Derivações sobre Anéis Polinomiais e os Polinômios de Darboux

Derivations on Polynomial Rings and the Darboux Polynomials

Wálmisson Régis de Almeida
UNIFEMM - Centro Universitário de Sete Lagoas, Sete Lagoas, MG
walmisson@unifemm.edu.br

Marcelo Oliveira Veloso
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, MG
veloso@ufsj.edu.br

Resumo: Este trabalho é um breve estudo sobre as derivações em anéis polinomiais e os polinômios de Darboux. Os dois resultados mais relevantes são a caracterização dos polinômios de Darboux lineares de qualquer derivação linear em n variáveis e o resultado de que toda derivação homogênea em duas variáveis tem polinômio de Darboux.

Palavras-chave: derivações; derivações homogêneas; polinômio de Darboux.

Abstract: This work is a brief study about derivations in polynomial rings and Darboux polynomials. The two most relevant results are the characterization of the linear Darboux polynomials of any linear derivation in n variables and the result that all homogeneous derivation in two variables have Darboux polynomial.

Key words: derivations; homogeneous derivation; Darboux polynomial.

1 Introdução

Ao ouvir a palavra derivação somos imediatamente remetidos às ideias de Newton e Leibniz relativas ao estudo de tangentes e taxas de variação instantânea de funções. Porém, o conceito de derivação abordado neste texto é mais amplo, uma extensão do operador derivação para qualquer estrutura de anel. Contudo, coincide com a derivada ordinária sobre o anel de polinômios em uma variável.

Em um trabalho sobre Equações Diferenciais, em 1878, no artigo *"Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré"*, o matemático Jean Gaston Darboux introduziu uma nova abordagem algorítmica para solução de algumas dessas ED's, na qual surgem os polinômios de Darboux. Esses polinômios apareceram como "pedaços" ou partes dos fatores integrantes para a solução de algumas ED's, como mostrado em [1]:

> *"Paralelamente, Darboux, em 1878, deu os primeiros passos para determinar algoritmicamente integrais primeiras, baseando o seu método em uma ligação entre a geometria algébrica e a busca dessas integrais. Ele mostrou como construir*

Recebido em 28/09/2016 - Aceito em 03/03/2017

as integrais primeiras de um campo vetorial polinomial que possui um número suficiente de curvas algébricas invariantes. Essas curvas são definidas por polinômios: os assim chamados polinômios de Darboux. Em geral, a tarefa mais complexa envolvendo os métodos darbouxianos é a determinação dos próprios polinômios de Darboux."

O principal objetivo desse trabalho é estudar as derivações polinomiais e os polinômios de Darboux, em especial as derivações homogêneas em duas variavéis e as lineares em várias variáveis. Além disso, servir como texto suplementar para estudantes que desejam dar os primeiros passos no estudo sobre derivações. As derivações de um anel estão relacionadas a vários problemas, como a Conjectura do Jacobiano e o Decimo Quarto Problema de Hilbert, em diversas áreas da Matemática, como Geometria Álgebrica e Equações Diferenciais (veja [1], [2], [3] e [4]), o que justifica o nosso interesse pelo tema.

A referência principal deste texto é o livro de Andrzej Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, [4], onde encontram-se a maioria dos resultados aqui enunciados. Neste texto procuramos utilizar conceitos álgebricos elementares, e apresentar diversos exemplos com o propósito de facilitar a assimilação do conteúdo pelo leitor.

Na seção 2 relembramos alguns conceitos básicos sobre o anel polinomial em várias variáveis. Na seção 3, definimos a aplicação derivação sobre um anel comutativo com unidade e listamos os resultados básicos que são utilizados direta ou indiretamente ao longo do texto. Em especial, apresentamos uma caracterização das derivações sobre um anel polinomial com coeficientes complexos, Teorema 3.1. Na subseção 3.1 explicitamos a relação entre derivações lineares e matrizes quadradas.

Na seção 4, é definido o polinômio de Darboux de uma derivação polinomial, os resultados básicos sobre polinômios de Darboux e alguns exemplos. Logo à seguir, iniciamos a procura por polinômios de Darboux em certas derivações. Na seção 5 estudamos os polinômios de Darboux lineares de uma derivação linear. E verificamos um interessante resultado (Teorema 5.1) que relaciona as derivações polinomiais e os polinômios de Darboux aos autovetores de certa matriz. A discussão se encerra na seção 6, onde verificamos que toda derivação homogênea do anel polinomial com duas variáveis tem polinômio de Darboux, Teorema 6.1 .

2 Anéis Polinomiais

O objeto central deste trabalho são as derivações sobre anéis polinomiais. Então, nessa seção, serão apresentadas as notações, definições e resultados relativos ao anel polinomial necessários ao longo do texto.

O conjuntos dos polinômios em n-variáveis com coeficientes complexos é denotado por $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Quando o número de variáveis for pequeno (menor que 5) vamos denotar as variáveis por x, y, z, t e s. Por exemplo, $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ é o anel polinomial em 4 variáveis.

Um ***monômio*** em n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é uma expressão algébrica

$$ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

onde a é um número complexo, chamado de coeficiente, e os inteiros não-negativos $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ são chamados de expoentes da respectiva variável.

Para facilitar a leitura, usamos a notação $m = ax^\alpha$ para denotar um monômio, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. O grau de um monômio (denotado por $gr(m)$) é a soma de todos os expoentes, ou seja,

$$gr(x^\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Quando $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ temos o monômio constante $ax^\alpha = a$. Logo, todo número complexo é um monômio. E tem grau zero se for não nulo e grau $-\infty$ se for zero, o monômio nulo.

