

# O fenômeno de quebra de simetria no modelo do oscilador anarmônico

**A. C. Mastine e P. L. Natti**

Departamento de Matemática  
Universidade Estadual de Londrina  
86051-990 Londrina, PR

**E. R. Takano Natti**

Pontifícia Universidade Católica do Paraná  
Campus Londrina  
86060-000 Londrina, PR

*(Recebido: 6 de dezembro de 2002)*

**Resumo:** *Neste artigo, descrevemos através de uma técnica não-perturbativa o problema de condição inicial, no contexto da Mecânica Quântica, de um sistema fermiônico autointeragente fora do equilíbrio na presença de um campo magnético. Em particular, no regime de campo médio, estudamos o fenômeno de quebra dinâmica de simetrias neste sistema, identificando os processos físicos associados.*

**Palavras-chave:** *dinâmica efetiva, quebra de simetria, oscilador anarmônico fermiônico*

**Abstract:** *In this article a non-perturbative time-dependent technique is used to treat the initial value problem, in Quantum Mechanics context, for a non-equilibrium self-interacting fermionic system in the presence of an external magnetic field. Particularly, in mean-field regime, we study the dynamical symmetry breaking phenomenon, identifying the physical processes associated.*

**Key words:** *effective dynamics, symmetry breaking, fermionic anharmonic oscillator*

## 1 Introdução

As ciências físicas baseiam-se em modelos matemáticos usados na descrição dos fenômenos naturais. Na maioria das vezes, esta descrição envolve equações diferenciais que não podem ser resolvidas analiticamente, isto é, não é possível encontrar soluções para estas equações em termos de funções matemáticas fundamentais. Normalmente, a descrição de sistemas físicos envolve um número grande de equações acopladas que devem ser resolvidas simultaneamente. Nestas situações, há duas possíveis abordagens. A primeira consiste em resolver o problema de forma numérica, através de cálculos aproximados realizados em computadores; a segunda, em resolver o problema estudando algum limite particular de interesse físico do sistema, limite em que o sistema tem um comportamento simplificado e, conseqüentemente, é descrito por equações diferenciais que podem ser resolvidas analiticamente.

Estamos interessados em procedimentos matemáticos que permitam descrever o comportamento de sistemas físicos utilizando a segunda abordagem. É conveniente lembrar que ambas as abordagens são complementares, pois, enquanto a abordagem numérica permite descrever a evolução do sistema numa grande variedade de regimes, a abordagem analítica simplificada das equações, que descreve o sistema num dado regime particular, permite interpretações que o cálculo numérico não pode fornecer, como veremos neste trabalho.

Abordagens analíticas simplificadas podem ser classificadas em perturbativas e não-perturbativas. As abordagens perturbativas, também chamadas aproximações perturbativas, caracterizam-se por resolverem as equações que descrevem a evolução de sistemas físicos num limite em que um parâmetro físico, que caracteriza o sistema, tende a zero, como, por exemplo, a intensidade da interação entre os constituintes do sistema (constante de acoplamento). Por outro lado, para sistemas de muitos corpos fortemente acoplados, a descrição perturbativa em termos da constante de acoplamento não é adequada. Em termos gerais, os métodos não-perturbativos aplicados a tais sistemas consistem em buscar uma descrição quântica completa e fechada, mas apenas de uma parte do sistema completo. O intuito desta abordagem consiste em simplificar a descrição do sistema e, com isto, permitir um tratamento analítico do mesmo. Esta técnica teve origem em problemas onde o sistema de interesse físico estava em contato com reservatórios térmicos ou ainda em problemas onde tão-somente os elementos diagonais do operador matriz densidade completa do sistema eram importantes. Nestes problemas, os graus de liberdade do reservatório ou da parte não-diagonal do operador matriz densidade eram considerados irrelevantes e formalmente eliminados através de um operador de projeção.

