A Função φ de Euler e a Expansão Periódica de Frações na Base b

The Function φ of Euler and the Periodic Expansion Fractions in the Base b

Martinho da Costa Araujo
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT, Cuiabá, MT
martinho@ufmt.br

Marcionei Rech
Instituto Federal de Mato Grosso -IFMT, Sorriso, MT
marcionei.rech@srs.ifmt.edu.br

Resumo: Queremos aqui explorar o comportamento da expansão de frações ordinárias, o comprimento da parte não periódica, bem como do período se ela for uma dízima infinita, com o auxilio da função φ de Euler. Além das expansões decimais que são as mais comuns, exploraremos as expansões para uma base b qualquer. Apresentaremos alguns exemplos de expansões de frações ordinárias para diferentes bases numéricas gerando dízimas finitas, como também, dízimas periódicas simples e compostas.

Palavras-chave: dízimas periódicas; bases numéricas; números racionais.

Abstract: We would like to explore the behavior of the expansion of ordinary fractions, the length of the non-periodic part and the period if it is an endless tithe, with the help of the function φ Euler. In addition to the decimal expansions that are the most common, we explore the expansions for a base b whatsoever. We will present some examples of expansions of ordinary fractions for different number bases generating finite decimals, but also simple and composite periodical decimals.

Key words: periodic decimal; numerical bases; rational numbers.

1 Introdução

Os estudos sobre expansões nos remontam para o início do século 18, vários matemáticos observaram regularidades nas expansões decimais de frações comuns, dentre eles destacamos: John Wallis [1657, 1685], Samuel Cunn [1714] e John Marsh [1742] . Algumas regras foram criadas, mas foi só a partir de 1760 em diante, que as primeiras tentativas para estabelecer uma teoria coerente de frações decimais periódicas apareceram. Johann Heinrich Lambert [1728, 1777] foi o primeiro a dedicar dois ensaios sobre o tema, porém somente em 1801 que Johann Carl Friedrich Gauss provou um teorema importante relacionado a determinação do comprimento de dízimas periódicas no sistema de numeração decimal.

Identificar o comportamento de uma expansão parece ser uma tarefa fácil quando tratamos de expansões relativamente pequenas, basta uma simples divisão do numerador pelo

Recebido em 13/12/2016 - Aceito em 26/04/2017

denominador, mas em alguns casos o comprimento da parte finita ou até mesmo do período, não cabe em uma simples calculadora. Por exemplo a expansão decimal da fração $\frac{1}{29}$ gera uma dízima periódica simples com período de 28 algarismos, já a expansão de $\frac{1}{4096}$ é finita com 12 algarismos.

Hoje é comum artigos que tratam da expansão decimais de frações ordinárias irredutíveis $\dfrac{p}{q}$ com $q \neq 0$, mostrando quais números racionais geram dízimas finitas e quais geram dízimas infinitas e periódicas. Queremos aqui generalizar esses conceitos e trabalhar a expansão de frações ordinárias para uma base b qualquer.

Observe a expansão da fração $\frac{19}{48}$ em algumas bases numéricas diferentes:

$$\frac{19}{48} = (0,2213)_6 = (0,\overline{25})_7 = (0,3958\overline{3})_{10}$$

Veja que quando expandida para a base 6, gera uma dízima finita, na base 7 uma dízima periódica simples de período 25, já na base 10 gera uma dízima periódica composta com período 3, ou seja, a mesma fração pode ter comportamentos bem distintos dependendo da base para a qual se deseja a expansão.

2 A Função φ de Euler

Antes de analisarmos as expansões vamos retomar algumas definições e resultados da teoria dos números que são importantes.

