Aproximações por racionais a números irracionais

Maria Cecília K. Aguilera-Navarro

Departamento de Matemática - UNICENTRO
85010-990 Guarapuava, PR

Valdir C. Aguilera-Navarro

Departamento de Física - UNICENTRO
85010-990 Guarapuava, PR

(*Recebido: 18 de janeiro de 2003*)

Resumo: *Desenvolve-se um algoritmo sistemático para se obter uma sucessão de números racionais que converge para números irracionais, algébricos ou transcendentes.*

Palavras-chave: *aproximantes de Padé, números irracionais, números transcendentes*

Abstract: *An algorithm is presented to obtain a sucession of rational numbers that converges to irrational numbers, algebraic or transcendent*

Key words: *Padé approximants, irrational numbers, transcendent numbers*

1 Introdução

A motivação deste trabalho veio da leitura de um artigo de Tom Apostol na revista *The College Mathematics Journal* (APOSTOL, 2001). Nesse trabalho, o autor deriva uma série de aproximações racionais para log(2) trabalhando com potências especiais de 2. No presente, desenvolvemos um procedimento diferente, que nos permite obter aproximações racionais, com precisão arbitrária, para números irracionais, tanto algébricos como transcendentes. O método usa propriedades dos aproximantes de Padé e é construído com um algoritmo bem definido e sistemático, no sentido de que se pode obter a aproximação seguinte por um procedimento bem estabelecido e metódico.

Na próxima seção, apresentamos um resumo da teoria dos aproximantes de Padé para dotar este trabalho de uma certa independência. Na seção 3, explicamos como o método pode ser utilizado para gerar uma sucessão de números racionais que se aproxima arbitrariamente de um dado número irracional, mesmo transcendente. Fazemos algumas aplicações do método na seção 4. Seguem a conclusão e a bibliografia.

2 Aproximantes de Padé

Nesta seção, apresentamos um resumo da teoria dos aproximantes de Padé. Para mais informações sobre esses aproximantes, sugerimos a bibliografia indicada no final do trabalho, em especial as referências BAKER, 1975 e AGUILERA-NAVARRO *et al.*, 1999.

Consideremos uma série de potência (não necessariamente infinita)

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots \tag{1}$$

com coeficientes f_i constantes e x podendo ser complexo. Associamos a (1) uma função racional por meio da relação:

$$\frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = [L/M]_{f(x)} = f(x) + O(x^{L+M+1}) \tag{2}$$

onde P_L e Q_M são polinômios definidos por

$$P_L(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_L x^L \tag{3}$$

e

$$Q_M(x) = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_M x^M \tag{4}$$

onde tomamos $q_0 = 1$ sem perda de generalidade.

A função racional definida em (2) se diz o aproximante de Padé LM associado à função $f(x)$. Quando o contexto permite, eliminamos o índice $f(x)$ em $[L/M]_{f(x)}$ em (2), simplificando, desta forma, a notação para $[L/M]$. A partir da definição, vemos que o aproximante de Padé $[L/0]$ coincide com a expansão original $f(x)$ até a ordem especificada.

Se $L = M$, o aproximante se diz diagonal.

Para podermos determinar todos os $L+M+1$ coeficientes dos polinômios $P_L(x)$ e $Q_M(x)$, necessitamos $L + M + 1$ peças de informação. Estas informações são fornecidas pelos coeficientes f_i em (1).

Reescrevendo (2), explicitamente, como

$$p_0 + p_1 x + \cdots + p_L x^L = (f_0 + f_1 x + \cdots)\,(1 + q_1 x + \cdots + q_M x^M) + O(x^{L+M+1}) \tag{5}$$

e comparando os coeficientes de mesmas potências de x, obtemos o seguinte conjunto de equações algébricas lineares para os coeficientes p_i e q_j

$$\begin{aligned}
p_0 &= f_0 \\
p_1 &= f_1 + f_0 q_1 \\
p_2 &= f_2 + f_1 q_1 + f_0 q_2 \\
&\vdots \\
p_L &= f_L + f_{L-1} q_1 + \cdots + f_0 q_L \\
0 &= f_{L+1} + f_L q_1 + \cdots + f_{L-M+1} q_M \\
0 &= f_{L+2} + f_{L+1} q_1 + \cdots + f_{L-M+2} q_M \\
&\vdots \\
0 &= f_{L+M} + f_{L+M-1} q_1 + \cdots + f_L q_M
\end{aligned} \tag{6}$$

com $f_n \equiv 0$ se $n < 0$, e $q_j \equiv 0$ se $j > M$.

Note-se que não necessitamos resolver todas as $L + M + 1$ equações do sistema (6). É suficiente resolver somente as últimas M equações, que são independentes dos coeficientes p_i, para determinar os coeficientes q_j e, então, substituí-los nas outras equações para obter os coeficientes p_i.