Entretanto, para sistemas de muitos corpos fortemente acoplados, é conveniente ter uma descrição onde cada parte do sistema é considerada relevante. Para tais sistemas, Willis e Picard [1] desenvolveram uma técnica não-perturbativa de projeção onde os graus de liberdade a serem eliminados eram as correlações (interações de 2 corpos, 3 corpos, ...,  $n$  corpos), de modo que esta abordagem é equivalente às aproximações do tipo campo médio ou do tipo Hartree-Fock para sistemas de muitos

corpos. O foco deste trabalho é utilizar esta técnica para estudar o fenômeno de quebra de simetria, geralmente associado a processos físicos do tipo transições de fase, em um sistema de férmions autointeragentes na presença de um campo magnético externo constante. Na seção 2, fazemos uma revisão das propriedades físicas de um sistema descrito pelo modelo do Oscilador Anarmônico Fermiônico na presença de um campo Magnético (MFAO). Na seção 3, realizando uma transformação do tipo BCS [2] e, utilizando a técnica de Willis e Picard [1], adaptada a sistemas de muitos férmions por Toledo Piza e Nemes [3], obtêm-se as equações diferenciais que descrevem a dinâmica efetiva do sistema. Na seção 4, discutimos as simetrias do sistema. Através de transformações particulares do tipo BCS, quebramos separadamente estas simetrias, identificando os processos físicos associados. Finalmente, na seção 5, reinterpretemos a dinâmica de campo médio de nosso sistema e apresentamos as conclusões deste trabalho.

## 2 Propriedades físicas do sistema

Métodos aproximativos para tratar problemas de condições iniciais em teorias quânticas são essenciais, já que o tratamento exato destes problemas raramente é possível, exceto via métodos numéricos [4]. O MFAO é um modelo exatamente solúvel que pode ser utilizado em vários campos da Física, além de ser suficientemente simples, o que faz dele um laboratório ideal para o estudo de novas técnicas e métodos da Física-Matemática.

Começamos a seção descrevendo as principais características do modelo. A hamiltoniana do oscilador anarmônico fermiônico, na presença de um campo magnético externo constante de intensidade  $B$ , é dada por

$$H = \hbar \omega \left( a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \right) + U \left( a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \right) + g_B B \left( a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \right) \quad (1)$$

onde  $a_i^\dagger$  e  $a_i$  são, respectivamente, operadores fermiônicos de spin  $1/2$  de criação e aniquilação, que satisfazem as relações usuais de anticomutação, enquanto índices  $i = 1, 2$  representam, respectivamente, as possíveis projeções de spins  $\uparrow$  e  $\downarrow$ . O parâmetro  $U$  representa uma interação repulsiva entre os elétrons do sistema e  $g_B$  é a intensidade de acoplamento do momento magnético intrínseco (spin) dos férmions com o campo magnético externo  $B$ . O nome do modelo deriva de uma analogia com o modelo do oscilador anarmônico bosônico.

Com o objetivo de melhor compreender a física descrita pelo modelo, estudemos os seus possíveis autoestados e respectivos autovalores. Sendo  $|0\rangle$  o vácuo do sistema, segue-se que

$$H |0\rangle = \left[ \hbar \omega \left( a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 \right) + U \left( a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2 \right) + g_B B \left( a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2 \right) \right] |0\rangle = 0 |0\rangle \quad (2)$$

Logo, o estado fundamental do sistema (vácuo) tem autovalor de energia associado nulo. Os demais autoestados da hamiltoniana são

$$H \left( a_1^\dagger | 0 \rangle \right) = [\hbar\omega + g_B B] \left( a_1^\dagger | 0 \rangle \right) \quad (3)$$

$$H \left( a_2^\dagger | 0 \rangle \right) = [\hbar\omega - g_B B] \left( a_2^\dagger | 0 \rangle \right) \quad (4)$$

$$H \left( a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \right) = [2\hbar\omega + U] \left( a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle \right) \quad (5)$$

Observe-se que estes são todos os possíveis autoestados da hamiltoniana (1). Para justificar este fato, notamos que  $H \hat{O} a_i | 0 \rangle = 0 | 0 \rangle$ , onde  $\hat{O}$  é um operador qualquer,  $H a_i^\dagger a_j a_j^\dagger | 0 \rangle = H a_i^\dagger | 0 \rangle$  e  $H a_1^\dagger a_2^\dagger a_j a_j^\dagger | 0 \rangle = H a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle$ , de modo que recaímos nos estados citados acima. Portanto, consistentemente com o Princípio de Pauli que proíbe a existência de férmions idênticos no mesmo estado quântico, nosso sistema tem quatro estados (autoestados) que correspondem às seguintes configurações:

- i)  $| 0 \rangle$ , estado este que chamamos de vácuo, o qual não contém nenhum férmion;
- ii)  $(a_2^\dagger | 0 \rangle)$  estado contendo um férmion com spin  $\downarrow$ ;
- iii)  $(a_1^\dagger | 0 \rangle)$  estado contendo um férmion com spin  $\uparrow$  e
- iv)  $(a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle)$  estado contendo dois férmion com spins opostos (emparelhados).