Dado um inteiro positivo n, representa-se por $\varphi(n)$ a quantidade de inteiros positivos menores que n e primos com n. Escrevemos:

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k < n \text{ e } mdc\,(k, n) = 1\}|.$$

Por exemplo, para $n = 10$ temos que os inteiros $1, 3, 7, 9$ são relativamente primos com 10, ou seja, $\varphi(10) = 4$. Veja o valor de $\varphi(n)$ dos primeiros números naturais:

Exemplo 2.1 *:*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8

Define-se assim uma função que associa cada número inteiro positivo n a um inteiro positivo $\varphi(n)$ que goza das seguintes propriedades:

1. $\varphi(1) = 1$
2. Se $n > 1, \varphi(n) \leq n - 1$ tem-se a igualdade se e somente se n é primo.
3. Se $mdc(a, n) = 1$, então $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. (Teorema de Euler).
4. Se s é o menor inteiro positivo, tal que $a^s \equiv 1 \pmod{n}$ com $mdc(a, n) = 1$, então s divide $\varphi(n)$, s é chamado de ordem de a módulo n, e escrevemos como $s = ord_n\,(a)$.
5. Se p é primo e α é um inteiro positivo, então $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.
6. Se m e n são inteiros positivos, tais que $mdc(m, n) = 1$, então $\varphi\,(m \cdot n) = \varphi\,(m) \cdot \varphi\,(n)$.

A demonstração dessas propriedades, bem como do teorema de Euler podem ser vistas na referência bibliográfica [1].

3 Expansão na base b

Trataremos nessa seção do comportamento das expansões de frações ordinárias irredutíveis,em uma base b qualquer.

Dado um inteiro qualquer $b \geq 2$, todo inteiro positivo $n > 0$ pode ser escrito de modo único na forma $n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0$, com $0 \leq a_i < b$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, m$ e $a_m \neq 0$. Representamos $n = (a_m a_{m-1} \cdots a_1 a_0)_b$. E essa é a expansão de n na base b.

3.1 Expansão finita

Teorema 3.1 *Uma fração irredutível* $\dfrac{p}{q}$ *com* $q \neq 0$*, possui representação finita no sistema posicional de base* b*, se e somente se, o denominador* q *não possui fatores primos diferentes dos fatores de* b*. Mais precisamente, se a base for tipo* $b = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_k^{\alpha_k}$ *com* P_i *primos e os inteiros* $\alpha_i \geq 0$ *e seu denominador* $q = (P_1^{\alpha_1})^{\beta_1} (P_2^{\alpha_2})^{\beta_2} \cdots (P_k^{\alpha_k})^{\beta_k}$ *com os inteiros* $\beta_j \geq 0$ *para* $j = 1, 2, \ldots, k$ *, então a expansão será finita e possuirá* w *algarismos após a vírgula, sendo* $w = \max\{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k\}$.

Demonstração. Como $\dfrac{p}{q} = p.\left(\dfrac{1}{q}\right)$, basta considerar que $\dfrac{1}{q} = (0, d_1 d_2 \ldots d_k)_b$ seja a expansão finita na base b, onde $0 \leq d_i < b$, o inteiro $i = 1, 2, \ldots, k$ e o último algarismo $d_k \neq 0$. Logo vamos ter

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q} &= \frac{d_1}{b} + \frac{d_2}{b^2} + \frac{d_3}{b^3} + \cdots + \frac{d_k}{b^k} \\
&= \frac{1}{b^k}\left(d_1.b^{k-1} + d_2.b^{k-2} + d_3.b^{k-3} + \cdots + d_k\right)
\end{aligned}
$$

Agora, tomamos $M = d_1.b^{k-1} + d_2.b^{k-2} + d_3.b^{k-3} + \cdots + d_k$, então segue que

$$
\frac{1}{q} = \frac{M}{b^k} \quad \Leftrightarrow \quad Mq = b^k \quad \Rightarrow \quad q \mid b^k.
$$