Como exemplo, estes são os aproximantes de Padé [1/1] e [2/2] associados com a expansão (1)

$$[1/1] = \frac{f_0 + \dfrac{(f_1^2 - f_0 f_2)}{f_1} x}{1 - \dfrac{f_2}{f_1} x} \tag{7}$$

$$[2/2] = \frac{f_0 + \left(f_1 + \dfrac{f_0(f_1 f_4 - f_2 f_3)}{f_2^2 - f_1 f_3}\right) x + \dfrac{f_2^3 - 2 f_1 f_2 f_3 + f_0 f_3^2 + f_1^2 f_4 - f_0 f_2 f_4}{f_2^2 - f_1 f_3} x^2}{1 + \dfrac{f_1 f_4 - f_2 f_3}{f_2^2 - f_1 f_3} x + \dfrac{f_3^2 - f_2 f_4}{f_2^2 - f_1 f_3} x^2} \tag{8}$$

Os aproximantes de Padé, geralmente, convergem muito mais rapidamente do que a série de Taylor, por exemplo. Além disso, esses aproximantes, geralmente, aumentam consideravelmente (algumas vezes até o infinito) o raio de convergência da expansão original. Infelizmente, há poucos teoremas gerais, a não ser para casos particulares muito restritos, como as séries de Stieltjes (BAKER, 1975).

3 O procedimento

É bastante simples a idéia que há por trás do procedimento que desenvolvemos. Note-se que o aproximante de Padé é uma função racional de uma variável x. Se os coeficientes f_i da expansão (1) forem racionais, os coeficientes p_i e q_j também o serão, pois são obtidos da solução do sistema de equações lineares algébricas (6). Se p_i e q_j não forem inteiros, como ocorre na maioria dos casos, sempre é possível fazer com que a expressão $P_L(x)/Q_M(x)$ em (2) contenha coeficientes inteiros tratando adequadamente o numerador e o denominador (multiplicando numerador e denominador por máximos divisores comuns, por exemplo). Desta forma, é sempre possível expressar o aproximante de Padé em termos de coeficientes p_i e q_j inteiros. Depois deste tratamento, o coeficiente q_0 pode não mais ter o valor 1, mas isto não implica nenhuma complicação.

Uma vez obtido o aproximante de Padé associado a alguma função $f(x)$, dando um valor x_0 a x, teremos uma aproximação racional ao número $f(x_0)$. Tomando diferentes valores para L e M, construímos uma sucessão de números racionais que convergem para o número $f(x_0)$.

Este procedimento é ilustrado com três exemplos na próxima seção.

4 Aplicações

Faremos três aplicações do método descrito na seção anterior. Na primeira aplicação, consideramos o número irracional (histórico, por sinal) $\sqrt{2}$. Em seguida, consideraremos os dois números transcedentes mais famosos, ou seja, o número π e a base dos logaritmos naturais e.

4.1 O número irracional algébrico $\sqrt{2}$

Consideremos a expansão (JOLLEY, 1961)

$$\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \cdots \tag{9}$$

que pode ser reescrita como

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n)!\, x^n}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2} \tag{10}$$

onde $m!$ representa o fatorial de m e é dado por $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$.

Tomando $x = 1$, teremos uma expressão que representa $\sqrt{2}$.

O aproximante de Padé [1/1] associado com a expansão (9) é dado por

$$[1/1]_{\sqrt{x+1}} = \frac{1 + \frac{3}{4}x}{1 + \frac{1}{4}x} \tag{11}$$

De acordo com o discutido na seção anterior, a expressão (11) pode ser reescrita como

$$[1/1]_{\sqrt{x+1}} = \frac{4 + 3x}{4 + x} \tag{12}$$

O aproximante de Padé [2/2], associado com a expansão (9), é dado por

$$[2/2]_{\sqrt{x+1}} = \frac{16 + 20x + 5x^2}{16 + 12x + x^2} \tag{13}$$

Na tabela a seguir, mostramos cinco aproximações racionais a $\sqrt{2}$ obtidas com os primeiros cinco aproximantes diagonais associados com a expansão (9).

L	1 (1 %)	2 (3×10^{-2} %)	3 (9×10^{-4} %)	4 (3×10^{-5} %)	5 (7×10^{-7} %)
$[L/L]_{\sqrt{2}}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{41}{29}$	$\frac{239}{169}$	$\frac{1393}{985}$	$\frac{8119}{5741}$

Tabela 1. Cinco aproximações racionais para o número irracional $\sqrt{2}$. Entre parêntesis, indicamos o erro relativo comparado com a aproximação $\sqrt{2} = 1,414213562$.