Observe-se também que a presença do campo magnético  $B$  elimina a degenerescência de energia dos estados  $(a_1^\dagger | 0 \rangle)$  e  $(a_2^\dagger | 0 \rangle)$ , não afetando os estados  $| 0 \rangle$  e  $(a_1^\dagger a_2^\dagger | 0 \rangle)$ , pois estes últimos têm momento magnético nulo. Segue-se que o estado inicial mais geral da hamiltoniana (1), que contém todos possíveis autoestados dados em (2-5), é dado por

$$| \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \rho \hat{1} + \beta a_1^\dagger + \alpha a_2^\dagger + \tau a_1^\dagger a_2^\dagger \right) | 0 \rangle \quad (6)$$

onde  $\rho$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$  e  $\tau$  são números complexos e  $N = \rho^2 + \beta^2 + \alpha^2 + \tau^2$  é a constante de normalização do estado. É conveniente notar que este estado não tem um número definido de férmions com spin  $\uparrow$  e  $\downarrow$ , sendo, portanto, chamado de estado de mistura.

Como consequência das considerações acima, ao contrário do Oscilador Anarmônico Bosônico, que apresenta somente soluções aproximadas (espectro de energia e estados associados) [5], o Oscilador Anarmônico Fermiônico permite obter soluções exatas, as quais descrevem a interação, em um único sítio, de dois férmions idênticos quando sujeitos a um potencial anarmônico e a um campo magnético externo. Finalmente, convém salientar que o modelo MFAO é uma versão simplificada dos modelos de Hubbard e de Ising [6], freqüentemente aplicados à descrição de fenômenos da Física do Estado Sólido, quando reduzidos à dimensão espacial zero (um único sítio ou orbital), de modo que somente os graus de liberdade internos são considerados. Mais detalhes a respeito das aplicações físicas do MFAO podem ser encontradas nas referências [7] e [8].

Na próxima seção, através de uma transformação do tipo BCS [2], obteremos a dinâmica efetiva na aproximação de campo médio para um sistema discreto de férmions descritos pelo MFAO.

### 3 Dinâmica efetiva do MFAO

A hamiltoniana (1) é descrita em termos dos operadores fermiônicos  $a_i^\dagger$  e  $a_i$  de spin  $1/2$ , que formam uma base conhecida como base de partículas. Realizando uma mudança de base, através de uma transformação do tipo BCS, geramos uma dinâmica efetiva, a qual minimiza, via um princípio variacional embutido na equação de Heisenberg, a evolução temporal dos observáveis de nosso sistema [9]. Consideramos a transformação definida por

$$\lambda_i^\dagger(t) = \sum_j [\omega_{ji}(t) a_j^\dagger + z_{ji}(t) a_j] \quad (7)$$

ou, numa forma mais explícita,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_1^\dagger(t) \\ \lambda_2^\dagger(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11}^*(t) & \omega_{21}^*(t) & z_{11}^*(t) & z_{21}^*(t) \\ \omega_{12}^*(t) & \omega_{22}^*(t) & z_{12}^*(t) & z_{22}^*(t) \\ z_{11}(t) & z_{21}(t) & \omega_{11}(t) & \omega_{21}(t) \\ z_{12}(t) & z_{22}(t) & \omega_{12}(t) & \omega_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_1^\dagger(t) \\ a_2^\dagger(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde definimos as matrizes  $\Omega_2$  e  $Z_2$  como

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \omega_{11}(t) & \omega_{12}(t) \\ \omega_{21}(t) & \omega_{22}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} z_{11}(t) & z_{12}(t) \\ z_{21}(t) & z_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Impondo que a transformação (8) deva ser unitária, de modo que os operadores de campo  $\lambda_i^\dagger(t)$  e  $\lambda_i(t)$ , para  $i = 1, 2$ , obedeam as mesmas regras de anticomutação de  $a_i^\dagger(t)$  e  $a_i(t)$  a tempos iguais, verificamos que as matrizes  $\Omega_2$  e  $Z_2$ , dadas em (9), necessitam de apenas quatro parâmetros reais independentes para satisfazer as condições de unitariedade [9]. Portanto, em termos dos parâmetros reais  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\gamma$  e  $\xi$ , construímos  $\Omega_2$  e  $Z_2$  como [10]