Lembre que um polinômio p é uma soma de monômios $p = \sum a_\alpha x^\alpha$. O ***grau de um polinômio*** p, $(gr(p))$, é o maior grau de seus monômios. Ou seja,

$$gr(p) = max\{\alpha\} = max\{\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n\}.$$

É fácil verificar que a função grau satisfaz

$$gr(fg) = gr(f) + gr(g) \text{ e } gr(f+g) \leq max\{gr(f),\, gr(g)\}.$$

para todos $f,\, g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Um polinômio f é chamado ***homogêneo*** se todo os seus monômios tem o mesmo grau. É dito ***invertível*** se existe um polinômio g tal que $fg = 1$. Caso contrário, dizemos que f é ***não invertível***. É fácil ver que no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ o conjunto dos elementos invertíveis é igual ao corpo dos números complexos exceto o zero, ou seja, $\mathbb{C}^*$.

De forma análoga ao conceito de número primo, dizemos que um polinômio não nulo p em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é um ***polinômio irredutível*** se p não é invertível e não tem fatoração trivial, ou seja, para quaisquer $q,\, r \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $p = q \cdot r$ temos q ou r invertível ($q \in \mathbb{C}^*$ ou $r \in \mathbb{C}^*$. Caso contrário dizemos que p é ***composto*** ou ***redutível***.

A irredutibilidade depende do corpo dos coeficientes. Um polinômio pode ser redutível em um dado corpo e ser irredutível em outro. Por exemplo, $p(x) = x^2 + 4$ é um polinômio irredutível em $\mathbb{R}[x]$, mas é composto, em $\mathbb{C}[x]$, visto que $p(x) = (x + 2i)(x - 2i)$.

Dois polinômios f e g em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ são ***co-primos*** quando f e g não possuem fator comum em suas decomposições. É usual indicar que f e g são co-primos com a notação $mdc(f,\, g) = 1$.

Proposição 2.1 *Sejam f, g e $h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Se f divide gh e $mdc(f,\, g) = 1$, então f divide h.*

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [5] para anéis polinomiais em duas variáveis. O resultado pode ser estendido, visto que $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é um domínio de fatoração única. ■

3 Derivações

Nesta seção introduzimos o conceito de derivação sobre anéis, contudo o foco principal são as derivações em um anel polinomial de n-variavéis com coeficientes nos números complexos, $\mathbb{C}$. Em seguida, apresentamos alguns resultados sobre as derivações localmente nilpotentes (LND's) e sobre as derivações lineares. Dois teoremas finalizam a seção, relativos às derivações triangulares e as lineares.

Uma aplicação D sobre um anel A, $D : A \to A$, é dita uma ***derivação*** em A se

- D(a+b) = D(a)+ D(b)
- D(ab) = aD(b) + bD(a),

para todos a e $b \in A$.

A regra referente ao produto de dois elementos do anel é conhecida como a ***Regra de Leibniz***. Portanto o operador derivação D respeita a soma e satisfaz a Regra de Leibniz. Chamaremos $Der(A)$ o conjunto de todas as derivações no anel A. Denotamos por D^n a n-ésima composição da derivação D, sendo $D^0(a) = a$ a aplicação identidade do anel.

Exemplo 3.1 *No anel das matrizes quadradas de ordem n, $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, fixada uma matriz $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, definimos a aplicação em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ por*

$$D(A) = MA - AM.$$

Vejamos que D é uma derivação. De fato, para quaisquer matrizes quadradas A e B, temos

$$\begin{aligned} D(A+B) &= M(A+B) - (A+B)M \\ &= MA + MB - AM - BM \\ &= (MA - AM) + (MB - BM) \\ &= D(A) + D(B) \end{aligned}$$

E vale a regra de Leibniz

$$\begin{aligned} D(AB) &= M(AB) - (AB)M \\ &= MAB - AMB + AMB - ABM \\ &= (MA - AM)B + A(MB - BM) \\ &= D(A)B + AD(B). \end{aligned}$$

Vejamos alguns resultados básicos para o operador D.

Lema 3.1 *Seja A um anel e $D \in Der(A)$. Se $D(a) = 0$, então teremos $D(ab) = aD(b)$.*

Demonstração. De fato, pela regra de Leibniz temos

$$D(ab) = aD(b) + bD(a) = aD(b) + b(0) = aD(b).$$

■

Seja $D \in Der(A)$. Se $D(B) = 0$ para um subanel B do anel A dizemos que D é uma B***-derivação*** do anel A. O conjunto das B-derivações do anel A é denotado por $Der_B(A)$. Neste texto, toda derivação sobre o anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é uma $\mathbb{C}$-derivação.

Lema 3.2 *Seja $D_{\mathbb{Q}}$ uma derivação sobre o anel A. Dados a e $b \in A$ temos que*

$$D^k(ab) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^{k-i}(a) D^i(b).$$

Demonstração. Vamos provar a afirmativa acima por indução em k. Para $k = 1$ temos

$$\begin{aligned} D^1(ab) &= \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} D^{1-i}(a)D^i(b) \\ &= \binom{1}{0} D^{1-0}(a)D^0(b) + \binom{1}{1} D^{1-1}(a)D^1(b) \\ &= bD(a) + aD(b). \end{aligned}$$

Agora suponha a afirmação válida para todo $n < k$. Então

$$\begin{aligned} D^k(ab) &= D(D^{k-1}(ab)) \\ &= D\left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} D^{k-1-i}(a)D^i(b)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} D\left(D^{k-1-i}(a)D^i(b)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b) + D^{k-1-i}(a)D^{i+1}(b)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-1-i}(a)D^{i+1}(b)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (D^{k-i}(a)D^i(b)) \\ &= D^k(a)b + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} (D^{k-i}(a)D^i(b)) \\ &= D^k(a)b + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i}\right) (D^{k-i}(a)D^i(b)) + aD^k(b) \\ &= D^k(a)b + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + aD^k(b) \\ &= \sum_{i=0}^{k} D^{k-i}(a)D^i(b). \end{aligned}$$

Na segunda igualdade utilizamos a hipótese de indução e na penúltima a relação de Stiffel $\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} = \binom{k}{i}$.