Logo q não tem fatores primos que não sejam fatores de b.
Reciprocamente, se q não tem fatores primos que não sejam fatores de b, seja $w = \max\{\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r\}$, segue que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q} \cdot b^w &= ((P_1^{\alpha_1})^w.(P_2^{\alpha_2})^w \cdots (P_k^{\alpha_k})^w).\frac{1}{(P_1^{\alpha_1})^{\beta_1}.(P_2^{\alpha_2})^{\beta_2}.(P_3^{\alpha_3})^{\beta_3} \cdots (P_k^{\alpha_k})^{\beta_k}} = \\
&= (P_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1}.(P_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2}.(P_3^{\alpha_3})^{w-\beta_3} \cdots (P_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k}.
\end{aligned}
$$

Seja $M = (P_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1}.(P_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2}.(P_3^{\alpha_3})^{w-\beta_3} \cdots (P_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k}$, então $\dfrac{b^w}{q} = M$ o que significa que $M < b^w$, e assim podemos escrever:
$M = a_{w-1}.b^{w-1} + a_{w-2}.b^{w-2} + \cdots + a_2.b^2 + a_1.b + a_0 = (a_{w-1} a_{w-2} \cdots a_2 a_1 a_0)_b$.

Portanto temos que se

$$
\begin{aligned}
\frac{b^w}{q} = M \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q} &= \frac{M}{b^w} \\
&= \frac{a_{w-1}.b^{w-1} + a_{w-2}.b^{w-2} + \cdots + a_2.b^2 + a_1.b + a_0}{b^w} \\
&= \frac{a_{w-1}}{b} + \frac{a_{w-2}}{b^2} + \cdots + \frac{a_2}{b^{w-2}} + \frac{a_1}{b^{w-1}} + \frac{a_0}{b^w} \\
&= (0, \underbrace{a_{w-1}a_{w-2}\cdots a_2a_1a_0}_{w \text{ -algarismos}})_b
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 3.1 *: Determinar a expansão de* $\frac{7}{48}$ *na base 6.*

Observe que $48 = 2^4.3$. Como o 48 não tem fatores primos diferentes dos fatores de 6 que é a base, então a expansão será finita e o comprimento será o $máx(4, 1) = 4$, vejam:

$$
\frac{7}{48} = \frac{7}{2^4.3} = \frac{189}{2^4.3^4} = \frac{5.6^2 + 1.6 + 3}{6^4} = \frac{5.6^2}{6^4} + \frac{1.6}{6^4} + \frac{3}{6^4} = \frac{0}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{3}{6^4} = (0, 0513)_6
$$

Exemplo 3.2 *: Determinar a expansão de* $\frac{19}{192}$ *na base 12.*

Observe que $192 = 2^6.3 = (2^2)^3.3$. Como o 192 não tem fatores primos diferentes dos fatores da base $12 = 2^2.3$, então a expansão será finita e o comprimento será o $máx\{3, 1\} = 3$, vejam:

$$
\frac{19}{192} = \frac{19}{2^6.3} = \frac{171}{(2^2)^3.3^3} = \frac{1.12^2 + 2.12 + 3}{12^3} = \frac{1.12^2}{12^3} + \frac{2.12}{12^3} + \frac{3}{12^3} = \frac{1}{12} + \frac{2}{12^2} + \frac{3}{12^3} = (0, 123)_{12}
$$

3.2 Expansão infinita e periódica

Teorema 3.2 *Sendo* $\frac{p}{q}, q \neq 0$ *uma fração ordinária irredutível, a expansão de* $\frac{p}{q}$ *na base* b *é uma dízima periódica simples se* $mdc(b, q) = 1$ *e terá período com* s *dígitos, sendo* s *a menor solução inteira positiva da equação* $b^s \equiv 1 \pmod q$.