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \cos \gamma(t) \cos \xi(t) & -\exp[-i \varphi(t)] \sin \gamma(t) \cos \xi(t) \\ \exp[i \varphi(t)] \sin \gamma(t) \cos \xi(t) & \cos \gamma(t) \cos \xi(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} \exp[i \theta(t)] \sin \gamma(t) \sin \xi(t) & \exp(i [\theta(t) - \varphi(t)]) \cos \gamma(t) \sin \xi(t) \\ -\exp(i [\theta(t) - \varphi(t)]) \cos \gamma(t) \sin \xi(t) & \exp(i [\theta(t) - 2\varphi(t)]) \sin \gamma(t) \sin \xi(t) \end{bmatrix}$$

Convém salientar que a transformação (8) não é única. Poderíamos, por exemplo, ter utilizado funções do tipo hiperbólicas, desde que as condições de unitariedade fossem satisfeitas.

No formalismo de Willis e Picard, as equações de evolução temporal dos observáveis de um sistema fermiônico na aproximação de campo médio, em termos dos parâmetros acima definidos, são [3]

$$\begin{aligned} \dot{P}_2 + [P_2, \dot{\Omega}_2^\dagger \Omega_2 + \dot{Z}_2^\dagger Z_2]_- &= -i \text{Tr}([\lambda_i^\dagger \lambda_j, H] \mathcal{F}_0) \\ \{P_2, \dot{\Omega}_2^\dagger Z_2^* + \dot{Z}_2^\dagger \Omega_2^*\}_+ - (\dot{\Omega}_2^\dagger Z_2^* + \dot{Z}_2^\dagger \Omega_2^*) &= -i \text{Tr}([\lambda_i \lambda_j, H] \mathcal{F}_0) \end{aligned} \quad (11)$$

onde a hamiltoniana  $H$  do MFAO deve ser escrita na base de quase-partículas, utilizando (8) e (10);  $\mathcal{F}_0$  é a matriz densidade de campo médio [11] e  $P_2$  é a matriz de ocupação de quase-partículas, dada por

$$P_2 = \langle \lambda_i^\dagger(t) \lambda_j(t) \rangle = \begin{bmatrix} p_1(t) & 0 \\ 0 & p_2(t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

Calculando os traços das equações de movimento (11), obtemos [9,10]

$$\dot{p}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \dot{p}_2 = 0 \quad (13)$$

indicando que as ocupações das quase-partículas (orbitais naturais) são independentes do tempo, como esperado na aproximação de campo médio [3], e

$$\begin{aligned} -i g_B B (p_2 - p_1) \exp(-i \varphi) \sin(2 \gamma) = \\ (p_2 - p_1) \left[ -\exp(-i \varphi) \sin \gamma \cos \xi \frac{d}{dt} \{\cos \gamma \cos \xi\} \right. \\ \left. + \cos \gamma \cos \xi \frac{d}{dt} \{\exp(-i \varphi) \sin \gamma \cos \xi\} \right. \\ \left. + \exp[i(\theta - \varphi)] \cos \gamma \sin \xi \frac{d}{dt} \{\exp(-i \theta) \sin \gamma \sin \xi\} \right. \\ \left. - \exp[i(\theta - 2\varphi)] \sin \gamma \sin \xi \frac{d}{dt} \{\exp[-i(\theta - \varphi)] \cos \gamma \sin \xi\} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} i \frac{1}{2} (1 - p_1 - p_2) (2 \hbar \omega + U) \exp[-i(\theta - \varphi)] \sin(2 \xi) = \\ (1 - p_1 - p_2) \left[ -\exp(i \varphi) \sin \gamma \cos \xi \frac{d}{dt} \{\exp(-i \theta) \sin \gamma \sin \xi\} \right. \\ \left. - \cos \gamma \cos \xi \frac{d}{dt} \{\exp[-i(\theta - \varphi)] \cos \gamma \sin \xi\} \right. \\ \left. + \exp[-i(\theta - \varphi)] \cos \gamma \sin \xi \frac{d}{dt} \{\cos \gamma \cos \xi\} \right. \\ \left. + \exp[-i(\theta - 2\varphi)] \sin \gamma \sin \xi \frac{d}{dt} \{\exp(-i \varphi) \sin \gamma \cos \xi\} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Resolvendo as derivadas temporais em (14) e (15) e separando as partes real e imaginária, obtemos as demais equações diferenciais que descrevem a dinâmica efetiva de campo médio de nosso sistema, ou seja,