■

Lema 3.3 *Seja A um anel comutativo. Se D e $E \in Der(A)$, então*

1. *$aD \in Der(A)$ para todo $a \in A$;*

2. $D + E \in Der(A)$.

Demonstração. Sejam $b, c \in A$. Observe que

$$aD(b+c) = a[D(b+c)] = a[D(b) + D(c)] = aD(b) + aD(c).$$

e

$$(aD)(bc) = a[D(bc)] = a[bD(c) + cD(b)] = baD(c) + caD(b) = b(aD)(c) + c(aD)(b).$$

Assim aD preserva a soma e a regra de Leibniz. Portanto aD é uma derivação em A. O item (2) é verificado de forma análoga.

■

O Lema 3.3 mostra que a soma de duas derivações e o múltiplo de uma derivação por um elemento do anel também são derivações.

Lema 3.4 *Seja D uma derivação do anel A. Então para todo $a \in A$ e todo $n \in \mathbb{N}$ temos a igualdade*

$$D(a^n) = na^{n-1}D(a).$$

Demonstração. Vamos verificar a igualdade por indução em n. Para $n = 1$ note que

$$D(a^1) = D(a) = 1D(a) = 1.1D(a) = 1a^{1-1}D(a).$$

Agora suponha a igualdade válida para $n = k > 1$, ou seja, $D(a^k) = ka^{k-1}D(a)$. Assim

$$\begin{array}{rcl} D(a^{k+1}) & = & D(aa^k) \\ & = & aD(a^k) + a^kD(a) \\ & = & aka^{k-1}D(a) + a^kD(a) \\ & = & ka^kD(a) + a^kD(a) \\ & = & (k+1)a^kD(a). \end{array}$$

Portanto $D(a^{k+1}) = (k+1)a^kD(a)$ e a afirmação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Com os resultados anteriores, temos todos elementos necessários para enunciar o teorema que caracteriza as derivações do anel $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Teorema 3.1 *Se D é uma $\mathbb{C}$-derivação em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, então D é da forma*

$$D = D(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + D(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ é a derivada parcial em relação a variável x_i.

Demonstração. Vamos verificar o resultado em duas variáveis. O caso com $n \geq 3$ variáveis é análogo. Seja $p \in \mathbb{C}[x, y]$, então $p = \sum_{i,j} a_{ij}x^iy^j$, onde $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Assim

$$
\begin{aligned}
D(p) &= D\left(\sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j\right)\\
&= \sum_{i,j} a_{ij} D(x^i y^j)\\
&= \sum_{i,j} a_{ij}[D(x^i)y^j + x^i D(y^j)]\\
&= \sum_{i,j} a_{ij}[ix^{i-1}D(x)y^j + x^i j y^{j-1}D(y)]\\
&= D(x)\sum_{i,j} i a_{ij}x^{i-1}y^j + D(y)\sum_{i,j} j a_{ij} x^i y^{j-1}\\
&= D(x)\frac{\partial}{\partial x}(p) + D(y)\frac{\partial}{\partial y}(p).
\end{aligned}
$$

Na segunda igualdade usamos que D é uma $\mathbb{C}$-derivação, na terceira a regra de Leibniz, e na quarta o Lema 3.4.

■

Corolário 3.1 *Dados $f_1, \ldots, f_n$ polinômios em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ existe uma única derivação tal que $D(x_i) = f_i$.*

Demonstração. Considere $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ e note que $D(x_i) = f_i$.

■

Observe que para definir uma derivação em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ basta escolher n polinômios $f_1, \ldots, f_n$ tais que $D(x_i) = f_i$.

Exemplo 3.2 *Considere uma derivação $D \in \mathbb{C}[x, y, z]$ definida por $D(x) = 2x^3yz^2 + ix^2y^5$, $D(y) = x^4y^3z^3 - 2xy^2z^2$ e $D(z) = 2x^2yz + (3 + 2i)x^2z^3 + 5y^3z^4$. Ou seja,*

$$D = (2x^3yz^2 + ix^2y^5)\frac{\partial}{\partial x} + (x^4y^3z^3 - 2xy^2z^2)\frac{\partial}{\partial y} + [2x^2yz + (3 + 2i)x^2z^3 + 5y^3z^4]\frac{\partial}{\partial z}.$$

3.1 Derivações Lineares

Uma derivação D no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é dita ***linear*** se

$$D\left(x_i\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

para todo $i = 1, \ldots, n$, onde a_{ij} são números complexos. A matriz $[\mathbf{D}] = [\mathbf{a_{ij}}]$ é dita ***matriz associada*** à derivação D.

Assim para obter uma derivação linear basta escolher para cada $D(x_i)$ uma combinação linear das variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Exemplo 3.3 *A derivação D do anel polinomial $\mathbb{C}[x, y, z]$ definida por*

$$D(x) = x + y + z, D(y) = 2x - iz \text{ e } D(z) = 3iy.$$

é linear. Utilizando a notação matricial temos

$$\begin{bmatrix} D(x) \\ D(y) \\ D(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -i \\ 0 & 3i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -i \\ 0 & 3i & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz associada à derivação linear D.

Lema 3.5 *Seja D uma derivação linear do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$. A k-ésima composição $D^k(x_i)$ pode ser dada, na forma matricial, por*

$$\begin{bmatrix} D^k(x_1) \\ D^k(x_2) \\ \vdots \\ D^k(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

em que $[a_{ij}]$ é a matriz da derivação D.