Demonstração. Se s é o menor inteiro positivo, tal que $b^s \equiv 1 \bmod q$, então $b^s - 1 = qu$, para algum inteiro u. Mas $u < b^s$, daí u na base b é dado por $u = d_{s-1}b^{s-1} + d_{s-2}b^{s-2} + \cdots + d_1b^1 + d_0 = \left(d_{s-1}d_{s-2}b^{s-2} \cdots d_1d_0\right)_b$ com $0 \leq d_k < b$, $k = 0, 1, 2, \ldots, s-1$. Logo $b^s - 1 = qu$. Equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q} &= \frac{u}{b^s - 1} = \frac{d_{s-1}b^{s-1} + d_{s-2}b^{s-2} + \cdots + d_1b^1 + d_0}{b^s}\left(\frac{1}{1 - b^{-s}}\right) \\
&= \frac{d_{s-1}b^{s-1} + d_{s-2}b^{s-2} + \cdots + d_1b^1 + d_0}{b^s}\left(1 + \frac{1}{b^s} + \frac{1}{b^{2s}} + \frac{1}{b^{3s}} + \cdots\right) \\
&= 0, d_{s-1}\cdots d_1d_0 + 0, \underbrace{00\cdots0}_{s \text{ - zeros}} d_{s-1}\cdots d_1d_0 + 0, \underbrace{00\cdots0}_{2s \text{ - zeros}} d_{s-1}\cdots d_1d_0 + 0, \underbrace{00\cdots0}_{3s \text{ - zeros}} \\
&= (0, \underbrace{\overline{d_{s-1}d_{s-2}\cdots d_2d_1d_0}}_{Período\ com\ s\text{-}algarismos})_b.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Como vimos no item 4 das propriedades da função φ,o comprimento do período s é chamado $s = ord_n\,(b)$. A função φ de Euler torna-se uma ferramenta importante para determinar o período de uma expansão, pois o comprimento do período s será um divisor de $\varphi(q)$.

Exemplo 3.3 *: Determinar a expansão de* $\dfrac{5}{168}$ *na base 11.*

Como o $mdc(168, 11) = 1$ e $\varphi(168) = \varphi(2^3.3.7) = \varphi(2^3).\varphi(3).\varphi(7) = (2^3 - 2^2).2.6 = 48$, $s = ord_{168}^{11} \mid \varphi(168)$, portanto $s \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$. Note que,

$$11^1 \equiv 11 \pmod{168},\quad 11^2 \equiv 121 \pmod{168},\quad 11^3 \equiv 155 \pmod{168},\ e\ 11^6 \equiv 1 \pmod{168}.$$

Temos $s = 6$, e $168 \mid 11^6 - 1 \quad \Rightarrow \quad 11^6 - 1 = 168.k$, com $k \in \mathbb{N}$, logo $k = 10545$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{5}{168} &= \frac{5k}{11^6-1} = \frac{5.10545}{11^6-1} = \frac{52725}{11^6-1} = \frac{3.11^4+6.11^3+6.11^2+8.11+2}{11^6-1} \\
&= \frac{0.11^5+3.11^4+6.11^3+6.11^2+8.11+2}{11^6}.\frac{1}{(1-11^{-6})} \\
&= \frac{0.11^5+3.11^4+6.11^3+6.11^2+8.11+2}{11^6}.\left(1+\frac{1}{11^6}+\frac{1}{11^{12}}+\frac{1}{11^{18}}+\cdots\right) \\
&= \left(\frac{0}{11}+\frac{3}{11^2}+\frac{6}{11^3}+\frac{6}{11^4}+\frac{8}{11^5}+\frac{2}{11^6}\right).\left(1+\frac{1}{11^6}+\frac{1}{11^{12}}+\frac{1}{11^{18}}+\cdots\right) \\
&= \frac{0}{11}+\frac{3}{11^2}+\frac{6}{11^3}+\frac{6}{11^4}+\frac{8}{11^5}+\frac{2}{11^6}+\frac{0}{11^7}+\frac{3}{11^8}+\frac{6}{11^9}+\frac{6}{11^{10}}+\frac{8}{11^{11}}+\cdots \\
&= (0,\overline{036682})_{11}
\end{aligned}$$