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= 0 \\ \dot{\xi} &= 0 \\ \dot{\varphi} &= 2 g_B B \\ \dot{\theta} &= 2 g_B B + 2 \hbar \omega + U\end{aligned}\tag{16}$$

Na próxima seção iremos interpretar os resultados acima obtidos, estudando o fenômeno de quebra de simetria neste sistema.

## 4 Quebras de simetrias do sistema

Para interpretar os resultados obtidos na seção precedente, inicialmente iremos identificar os processos físicos presentes na transformação BCS que geram as equações dinâmicas (16). Estudaremos separadamente estes processos de quebra de simetrias, interpretando-os. Primeiramente, consideremos a transformação BCS particular, que é implementada quando impomos que

$$\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \gamma = 0\tag{17}$$

na transformação BCS geral (8-10). As matrizes  $\Omega_2$  e  $Z_2$  escrevem-se agora como

$$\begin{aligned}\Omega_2 &= \begin{bmatrix} \cos \xi & 0 \\ 0 & \cos \xi \end{bmatrix} \\ Z_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \exp(i \theta) \sin \xi \\ -\exp(i \theta) \sin \xi & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{18}$$

de modo que os operadores de criação e aniquilação, na base de partículas e na base de quase-partículas, relacionam-se da seguinte forma

$$\begin{aligned}\lambda_1^\dagger &= [\cos \xi a_1^\dagger + \exp(i \theta) \sin \xi a_2] \\ \lambda_2^\dagger &= [-\exp(i \theta) \sin \xi a_1 + \cos \xi a_2^\dagger] \\ \lambda_1 &= [\cos \xi a_1 + \exp(-i \theta) \sin \xi a_2^\dagger] \\ \lambda_2 &= [-\exp(-i \theta) \sin \xi a_1^\dagger + \cos \xi a_2]\end{aligned}\tag{19}$$

Com o objetivo de identificar as simetrias quebradas devido à transformação (17-19), verificamos que o operador que conta o número de partículas com spin para cima na nova base, escreve-se, na base de partículas, como

$$\lambda_1^\dagger \lambda_1 = (\cos \xi)^2 a_1^\dagger a_1 + (\sin \xi)^2 a_2 a_2^\dagger + \exp(-i \theta) \sin \xi \cos \xi a_1^\dagger a_2^\dagger + \exp(i \theta) \sin \xi \cos \xi a_2 a_1 \quad (20)$$

Notamos que a simetria de número de partículas não é conservada, o que pode ser imediatamente observado nos terceiro e quarto termos do lado direito da equação (20), onde são, respectivamente, criadas e aniquiladas duas partículas. Por outro lado, a simetria de spin permanece intacta, pois todos os termos da equação (20) têm spin nulo, consistentemente com o fato da parametrização (19) conservar spin. Observando a estrutura das matrizes  $\Omega_2$  e  $Z_2$ , associamos a transformação (17-19) a uma quebra da simetria de rotação em  $SU(2)$ , do tipo emparelhamento, em nosso sistema [9, 12].

Calculando as equações diferenciais (11) com a parametrização (18), obtemos a dinâmica efetiva em campo médio do sistema devido à quebra de simetria de emparelhamento, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 0 \\ \dot{\theta} &= 2 \hbar \omega + U \end{aligned} \quad (21)$$

onde notamos a presença do parâmetro  $U$  da hamiltoniana (1), responsável pela intensidade da autointeração (emparelhamento) entre os férmions. O método utilizado acima para a obtenção das equações dinâmicas (21) é também chamado de aproximação do tipo Bogoliubov [2].

