimensional Bose-Einstein condensation in cuprate superconductors*. Sol. State Comm. 123, 101 (2002).
- [54] J. E. Hirsch, *Science* 295, 2226 (2002).
- [55] J. Bardeen, *Phys. Today* (enero 1963) pág. 25.
- [56] A. A. Abrikosov, declaración en el *XXVI International Workshop on Condensed Matter Physics* (Luso, Portugal, 2002).
- [57] L. N. Cooper, *Phys. Rev.* 104, 1189 (1956).
- [58] Árbitro anónimo, del *Phys. Rev. Lett.* (2001).
- [59] M. Randeria, declaración en el *XX International Workshop on Condensed Matter Physics* (Pune, India, 1996).
- [60] J. R. Schrieffer, *Nobel Lecture* (Dic. 1972).
- [61] J. R. Clem, com. privada (2003).
- [62] M. de Llano, F. J. Sevilla, S. Tapia & J. R. Clem. *BCS pairs, Cooper pairs, and Bose-Einstein condensation*. Phys. Rev. B (enviado).
- [63] J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity* (Benjamin, NY, 1964) pág. 38.
- [64] E. A. Cornell & C. E. Wieman, *Sci. Am.* 278 (marzo, 1998), pág. 26.
- [65] T. Timusk & B. Statt, *Rep. Prog. Phys.* 62, 61 (1999).
- [66] T. D. Lee *et al.*, *Phys. Rev. B* 42, 6745 (1989); *ibid*, *Phys. Letters A* 152, 417 y 423 (1990).
- [67] J. M. Blatt, *Theory of Superconductivity* (Academic, N.Y., 1964) pág. 55.
- [68] A. Rosencwaig, *Phys. Rev. B* 67, 184514 (2003).
- [69] S. Fujita & S. Godoy, *Theory of High Temperature Superconductors*, (Kluwer, N.Y., 2001); *ibid*, *Quantum Statistical Theory of Superconductivity* (Plenum Press, N.Y., 1996).
- [70] N. N. Bogoliubov, V. V. Tolmachev & D. V. Shirkov, *A New Method in the Theory of Superconductivity* (Consultants Bureau, N.Y., 1959).
- [71] V. V. Tolmachev. *Superconducting Bose-Einstein condensates of Cooper pairs interacting with electrons*. Phys. Letters A 266, 400 (2000).
- [72] M. Fortes, M. A. Solís, M. de Llano & V. V. Tolmachev. *Cooper pairs as resonances*. Physica C 364, 95 (2001).
- [73] J. Batle, M. Casas, M. Fortes, M. de Llano & V. V. Tolmachev. *Generalizing BCS for exotic superconductors*. J. Supercond. 15, 655 (2002).

- [74] M. de Llano & V. V. Tolmachev. *Multiple phases in a new statistical boson-fermion model of super-conductivity*. *Physica A* 317, 546 (2003).
- [75] J. Batle, M. Casas, M. Fortes, M. de Llano, O. Rojo, F. J. Sevilla, M. A. Solís & V. V. Tolmachev. *BCS and BEC finally unified: A brief review*. *Cond. Matter Theories* 18, xxx (2003).
- [76] V. C. Aguilera-Navarro, M. Fortes & M. de Llano. *Generalized Cooper pairing and Bose-Einstein condensation*. *cond-mat/0306726*.
- [77] J. Hirsch, *Physica C* 341-348, 213 (2000); *ibid*, *Phys. Rev. B* 55, 9007 (1997).
- [78] J. Labbé, S. Barisic & J. Friedel, *Phys. Rev. Lett.* 19, 1039 (1967).
- [79] D. M. Eagles, *Phys. Rev.* 186, 456 (1969).
- [80] A. J. Leggett, *J. Phys. (Paris) Colloq.* 41, C7-19 (1980).
- [81] K. Miyake, *Prog. Theor. Phys.* 69, 1794 (1983).
- [82] P. Nozieres & S. Schmitt-Rink, *J. Low. Temp. Phys.* 59, 195 (1985).
- [83] M. Randeria, J. M. Duan & L. Y. Shieh, *Phys. Rev. Lett.* 62, 981 (1989); *ibid*, *Phys. Rev. B* 41, 327 (1990).