Teorema 3.3 *Seja* $\dfrac{p}{q}, q \neq 0$ *uma fração ordinária irredutível,* $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ *uma base com* p_i *primos, os inteiros* $\alpha_i \geq 0$, $q = m_0.(p_1^{\alpha_1})^{\beta_1}.(p_2^{\alpha_2})^{\beta_2}.(p_3^{\alpha_3})^{\beta_3} \cdots (p_k^{\alpha_k})^{\beta_k}$ *com* $\beta_j \geq 0$ *para* $j = 1, 2, \ldots, k$ *, sendo* m_0 *um inteiro positivo tal que* $mdc(m_0, b) = 1$*, então a expansão de* $\dfrac{p}{q}$ *na base* b *será uma dízima periódica composta com período de* s *dígitos, sendo* s *a menor solução inteira da equação* $b^s \equiv 1 \pmod{m_0}$ *e anteperíodo de* w *dígitos, onde* w*=*$máx\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_k\}$.

Demonstração. De fato, seja w=$máx\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_k\}$, segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q} &= \frac{1}{m_0.(p_1^{\alpha_1})^{\beta_1}.(p_2^{\alpha_2})^{\beta_2}.\cdots(p_k^{\alpha_k})^{\beta_k}} = \frac{(p_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1}.(p_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2}\cdots(p_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k}}{(p_1^{\alpha_1})^{w}.(p_2^{\alpha_2})^{w}.\cdots(p_k^{\alpha_k})^{w}.m_0} \\
&= \frac{(p_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1}.(p_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2}\cdots(p_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k}}{b^w.m_0}.
\end{aligned}$$

Pelo algorítmo da divisão, temos que $(p_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1}.(p_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2}\cdots(p_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k} = M.m_0 + z$, com $0 \leq z < m_0$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{M.m_0+z}{b^w.m_0} = \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w}\frac{1}{m_0}.$$

Como q possui pelo menos um fator primo diferente dos fatores primos da base $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, temos que $0 \leq z < m_0 < b^w$, ou seja, $z < b^w$. Além disso,

$$\frac{1}{q} \cdot b^w = \frac{M.m_0 + z}{m_0} = M + \frac{z}{m_0} \quad \text{com} \quad 0 \leq \frac{z}{m_0} < 1, \quad \text{logo} \quad M < b^w.$$

Se s é o menor inteiro positivo, tal que $b^s \equiv 1 \pmod{m_0}$, então $b^s - 1 = m_0 u$, para algum inteiro u, então $u < b^s$. Portanto $uz < b^{w+s}$. Assim podemos escrever:
$M = a_{w-1}.b^{w-1} + a_{w-2}.b^{w-2} + \cdots + a_1.b + a_0 = (a_{w-1}a_{w-2}\cdots a_1 a_0)_b$ com $0 \leq a_k < b$, $k = 0, 1, 2, \ldots, w-1$ e com
$uz = d_{w+s-1}b^{w+s-1} + d_{w+s-2}b^{w+s-2} + \cdots + d_1 b^1 + d_0 = (d_{w+s-1}d_{w+s-2}\cdots d_1 d_0)_b$ com $0 \leq d_k < b$, $k = 0, 1, 2, \ldots, w+s-1$, dessa forma obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w}\frac{1}{m_0} = \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w}\frac{u}{b^s - 1} = \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w}\frac{u}{b^s}\left(\frac{1}{1 - b^{-s}}\right) \\
&= \frac{a_{w-1}.b^{w-1} + a_{w-2}.b^{w-2} + \cdots + a_1.b + a_0}{b^w} + \frac{zu}{b^{w+s}}\left(1 + \frac{1}{b^s} + \frac{1}{b^{2s}} + \frac{1}{b^{3s}} + \cdots\right) \\
&= \frac{a_{w-1}.b^{w-1} + \cdots + a_1.b + a_0}{b^w} + \frac{d_{w+s-1}b^{w+s-1} + \cdots + d_1 b^1 + d_0}{b^{w+s}}\left(1 + \frac{1}{b^s} + \frac{1}{b^{2s}} + \cdots\right) \\
&= 0,\underbrace{a_{w-1}\cdots a_2 a_1 a_0}_{w\text{ - dígitos}} + 0,\underbrace{000\cdots 0}_{w+s\text{ - zeros}}\ d_{w+s-1}\cdots d_1 d_0 + 0,\underbrace{000\cdots 0}_{w+2s\text{ - zeros}}\ d_{w+s-1}\cdots d_1 d_0 + \\
&+\ 0,\underbrace{000\cdots 0}_{w+3s\text{ - zeros}}\ d_{w+s-1}\cdots d_1 d_0 + 0,\underbrace{000\cdots 0}_{w+4s\text{ - zeros}}\ d_{w+s-1}\cdots d_1 d_0 + \cdots \\
&= (0,\underbrace{a_{w-1}\cdots a_2 a_1 a_0}_{w\text{ - algarismos}}\underbrace{\overline{d_{w+s-1}d_{s-2}\cdots d_2 d_1 d_0}}_{\textit{Período com s-algarismos}})_b.
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.4 : *Determinar a expansão hexadecimal de* $\frac{398131}{5591040}$.