Fazemos, agora, uma segunda parametrização particular, impondo

$$\xi = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 0 \quad (22)$$

na transformação geral (8-10). Neste caso temos as seguintes formas para as matrizes  $\Omega_2$  e  $Z_2$

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\exp(-i \varphi) \sin \gamma \\ \exp(i \varphi) \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \\ Z_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

de modo que os operadores de criação e aniquilação relacionam-se como

$$\begin{aligned} \lambda_1^\dagger &= [\cos \gamma a_1^\dagger + \exp(i \varphi) \sin \gamma a_2^\dagger] \\ \lambda_2^\dagger &= [-\exp(-i \varphi) \sin \gamma a_1^\dagger + \cos \gamma a_2^\dagger] \\ \lambda_1 &= [\cos \gamma a_1 + \exp(-i \varphi) \sin \gamma a_2] \\ \lambda_2 &= [-\exp(i \varphi) \sin \gamma a_1 + \cos \gamma a_2] \end{aligned} \quad (24)$$



Reescrevendo, a partir de (24), o operador que conta o número de partículas com spin para cima na nova base,

$$\begin{aligned} \lambda_1^\dagger \lambda_1 &= (\cos \gamma)^2 a_1^\dagger a_1 + (\sin \gamma)^2 a_2^\dagger a_2 \\ &+ \exp(-i \varphi) \sin \gamma \cos \gamma a_1^\dagger a_2 + \exp(i \varphi) \sin \gamma \cos \gamma a_2^\dagger a_1 \end{aligned} \quad (25)$$

verificamos imediatamente que o número de partículas é conservado, consistentemente com o fato da parametrização (24) não misturar operadores de criação com operadores de aniquilação. Por outro lado, a simetria de spin não é conservada, pois o terceiro e quarto termos da equação (25) têm spins  $+1$  e  $-1$ , respectivamente. Observando  $\Omega_2$  e  $Z_2$ , associamos a transformação (22-24) a uma quebra da simetria de rotação em  $SU(2)$ , no número de spin, em nosso sistema [9, 12]. Enfim, calculando, neste caso, as equações diferenciais (11), obtemos a dinâmica efetiva em campo médio do sistema devido à quebra de simetria no número de spin, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= 0 \\ \dot{\varphi} &= 2 g_B B \end{aligned} \quad (26)$$

onde notamos que a autointeração (emparelhamento) entre os férmions do sistema, caracterizada pelo parâmetro  $U$  da hamiltoniana (1), não está presente nas equações dinâmicas (26), consistentemente com o fato de a simetria de número de partículas permanecer intacta. O método utilizado acima para a obtenção das equações dinâmicas (26) é também chamado de aproximação do tipo Hartree-Fock [2].

Restam, ainda, quatro outras possíveis transformações particulares do tipo BCS que podem ser implementadas a partir da transformação geral (8-10), ou seja, quando  $\xi = 0$  e  $\gamma = 0$ ; quando  $\xi = 0$  e  $\varphi = 0$ ; quando  $\varphi = 0$  e  $\theta = 0$ , e quando  $\theta = 0$  e  $\gamma = 0$ . Verifiquemos se existem outros processos físicos (quebra de simetrias) associados a estas transformações. Consideramos primeiramente a parametrização implementada quando impomos

$$\xi = 0 \quad \text{e} \quad \gamma = 0 \quad (27)$$

na transformação geral (8-10). As matrizes  $\Omega_2$  e  $Z_2$  adquirem a seguinte estrutura

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

implicando numa transformação identidade. Neste caso, como não ocorre quebra de simetria, não há uma dinâmica efetiva associada (gerada).

Consideremos, a seguir, a transformação particular BCS implementada quando

$$\xi = 0 \quad \text{e} \quad \varphi = 0 \quad (29)$$

Neste caso, as matrizes  $\Omega_2$  e  $Z_2$  são dadas por

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Observe-se que a transformação (30) é real (ortogonal) e que o parâmetro  $\theta$ , devido à estrutura escolhida para a transformação BCS geral (8-10), torna-se arbitrário. Calculando as equações dinâmicas (11) com esta parametrização, obtemos

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{e} \quad \sin 2 \gamma = 0 \quad (31)$$

ou ainda,

$$\gamma = k \frac{\pi}{2} \quad \text{para} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{com} \quad \theta \text{ arbitrário} \quad (32)$$

Substituindo (32) em (30), notamos que a transformação (29-30), dadas as condições iniciais para  $\gamma$  e  $\theta$ , é identidade, de modo que novamente não há uma dinâmica efetiva (evolução temporal) gerada. Tal situação estática, consistente com o fato de a transformação ser ortogonal, corresponde simplesmente a uma troca de rótulos de operadores, dada pelas equações (30-32), não havendo quebra de simetria associada.