Demonstração. Provaremos a afirmativa por indução em k no anel $\mathbb{C}[x, y]$. O caso $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é idêntico. Seja

$$D = (ax + by)\frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial y},$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Para $k = 1$, o resultado é trivial, já que $D(x) = ax+by$ e $D(y) = cx+dy$, que na forma matricial produz:

$$\begin{bmatrix} D(x) \\ D(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Suponha a igualdade matricial válida $n = k > 1$. Ou seja, $\begin{bmatrix} D^k(x) \\ D^k(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Para facilitar a notação considere $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k$. Vejamos o que ocorre para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} D^{k+1}(x) &= D(D^k(x)) \\ &= D(px + qy) \\ &= (ax + by)\frac{\partial}{\partial x}(px + qy) + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial y}(px + qy) \\ &= pax + pby + qcx + qdy \\ &= (pa + qc)x + (pb + qd)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^{k+1}(y) &= D(D^k(y)) \\
&= D(rx+sy) \\
&= (ax+by)\frac{\partial}{\partial x}(rx+sy) + (cx+dy)\frac{\partial}{\partial y}(rx+sy) \\
&= rax + rby + scx + sdy \\
&= (ra+sc)x + (rb+sd)y
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{bmatrix} D^{k+1}(x) \\ D^{k+1}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}.$$

temos

$$\begin{bmatrix} D^{k+1}(x) \\ D^{k+1}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

■

4 Polinômios de Darboux

Nesta seção estudamos polinômios de Darboux de derivações em anéis polinomais. Listamos alguns resultados clássicos e mostramos a existência desses polinômios em alguns exemplos e no anel polinomial $\mathbb{C}[x]$.

Seja D uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Dizemos que um polinômio f, não constante, é um ***polinômio de Darboux*** da derivação D se $D(f) = hf$, para algum $h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. É fácil ver que se o polinômio h existe ele é único. Neste caso o polinômio h é dito um ***autovalor polinomial*** de f.

Exemplo 4.1 *Considere a derivação D em $\mathbb{C}[x, y]$ dada por*

$$D = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial}{\partial y}.$$

Seja $f = 3x^3 - 2xy^2$. Teremos

$$
\begin{aligned}
D(f) &= D(3x^3 - 2xy^2) \\
&= 3D(x^3) - 2D(xy^2) \\
&= 9x^2 D(x) - 2(D(x)y^2 + xD(y^2)) \\
&= 9x^2(2xy) - 2(2xy)y^2 + 4xy(3x^2) \\
&= 18x^3y - 4xy^3 - 12x^3y \\
&= 2y(3x^3 - 2xy^2) \\
&= hf.
\end{aligned}
$$

Assim f é um polinômio de Darboux de D e $h = 2y$ é um autovalor polinomial de f.

Vejamos duas proposições básicas sobre os polinômios de Darboux.

Proposição 4.1 *Seja D uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Se f é um polinômio de Darboux de D tal que $f = gh$, com $g, h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ e $mdc(g, h) = 1$, então g e h também são polinômios de Darboux para D.*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que que $D(f) = pf$. Então

$$D(g)h + gD(h) = D(gh) = D(f) = pf = pgh,$$

pela regra de Leibniz. Assim $D(g)h + gD(h) = pgh$ e temos

$$D(g)h = pgh - gD(h) = g(ph - D(h)).$$

Logo g divide $D(g)h$. Como g e h são co-primos, pela Proposição 2.1, g divide $D(g)$, ou seja, $D(g) = pg$, com $p \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ e g é um polinômio de Darboux de D. Analogamente prova-se que h é um polinômio de Darboux de D.

■

Proposição 4.2 *Seja f um polinômio de Darboux da derivação D do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Se $f = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_n}$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ e p_i é irredutível para todo $i = 1, 2, \ldots, m$, então cada $p_i^{\alpha_i}$ e cada p_i também são polinômios de Darboux para D.*

Demonstração. Como vimos na proposição 4.1, se $f = gh$ com $mdc(g, h) = 1$, então g e h são polinômios de Darboux de D. Então, para a primeira prova, basta considerarmos $g = p_i^{\alpha_i}$ e $h = p_1^{\alpha_1} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots p_n^{\alpha_n}$. Como cada um dos p_i's são coprimos, segue imediatamente.

Vejamos agora que cada p_i também é um polinômio de Darboux. Como $p_i^{\alpha_i}$ é polinômio de Darboux de D, então existe $q \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $D(p_i^{\alpha_i}) = qp_i^{\alpha_i}$. Segue do Lema 3.4 que

$$qp_i^{\alpha_i} = D(p_i^{\alpha_i}) = \alpha_i p_i^{\alpha_i - 1} D(p_i).$$

Logo $qp_i = \alpha_i D(p_i)$ e portanto $D(p_i) = [(\alpha_i)^{-1} q] p_i$.

■

Teorema 4.1 *Seja $D = f\dfrac{\partial}{\partial x}$ uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[x]$ e $m = gr(f)$. Então D tem um polinômio de Darboux se, e somente se, $gr(f) \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que $m = gr(f) \geq 1$. Segue do Teorema Fundamental da Álgebra, que

$$f = b_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_m)$$

onde $0 \neq b_n$ é o coeficiente do termo líder de f (coeficiente do termo de maior grau) e $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbb{C}$ são as raízes de f. Seja $p = (x - r_{i_1})(x - r_{i_2}) \cdots (x - r_{i_p})$ tal que $r_{i_j} \in \{r_1, \ldots, r_m\}$, onde $1 \leq j \leq m$ e $q = \dfrac{f}{p}$. Então:

$$\begin{aligned} D(p) &= f\frac{\partial}{\partial x}(p) \\ &= (pq)\frac{\partial}{\partial x}(p) \\ &= hp, \end{aligned}$$

e assim p é um polinômio de Darboux de D com autovalor $h = q\dfrac{\partial}{\partial x}(p)$.

Agora suponha que $gr(f) = 0$ e que a derivação D tem um polinômio de Darboux $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Assim $gr(p) \geq 1$ e $D(p) = hp$ para algum $h \in \mathbb{C}[x]$. Observe que $D(p) = f\dfrac{\partial}{\partial x}(p) = f(na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1)$, o que implica $gr(D(p)) = n - 1$, pois f é constante. De outro modo

$$gr(D(p)) = gr(hp) = gr(h) + gr(p) \geq n.$$

Ou seja, $n - 1 = gr(D(p)) \geq n$, que é um absurdo. Portanto a derivação D não tem polinômio de Darboux.