Temos que: $\frac{398131}{5591040} = \frac{359.1109}{2^{12}.3.5.7.13} = \frac{359.1109}{16^3.3.5.7.13}$ e o comprimento da parte não periódica será 3.
Por outro lado, $\frac{398131}{5591040} = \frac{398131}{16^3.1365} = \frac{291.1365 + 916}{16^3.1365} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3}.\frac{1}{1365}$.
Como o $mdc(16, 1365) = 1$, o período s da expansão de $\frac{1}{1365}$ na base 16, é dado por $s = ord_{1365}(16)$.
Mas $\varphi(1365) = \varphi(3.5.7.13) = \varphi(3).\varphi(5).\varphi(7).\varphi(13) = 2.4.6.12 = 576$ e como $s \mid \varphi(1365)$, $s \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 64, 72, 96, 144, 192, 288, 576\}$.
Fazendo a verificação:

$$16^1 \equiv 16 \pmod{1365}, \quad 16^2 \equiv 256 \pmod{1365}\ e\ 16^3 \equiv 1 \pmod{1365}.$$

Com isso concluímos que $s = 3$. Por outro lado $16^3 \equiv 1 \pmod{1365} \;\Rightarrow\; 16^3 - 1 = 1365.k$, com $k \in \mathbb{N}$, verificamos facilmente que $k = 3$ e $\dfrac{1}{1365} = \dfrac{3}{16^3 - 1}$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{398131}{5591040} &= \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3}.\frac{1}{1365} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3}.\frac{3}{16^3 - 1} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3}.\left[\frac{3}{16^3}.\left(\frac{1}{1 - 16^{-3}}\right)\right] \\
&= \frac{291}{16^3} + \frac{2748}{16^6}.\left(1 + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{16^6} + \frac{1}{16^9} + \frac{1}{16^{12}} + \cdots\right) \\
&= \frac{291}{16^3} + \frac{2748}{16^6} + \frac{2748}{16^9} + \frac{2748}{16^{12}} + \frac{2748}{16^{15}} + \frac{2748}{16^{18}} + \frac{2748}{16^{21}} + \cdots \\
&= \frac{1.16^2 + 2.16 + 3}{16^3} + \frac{10.16^2 + 11.16 + 12}{16^6} + \frac{10.16^2 + 11.16 + 12}{16^9} + \\
&+ \frac{10.16^2 + 11.16 + 12}{16^{12}} + \frac{10.16^2 + 11.16 + 12}{16^{15}} + \cdots \\
&= \frac{1.16^2}{16^3} + \frac{2.16}{16^3} + \frac{3}{16^3} + \frac{10.16^2}{16^6} + \frac{11.16}{16^6} + \frac{12}{16^6} + \frac{10.16^2}{10^9} + \frac{11.16}{16^9} + \frac{12}{16^9} + \\
&+ \frac{10.16^2}{16^{12}} + \frac{11.16}{16^{12}} + \frac{12}{16^{12}} + \cdots \\
&= \frac{1}{16} + \frac{2}{16^2} + \frac{3}{16^3} + \frac{10}{16^4} + \frac{11}{16^5} + \frac{12}{16^6} + \frac{10}{10^7} + \frac{11}{16^8} + \frac{12}{16^9} + \frac{10}{16^{10}} + \\
&+ \frac{11}{16^{11}} + \frac{12}{16^{12}} + \frac{10}{16^{13}} + \cdots \\
&= (0,123ABCABCABCABC...\cdots)_{16} = (0,123\overline{ABC})_{16}
\end{aligned}$$