4.2 O número irracional transcendente π

Para obter uma seqüência de números racionais que converge para o número transcendente π, temos de encontrar uma representação em série para esse número. Isto pode ser conseguido a partir da expansão de McLaurin da função arco tangente (LARSON *et al.*, 1998)

$$\tan^{-1}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \tag{14}$$

Tomando $x = 1$ nesta expressão, obtemos

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \tag{15}$$

Podemos, então, construir aproximantes de Padé para a expansão (14), substituir x por 1 e multiplicar o resultado por 4. O aproximante de Padé diagonal [1/1] associado à expansão (14) é simplesmente x. Os aproximantes [2/2] e [3/3] são dados, respectivamente, por

$$[2/2]_{\arctan(x)} = \frac{x}{1 + \dfrac{x^2}{3}} = \frac{3x}{3 + x^2} \tag{16}$$

e

$$[3/3]_{\arctan(x)} = \frac{15x + 4x^3}{15 + 9x^2} \tag{17}$$

Note-se que os coeficientes p_0, p_2, q_1 e q_3 são nulos neste caso.

L	1 (27 %)	2 (4,5 %)	3 (0,8 %)	4 (0,1 %)	5 (2×10^{-2} %)	6 (4×10^{-3} %)	7 (7×10^{-4} %)
$[L/L]$	4	3	$\frac{19}{6}$	$\frac{160}{51}$	$\frac{1744}{555}$	$\frac{644}{205}$	$\frac{2529}{805}$

Tabela 2. Sete aproximações racionais para o número transcendente π. Entre parêntesis, indicamos o erro relativo comparado com a aproximação $\pi = 3,141592654$.

Na Tabela 2, mostramos as primeiras aproximações racionais ao número transcendente π que obtivemos com nosso procedimento.

Se estivéssemos interessados em obter uma seqüência que converge mais rapidamente a π, teríamos utilizado a expansão, menos conhecida,

$$\frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14} + \cdots$$

atribuída a Matsunaga Ryohitsu (SMITH, 1958). Para explorar esta expressão, partiríamos da função

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4 \cdot 6}x + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}x^2 + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14}x^3 + \cdots$$

e construiríamos, por exemplo, o aproximante de Padé [1/1] para obter $\pi = 3,129870130$, que nos dá um erro relativo de apenas 0,4%, o qual deve ser comparado com os 27% da Tabela 2.

4.3 O número irracional transcendente e

O número irracional transcendente e pode ser obtido tomando $x = 1$ em consecutivos aproximantes de Padé associados com a seguinte expansão (LARSON *et al.*, 1998)

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{18}$$

Os aproximantes [1/1] e [2/2] são dados, respectivamente, por

$$[1/1]_{\exp x} = \frac{1 + \frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2 + x}{2 - x} \tag{19}$$

e

$$[2/2]_{\exp x} = \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2} \tag{20}$$

Na Tabela 3, mostramos as primeiras aproximações racionais que obtivemos por meio dos aproximantes de Padé diagonais associados com a função $\exp(x)$.

L	1 (10%)	2 (0,15 %)	3 (10^{-3} %)	4 (4×10^{-6} %)	5 (3×10^{-8} %)
$[L/L]$	3	$\frac{19}{7}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{2721}{1001}$	$\frac{49171}{18089}$

Tabela 3. Cinco aproximações racionais para o número transcendente e. Entre parêntesis, indicamos o erro relativo comparado com a aproximação $e = 2,718281828$.

5 Conclusão

Neste trabalho, tivemos por objetivo apenas mostrar um método para se obter aproximações, por números racionais, a números irracionais, tanto algébricos como transcendentes. Exploramos apenas os aproximantes de Padé diagonais, isto é, aqueles cujo grau do polinômio do numerador é igual ao grau do polinômio do denominador ($L = M$). Para um estudo mais completo, com interesse em se examinar a velocidade de convergência, é necessário percorrer as múltiplas trajetórias definidas na tabela de Padé e considerar os casos $L \neq M$. Esse estudo, embora de interesse, foge ao escopo deste trabalho.

Embora as sucessões contruídas mostrem uma convergência ao valor exato, infelizmente não há teoremas que possam assegurar a convergência da sucessão obtida com os aproximantes de Padé. Enquanto não se descobrem esses teoremas, essa matéria continuará pertencendo aos domínios da Matemática Experimental.

6 Referências

AGUILERA-NAVARRO, M. C. K., AGUILERA-NAVARRO, V. C., FERREIRA, R. C. e TERAMON, N. Os aproximantes de Padé. *Matemática Universitária*, n. 26/27. 1999, p. 49.

APOSTOL, Tom M. Good rational approximations to logarithms, *College Mathematics Journal,* v. 32, n. 3, p. 172. 2001.

BAKER Jr, George A., *Essentials of Padé Approximantes.* New York: Academic Press. 1975.

JOLLEY, L. B. W. *Summation of series.* New York: Dover Publications. 1961.

LARSON, Roland E., HOSTETLER, Robert P. e EDWARDS, Bruce H. *Cálculo com Geometria Analítica.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos. 5^a ed. 1998, v. 2, p. 696.

SMITH, D. E. *History of Mathematics.* New York: Dover. 1958. v. 2, p. 312.