$\blacksquare$

Exemplo 4.2 *Seja* $D = (2x^3 + 4x^2 + 2x + 4)\dfrac{\partial}{\partial x}$ *uma derivação do anel polinomial* $\mathbb{C}[x]$. *Considere* $g = x^2 + 1$. *Teremos*

$$\begin{aligned} D(g) &= (2x^3 + 4x^2 + 2x + 4)\frac{\partial}{\partial_x}(x^2 + 1) \\ &= 2(x + i)(x - i)(x + 2)(2x) \\ &= (4x^2 + 8x)(x^2 + 1) \\ &= (4x^2 + 8x)g \end{aligned}$$

Logo, g é polinômio de Darboux de D. Observe que g é o produto dos fatores $(x + i)$ e $(x - i)$ da decomposição de $(2x^3 + 4x^2 + 2x + 4)$.

Uma derivação D no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é dita ***monomial*** se $D(x_i)$ é um monômio para todo $i = 1, \ldots, n$. Sendo assim $D = f_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ é uma derivação monomial se todo f_i é um monômio em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

Exemplo 4.3 *Seja D uma derivação no anel $\mathbb{C}[x,y,z,t]$ da forma*

$$D = 2xt^2\frac{\partial}{\partial x} + ix^2yz\frac{\partial}{\partial y} - 3zt\frac{\partial}{\partial z} + (2-i)yt^3\frac{\partial}{\partial t}.$$

D é uma derivação monomial, pois

$$D(x) = 2xt^2,\ D(y) = ix^2yz,\ D(z) = -3zt,\ D(t) = (2-i)yt^3$$

são todos monômios em $\mathbb{C}[x,y,z,t]$.

Exemplo 4.4 *Sejam $D = ax^iy^j\frac{\partial}{\partial x} + bx^ky^l\frac{\partial}{\partial y}$, $E = ax^i\frac{\partial}{\partial x} + bx^ky^l\frac{\partial}{\partial y}$, $F = ax^iy^j\frac{\partial}{\partial x} + by^l\frac{\partial}{\partial y}$ e $G = ax^i\frac{\partial}{\partial x} + by^l\frac{\partial}{\partial y}$ derivações monomiais em $\mathbb{C}[x,\, y]$, onde i, j, k e l são inteiros positivos e $a, b \in \mathbb{C}$. É fácil verificar que xy é um polinômio de Darboux para D, E, F e G. Vejamos a derivação D:*

De fato,

$$\begin{aligned} D(xy) &= ax^iy^j\frac{\partial}{\partial x}(xy) + bx^ky^l\frac{\partial}{\partial y}(xy) \\ &= ax^iy^j(y) + bx^ky^l(x) \\ &= (ax^{i-1}y^j + bx^ky^{l-1})(xy) \\ &= h(xy) \end{aligned}$$

Logo $D(xy) = h(xy)$, onde $h = ax^{i-1}y^j + bx^ky^{l-1}$, e assim xy é um polinômio de Darboux para D. A verificação para as derivações E, F e G são imediatas.

5 Darboux e Derivações Lineares

Nessa seção estudamos os polinômios de Darboux das derivações lineares. Verificamos quando uma derivação D linear no anel $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ possui polinômio de Darboux linear utilizando os autoespaços da transposta da matriz $[D]$.

Exemplo 5.1 *Seja D uma derivação linear em um anel polinomial $\mathbb{C}[x,y]$ dada por*

$$D = (2x+iy)\frac{\partial}{\partial x} + [(3-i)x + 2y]\frac{\partial}{\partial y}$$

e seja $f = (3-i)x^2 - iy^2$. Temos que f é um polinômio de Darboux da derivação D. De fato,

$$\begin{aligned} D(f) = D((3-i)x^2 - iy^2) &= (2x+iy)\frac{\partial}{\partial x}((3-i)x^2 - iy^2) + [(3-i)x+2y]\frac{\partial}{\partial y}((3-i)x^2 - iy^2) \\ &= (2x+iy)[(6-2i)x] + [(3-i)x+2y](-2iy) \\ &= (12-4i)x^2 - 4iy^2 \\ &= 4[(3-i)x^2 - iy^2] \\ &= 4f. \end{aligned}$$

No exemplo anterior o autovalor polinomial da derivação é o polinômio constante $h = 4$. Vejamos que isto sempre ocorre em uma derivação linear.

Lema 5.1 *Seja f um polinômio de Darboux linear de uma derivação linear D. Então o autovalor polinomial de f é um polinômio constante.*

Demonstração. Seja $f = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ um polinômio de Darboux da derivação linear

$$D = f_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

onde $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ são polinômios lineares. E seja h o autovalor polinomial de f. Ou seja, $D(f) = hf$. Assim

$$\begin{aligned} hf &= D(f) \\ &= f_1\frac{\partial}{\partial x_1}f + \cdots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n}f \\ &= f_1\frac{\partial}{\partial x_1}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) + \cdots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) \\ &= a_1f_1 + a_2f_2 + \cdots + a_nf_n \end{aligned}$$

Logo

$$hf = a_1f_1 + \cdots + a_nf_n.$$

Visto que $gr(a_1f_1 + \cdots + a_nf_n) = 1$ temos $gr(hf) = 1$. Como $1 = gr(hf) = gr(h) + gr(f)$ e $gr(f) = 1$, temos $gr(h) = 0$. Portanto h é um polinômio constante. ∎