Finalmente, se $\dfrac{1}{q}$ gera uma dízima periódica simples de comprimento $q-1$, então outro fato bastante interessante pode ser notado. Se k é um número inteiro positivo, tal que $1 < k < q$, então, o período da expansão de $\dfrac{k}{q}$ em uma base b tem exatamente os mesmos algarismos ciclicamente permutados. Observe a expansão decimal de frações cujo denominador é 7, que contém 6 dígitos.

$$\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}, \quad \frac{2}{7} = 0,\overline{285714}, \quad \frac{3}{7} = 0,\overline{428571}, \quad \frac{4}{7} = 0,\overline{571428}$$

Eles têm os mesmos dígitos permutados ciclicamente. Devemos ter cuidado, no entanto, para lembrar que o período deve conter $q-1$ dígitos, como mencionado acima. Veja que na expansão decimal de: $\dfrac{1}{13} = 0,\overline{076923}$ e $\dfrac{3}{13} = 0,\overline{230769}$ temos os mesmos dígitos permutada ciclicamente em seus períodos, mas isto não vale para todos os k tal que $1 < k < q$. Por exemplo, $\dfrac{5}{13} = 0,\overline{384615}$.

Teorema 3.4 *Se $\frac{1}{q}$ é uma fração, cujo período contém $q-1$ dígitos, e b uma base numérica, tal que $mdc(b, q) = 1$, então o período da expansão na base b da fração $\frac{k}{q}$, em que $1 < k < q$, tem os mesmos algarismos ciclicamente permutados.*

Demonstração. De fato, uma condição necessária para o período da fração $\frac{1}{q}$ conter $q-1$ dígitos, é que cada número inteiro positivo inferior q apareça uma, e apenas uma vez, nos primeiros $q-1$ passos da divisão. Assim, k é um desses restos obtidos na divisão de 1 por q. O numerador k influi apenas para saber qual o primeiro algarismo periódico, depois que o primeiro ocorrer os demais se sucedem na mesma ordem cíclica. ∎

4 Conclusões

Apresentamos uma aplicação importante da função φ de Euler. Por meio desta função descrevemos como transformar as frações ordinárias irredutíveis em dízimas periódicas simples e compostas em qualquer base.

Referências

[1] HEFEZ, A. Elementos da aritmética, Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, Rio de Janeiro. 2006.

[2] ROSA, A.P. e SILVA, J.N. História de Fracções, *Gazeta da Matemática*, v.153, p.23-31, 2007.

[3] BULLYNCK, M. Decimal Periods and Their Tables: A German Research Topic (1765-1801), *ScienceDirect:Historia Mathematica*, v.36, p.137-160, 2009.

[4] DOLISI, E.E. Periodic Decimal Fractions, Tese de Doutorado, Teachers College of Emporia, Emporia/Kansas State, USA. 1973.

[5] LIMA, E.L. Voltando a falar sobre dízimas, *Revista do professor de matemática - RPM*, v.10, p.23-28, 1987.