Analogamente, a transformação BCS, implementada quando

$$\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 0 \quad (33)$$

gera, a partir de (11), equações estáticas para os parâmetros  $\gamma$  e  $\xi$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= 0 \quad \text{e} \quad \sin 2 \gamma = 0 \\ \dot{\xi} &= 0 \quad \text{e} \quad \sin 2 \xi = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned} \gamma &= k \frac{\pi}{2} \quad \text{com} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \xi &= k \frac{\pi}{2} \quad \text{com} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (35)$$

não havendo, portanto, fenômeno de quebra de simetria associado.

Enfim, resta-nos estudar a transformação gerada quando tomamos

$$\gamma = 0 \quad \text{e} \quad \theta = 0 \quad (36)$$

em (8-10). Neste caso, as matrizes  $\Omega_2$  e  $Z_2$  adquirem a seguinte estrutura

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \cos \xi & 0 \\ 0 & \cos \xi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0 & \exp(-i\varphi) \sin \xi \\ -\exp(-i\varphi) \sin \xi & 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Calculando as equações diferenciais (11) com a parametrização (36-37), obtemos as equações dinâmicas

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= 0 \\ \dot{\varphi} &= 2 \hbar \omega + B\end{aligned}\quad (38)$$

as quais são idênticas àquelas da primeira parametrização, exceto por uma troca de rótulo, ou seja, neste caso, o parâmetro  $\varphi$  desempenha o mesmo papel que o parâmetro  $\theta$  desempenhava em (21). Tal afirmação pode ser comprovada observando-se as estruturas das matrizes  $\Omega_2$  e  $Z_2$ , dadas em (18) e em (37). Portanto, podemos concluir que esta transformação também está associada à quebra de simetria de número de partículas.

Assim, verificamos que o fenômeno de quebra de simetrias de número de partículas (férmions) e de número de spins, implementadas através da transformação do tipo BCS (8-10), são responsáveis pela dinâmica efetiva (16) gerada em nosso sistema.

## 5 Reinterpretação da dinâmica efetiva de campo médio

Começamos discutindo a interpretação dada por Thomaz e Toledo Piza [10] para a dinâmica efetiva do MFAO. Uma Hamiltoniana efetiva clássica  $H_{ef}$ , que gera a dinâmica de campo médio das variáveis  $\gamma$ ,  $\xi$ ,  $\varphi$  e  $\theta$ , dada em (16), satisfaz, por exemplo, as equações

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= 2 g_B B = \frac{\partial}{\partial \gamma} H_{ef}(\gamma, \xi, \varphi, \theta) \\ \dot{\gamma} &= 0 = - \frac{\partial}{\partial \varphi} H_{ef}(\gamma, \xi, \varphi, \theta) \\ \dot{\theta} &= 2 g_B B + 2 \hbar \omega + U = \frac{\partial}{\partial \xi} H_{ef}(\gamma, \xi, \varphi, \theta) \\ \dot{\xi} &= 0 = - \frac{\partial}{\partial \theta} H_{ef}(\gamma, \xi, \varphi, \theta)\end{aligned}\quad (39)$$

Integrando as equações acima, obtemos de imediato que esta Hamiltoniana efetiva clássica é dada por

$$H_{ef} = (2 g_B B + 2 \hbar \omega + U) \xi + (2 g_B B) \gamma \quad (40)$$

Para interpretar a física associada à hamiltoniana acima, devemos notar que, devido à escolha da estrutura (39), os parâmetros  $\varphi$  e  $\theta$  correspondem a coordenadas generalizadas, enquanto  $\gamma$  e  $\xi$  correspondem a momentos generalizados. Notando que a hamiltoniana (40) é função apenas dos parâmetros  $\gamma$  e  $\xi$ , e que os mesmos aparecem acoplados ao campo magnético  $B$ , concluímos que  $\gamma$  e  $\xi$  podem ser associados a momentos magnéticos (spins). Para melhor justificar a interpretação acima, definimos as quantidades