Exemplo 5.2 *Considere a derivação linear $D = (-7x-3y)\frac{\partial}{\partial x}+(6x+4y)\frac{\partial}{\partial y}$ e $f = 2x+3y$. Vamos verificar que f é um polinômio de Darboux de D com $h = 2$. De fato:*

$$\begin{aligned} D(f) = D(2x+3y) &= (-7x-3y)\frac{\partial}{\partial x}(2x+3y) + (6x+4y)\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y) \\ &= 2(-7x-3y) + 3(6x+4y) \\ &= 4x + 6y \\ &= 2(2x+3y) \end{aligned}$$

No exemplo acima, se representarmos a transposta da matriz da transformação D, teremos

$$[D]^T = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar os autovalores da matriz acima. Sendo $h \in \mathbb{C}$ e $[I]$ a matriz identidade de ordem 2, basta determinarmos as raízes do polinômio característico.

$$\begin{aligned} det([D]-h[I]) &= det\left(\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}\right) \\ &= det\begin{bmatrix} -7-h & 6 \\ -3 & 4-h \end{bmatrix} \\ &= (-7-h)(4-h)+18 \\ &= h^2+3h-10 \end{aligned}$$

cujas raízes são -5 e 2. Observe que o valor de h encontrado no exemplo coincide com um dos autovalores da matriz transposta do operador D, e representando $f = 2x+3y$ como uma matriz coluna formada por seus coeficientes, $[f] = [2,\, 3]^T$, é fácil verificar que $[f]$ é um autovetor da matriz $[D]^T$. De fato, isso é sempre verdadeiro para as derivações lineares, como será demonstrado a seguir.

Antes, vamos introduzir a seguinte notação: dado $f = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ um polinômio linear em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, denote por $[f]$ a matriz coluna formada pelos coeficiente de f. Ou seja,

$$[f] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Desse modo, é possível construir uma representação matricial para $D(f)$ quando D é linear. De fato, sendo

$$D = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

teremos

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots a_{n2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [X][D]^T[f] = D(f),$$

em que $[X]$ é a matriz linha das variáveis $[x_1, \ldots, x_n]$.

Vamos mostrar o caso 2×2 e depois estendê-lo ao caso geral.

Proposição 5.1 *Seja D a derivação linear em $\mathbb{C}[x, y]$ definida por*

$$D = (a_{11}x + a_{12}y)\frac{\partial}{\partial x} + (a_{21}x + a_{22}y)\frac{\partial}{\partial y}$$

e $f = rx + sy$ um polinômio linear em $\mathbb{C}[x,\, y]$. Então f é um polinômio de Darboux de D se, e somente se, $[f]$ é um autovetor da matriz $[D]^T$ associado ao autovalor h.

Demonstração. Seja f é um polinômio de Darboux de D. Então $D(f) = hf$ e $h \in \mathbb{C}$, pelo Lema 5.1. Agora observe que

$$
\begin{aligned}
D(f)=hf \quad &\Leftrightarrow \quad r(a_{11}x+a_{12}y)+s(a_{21}x+a_{22}y)=h(rx+sy)\\
&\Leftrightarrow \quad (ra_{11}+sa_{21})x+(ra_{12}+sa_{22})y=rhx+shy\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} ra_{11}+sa_{21}=rh\\ ra_{12}+sa_{22}=sh\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\\ s\end{bmatrix}=h\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} r\\ s\end{bmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}-h\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} r\\ s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\end{bmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \left([D]^T-h[I]\right)[f]=[0],
\end{aligned}
$$

onde $[0]$ é a matriz coluna nula de ordem 2 e $[I]$ a matriz identidade de ordem 2. Portanto f é um polinômio de Darboux de D se, e somente se, $[f]$ é um autovetor da matriz $[D]^T$ associado ao autovalor h. ■

Agora, o caso geral.

Teorema 5.1 *Seja D uma derivação linear no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ e f um polinômio linear do anel $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$. Então f é um polinômio de Darboux da derivação D se, e somente se, $[f]$ é um autovetor da matriz $[D]^T$.*

Demonstração. Seja f é um polinômio de Darboux de D. Então $D(f)=hf$ e $h\in\mathbb{C}$ pelo Lema 5.1. Utilizando a representação matricial, observe que

$$
\begin{aligned}
D(f)=hf \quad &\Leftrightarrow \quad [X][D]^T[f]=[X]h[I][f]\\
&\Leftrightarrow \quad [D]^T[f]=h[I][f]\\
&\Leftrightarrow \quad \left([D]^T-h[I]\right)[f]=[0],
\end{aligned}
$$

onde $[X]$ é a matriz linha $[x_1,\ldots,x_n]$. Portanto f é um polinômio de Darboux de D se, e somente se, $[f]$ é um autovetor de $[D]^T$ associado ao autovalor h.

■

Exemplo 5.3 *Seja a derivação $D=(x-2y-2z)\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+(2y+3z)\dfrac{\partial}{\partial z}$ em $\mathbb{C}[x,y]$. Então a transposta da matriz associada à derivação D é a matriz*

$$
[D]^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 3\end{bmatrix}.
$$

Determinamos os seus autovalores e autovetores através equação matricial

$$
\begin{bmatrix} 1-h & 0 & 0\\ -2 & 1-h & 2\\ -2 & 0 & 3-h\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}
$$

O polinômio característico da matriz $[D]^T$ é o polinômio $p(h) = (1-h)^2(3-h)$. Assim os autovalores da matriz $[D]^T$ são $h = 1$ e $h = 3$. Os autovetores associados ao autovalor $h = 1$ é o conjunto $\{(z, y, z)^T \mid y, z \in \mathbb{C}$ e $yz \neq 0\}$ e ao autovetor $h = 3$ é o conjunto $\{(0, z, z)^T \mid z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0\}$.

Considere o autovetor $[f] = [2, 3, 2]^T$, associado ao autovalor $h = 1$. Logo o polinômio $f = 2x + 3y + 2z$ associdado ao vetor $[f]$ é um polinômio de Darboux para D. De fato,

$$
\begin{aligned}
D(f) &= (x-2y-2z)\frac{\partial}{\partial x}(2x+3y+2z) + y\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y+2z) + (2y+3z)\frac{\partial}{\partial z}(2x+3y+2z) \\
&= 2(x-2y-2z) + 3y + 2(2y+3z) \\
&= 2x - 4y - 4z + 3y + 4y + 4z \\
&= 2x + 3y + 2z \\
&= 1f.
\end{aligned}
$$

Agora associado ao autovalor $h = 3$ considere o autovetor $[f] = [0, 1+i, 1+i]^T$. Assim temos o polinômio $f = (1+i)y + (1+i)z$. Veja que

$$
\begin{aligned}
D(f) &= (x-2y-2z)\frac{\partial}{\partial x}f + y\frac{\partial}{\partial y}f + (2y+3z)\frac{\partial}{\partial z}f \\
&= y(1+i) + (2y+3z)(1+i) \\
&= y + iy + 2y + 2iy + 3z + 3iz \\
&= 3y + 3iy + 3z + 3iz \\
&= 3((1+i)y + (1+i)z) \\
&= 3f.
\end{aligned}
$$

Portanto $f = (1+i)y + (1+i)z$ também é um polinômio de Darboux para D.

6 Darboux e Derivações Homogêneas

Nesta seção verificamos que toda derivação homogênea em $\mathbb{C}[x, y]$ possui polinômio de Darboux. A prova desta afirmação (Teorema 6.1) consiste em exibir um algoritmo para obtenção de um polinômio de Darboux cada derivação homogênea.

Uma derivação D no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ é dita **homogênea de grau** m se $D(x_1), \ldots, D(x_n)$ são polinômios homogêneos de mesmo grau m.

Exemplo 6.1 *A derivação D no anel $\mathbb{C}[x, y]$ da forma*

$$D = (2x^3y - 7x^2y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (ix^2y^2 + 3xy^3)\frac{\partial}{\partial y}$$

é uma derivação homogênea de grau 4, pois:

$$D(x) = 2x^3y - 7x^2y^2 \text{ e } D(y) = ix^2y^2 + 3xy^3$$

são ambos polinômios homogêneos em $\mathbb{C}[x, y]$ de grau 4.

A igualdade do próximo lema é conhecida como ***igualdade de Euler***. A derivação

$$E = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

do anel polinomial em n-variavéis, é conhecida como ***derivação de Euler*** . Observe que $f = x_1 + \cdots + x_n$ é um polinômio de Darboux para E, já que $E(f) = f$.

Lema 6.1 *Seja f um polinômio homogêneo de grau m no anel polinomial em duas variáveis $\mathbb{C}[x, y]$. Então*

$$x\frac{\partial}{\partial x}(f) + y\frac{\partial}{\partial y}(f) = mf.$$

Demonstração. Considere a derivação $D = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Seja f um polinômio homogêneo de grau m, ou seja,

$$f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}y + a_{m-2}x^{m-2}y^2 + \cdots + a_1xy^{m-1} + a_0y^m.$$

com $a_m, a_{m-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, alguns possivelmente nulos. Dessa forma temos

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial}{\partial x}(f) + y\frac{\partial}{\partial y}(f) &= D(f) \\
&= x(ma_mx^{m-1} + \cdots + a_1y^{m-1}) + y(a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + ma_0y^{m-1}) \\
&= ma_mx^m + \cdots + a_1xy^{m-1} + a_{m-1}x^{m-1}y + \cdots + (m-1)a_1xy^{m-1} + ma_0y^m \\
&= ma_mx^m + ma_{m-1}x^{m-1}y + \cdots + ma_1xy^{m-1} + ma_0y^m \\
&= mf
\end{aligned}$$

■

Observe que o lema anterior mostra que a derivação de Euler

$$E = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$$

possui polinômio de Darboux.

O próximo lema é um resultado técnico que será utilizado na demostração do Teorema 6.1, à respeito dos polinômios de Darboux das derivações homogêneas de grau m.

Lema 6.2 *Sejam p e $q \in \mathbb{C}[x, y]$ polinômios homogêneos de grau m. Se $xq - yp = 0$, então $x - y$ divide $p - q$.*

Demonstração. Visto que p e q são polinômios homogêneos de grau m temos que

$$q = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1}y + \cdots + a_1xy^{m-1} + a_0y^m$$

e

$$p = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1}y + \cdots + b_1xy^{m-1} + b_0y^m,$$

onde os a_i's e b_i's são números complexos. Logo

$$xq = a_mx^{m+1} + a_{m-1}x^my + \cdots + a_1x^2y^{m-1} + a_0xy^m,$$

$$yp = b_m x^m y + b_{m-1} x^{m-1} y^2 + \cdots + b_1 x y^m + b_0 y^{m+1}$$

e portanto

$$xq - yp = a_m x^{m+1} + (a_{m-1} - b_m) x^m y + \cdots + (a_0 - b_1) x y^m - b_0 y^{m+1}.$$

Segue desta última igualdade e da hipótese, $xq - yp = 0$, que

$$a_m = b_0 = 0,\ a_{m-1} = b_m,\ a_{m-2} = b_{m-1}, \ldots,\ a_0 = b_1.$$

Logo temos

$$q = b_m x^{m-1} y + b_{m-1} x^{m-2} y^2 + \cdots + b_2 x y^{m-1} + b_1 y^m$$

e

$$p = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} y + \cdots + b_2 x^2 y^{m-2} + b_1 x y^{m-1}.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned}
p - q &= b_m x^m + (b_{m-1} - b_m) x^{m-1} y + (b_{m-2} - b_{m-1}) x^{m-2} y^2 \cdots + (b_1 - b_2) x y^{m-1} - b_1 y^m \\
&= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} y + \cdots + b_2 x^2 y^{m-2} + b_1 x y^{m-1} \\
&\quad - b_m x^{m-1} y - b_{m-1} x^{m-2} y^2 - \cdots - b_2 x y^{m-1} - b_1 y^m \\
&= (b_m x^{m-1} + b_{m-1} x^{m-2} y + \cdots + b_2 x y^{m-2} + b_1 y^{m-1})(x) + \\
&\quad (b_m x^{m-1} + b_{m-1} x^{m-2} y + \cdots + b_2 x y^{m-2} + b_1 y^{m-1})(-y) \\
&= (b_m x^{m-1} + b_{m-1} x^{m-2} y + \cdots + b_2 x y^{m-2} + b_1 y^{m-1})(x - y) \\
&= h(x - y),
\end{aligned}$$

em que $h = b_m x^{m-1} + b_{m-1} x^{m-2} y + \cdots + b_2 x y^{m-2} + b_1 y^{m-1}$. Assim $p - q = h(x - y)$ o que implica que $x - y$ divide $p - q$. ∎

Observe que a derivação de Euler é uma derivação homogênea de grau 1 (linear) e tem polinômio de Darboux em $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. O próximo teorema garante que toda derivação homogênea em $\mathbb{C}[x, y]$ tem polinômio de Darboux.

Teorema 6.1 *Seja D uma derivação homogênea de grau m do anel polinomial em duas variáveis $\mathbb{C}[x, y]$. Então D tem um polinômio de Darboux.*

Demonstração. Seja $D = p\dfrac{\partial}{\partial x} + q\dfrac{\partial}{\partial y}$, com p e q homogêneos de grau m. Considere $f = xq - yp$. Se $f \neq 0$ vejamos que $D(f) = hf$.

$$\begin{aligned}
D(f) &= p\frac{\partial}{\partial x}(f) + q\frac{\partial}{\partial y}(f) \\
&= p\frac{\partial}{\partial x}(xq - yp) + q\frac{\partial}{\partial y}(xq - yp) \\
&= p[q + x\frac{\partial}{\partial x}(q) - y\frac{\partial}{\partial x}(p)] + q[x\frac{\partial}{\partial y}(q) - p - y\frac{\partial}{\partial y}(p)] \\
&= px\frac{\partial}{\partial x}(q) - py\frac{\partial}{\partial x}(p) + qx\frac{\partial}{\partial y}(q) - qy\frac{\partial}{\partial y}(p)
\end{aligned}$$

Somando e subtraindo $py\dfrac{\partial}{\partial y}(q)$ e $qx\dfrac{\partial}{\partial x}(p)$, obtemos

$$\begin{aligned} D(f) &= p\left(x\frac{\partial}{\partial x}(q)+y\frac{\partial}{\partial y}(q)\right)-q\left(x\frac{\partial}{\partial x}(p)+y\frac{\partial}{\partial y}(p)\right)+(xq-yp)\left(\frac{\partial}{\partial y}(q)+\frac{\partial}{\partial x}(p)\right) \\ &= p(mq)-q(mp)+f\left(\frac{\partial}{\partial y}(q)+\frac{\partial}{\partial x}(p)\right) \\ &= hf, \end{aligned}$$

Na terceira igualdade temos $h=\left(\dfrac{\partial}{\partial y}(q)+\dfrac{\partial}{\partial x}(p)\right)$. A segunda igualdade segue do Lema 6.1 (lembre que p e q são homogêneos de grau m). Portanto f é um polinômio de Darboux de D, pois $D(f)=hf$.

Considere agora $f=0$. Ou seja, $xq-yp=0$. Segue do Lema 6.2 que $p-q=h(x-y)$ para algum $h\in\mathbb{C}[x, y]$. Agora observe que

$$\begin{aligned} D(x-y) &= p\frac{\partial}{\partial x}(x-y)+q\frac{\partial}{\partial y}(x-y) \\ &= p-q \\ &= h(x-y) \end{aligned}$$

E neste caso $x-y$ é um polinômio de Darboux da derivação D.

■

Exemplo 6.2 *Considere a derivação homogênea* $D=(x^2+2xy)\dfrac{\partial}{\partial x}+(2xy+y^2)\dfrac{\partial}{\partial y}$ *e seja* $f=x^2y-xy^2$. *Teremos:*

$$\begin{aligned} D(f) &= (x^2+2xy)\frac{\partial}{\partial x}(x^2y-xy^2)+(2xy+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^2y-xy^2) \\ &= (x^2+2xy)(2xy-y^2)+(2xy+y^2)(x^2-2xy) \\ &= 4x^3y-4xy^3 \\ &= (4x+4y)(x^2y-xy^2), \end{aligned}$$

ou seja, $D(f)=(4x+4y)f$ *e assim* x^2y-xy^2 *é um polinômio de Darboux da derivação homogênea* D. *Segue da Proposição* 4.1 *que* xy *e* $x-y$ *também serão polinômios de Darboux de* D.

Referências

[1] COSTA FILHO, J. A., Determinação de integrais primeiras liouvillianas em equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, Tese de Doutorado, UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

[2] BRUMATTI, P.R.; VELOSO M., On locally nilpotent derivations of Fermat Rings, *Algebra and Discrete Mathematics*, V.16, N.1, p.20–32, 2013.

[3] MERIGUE, L. C., Uma introdução às derivações localmente nilpotentes com uma aplicação ao 14º problema de Hilbert, Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

[4] NOWICKI, A., Polynomial derivations and their rings of constants, Uniwersytet Mikolaja Kopernika: Torun, 1994.

[5] BORIN JÚNIOR, A. M. S., Divisão de polinômios com duas variáveis, Dissertação (Mestrado em Matemática, UFTM - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Minas Gerais, 2013.

[6] ANTON, H.; RORRES, C., Álgebra Linear com Aplicações, 8a edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

[7] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y., Elementos de Álgebra, 5a. Edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[8] OLIVEIRA, B. N., Exemplos de derivações simples do anel de polinômios $K[x, y]$, Dissertação de Mestrado, UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2006.