$$\begin{aligned}
j_1(t) &= \cos \gamma(t) \\
\alpha_1(t) &= \theta(t) \\
j_2(t) &= \cos \xi(t) \\
\alpha_2 &= \varphi(t)
\end{aligned} \tag{41}$$

onde os momentos  $j_1$  e  $j_2$  são conjugados aos ângulos  $\theta$  e  $\varphi$ , respectivamente. Observe-se que a hamiltoniana

$$H_{ef}(\alpha_1, \alpha_2, j_1, j_2) = (2 g_B B + 2 \hbar \omega + U) j_1 + (2 g_B B) j_2 \tag{42}$$

tem as mesmas equações de movimento (39). Neste sentido, dizemos que as hamiltonianas dadas em (40) e (42) são matematicamente equivalentes. A partir de (42), verificamos que, dadas as condições iniciais para  $\gamma$  e  $\xi$ , segue-se que os momentos  $j_1$  e  $j_2$  são constantes, pois  $\dot{\gamma} = \dot{\xi} = 0$ , assumindo valores tais que

$$-1 \leq j_1 \leq +1 \quad \text{e} \quad -1 \leq j_2 \leq +1 \tag{43}$$

Assim, a hamiltoniana (42), dada em termos de variáveis ângulo-ação, descreve o movimento angular de precessão de duas partículas clássicas independentes (sem autointeração), com momentos magnéticos unitários  $\vec{j}_1$  e  $\vec{j}_2$ , na presença de um campo magnético externo  $\vec{B}$ . Nesta descrição, as variáveis do tipo ação  $j_1$  e  $j_2$ , associadas aos ângulos  $\alpha_1(t) = \theta(t)$  e  $\alpha_2 = \varphi(t)$ , respectivamente, representam as projeções constantes dos momentos angulares de precessão  $\vec{j}_1$  e  $\vec{j}_2$  na direção do campo magnético externo. Conseqüentemente,  $\theta(t)$  e  $\varphi(t)$  são os ângulos longitudinais da precessão de  $\vec{j}_1$  e  $\vec{j}_2$ , enquanto as variáveis angulares  $\gamma$  e  $\xi$  são as colatitudes entre o campo magnético externo  $\vec{B}$  constante e os momentos angulares de precessão  $\vec{j}_1$  e  $\vec{j}_2$ , respectivamente.

Portanto, concluímos que a dinâmica efetiva de campo médio de um sistema quântico fermiônico autointeragente de spin 1/2 descrito pelo MFAO, quando sujeito a quebras de simetrias de número e spin, é matematicamente idêntica à dinâmica de um sistema clássico de dois momentos angulares unitários e independentes, em presença de um campo magnético externo constante [10].

Em resumo, via um princípio variacional embutido na equação de Heisenberg, obtivemos a dinâmica efetiva (16) para um sistema quântico fermiônico de spin 1/2, descrito pela hamiltoniana do MFAO (1). Tal procedimento foi realizado na aproximação de campo médio, equivalente à aproximação de Hartree-Fock-Bogoliubov dependente do tempo (TDHFB), onde a variação dos parâmetros da transformação BCS (8-10) geraram a dinâmica efetiva obtida. Verificamos, na seção 4, que os fenômenos físicos que geraram esta dinâmica efetiva estão associados às quebras de simetrias de número de partículas (férmions) e de número de spins. Enfim, salientamos que foi devido ao fato de termos realizado um tratamento analítico para nosso sistema, que, na seção 5, foi possível obter uma equivalência matemática entre nosso sistema quântico e um sistema clássico. Tais equivalências são desejáveis, uma vez que permitem melhor compreensão de processos físicos em sistemas quânticos.

## Referências

- [1] C. Willis e R. Picard, *Physical Review* v. A9, p. 1343, 1974.
- [2] P. Ring e P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, New York: Springer-Verlag Inc., 1980.
- [3] M. C. Nemes e A. F. R. de Toledo Piza, *Physica* v. 137A, p. 367, 1986;  
A. F. R. de Toledo Piza, *Dinâmica Efetiva de Subsistemas e a Teoria de Muitos Corps*, Curso da I Escola de Pós-Graduação de Física do Nordeste. João Pessoa, 1987.
- [4] E. R. Takano Natti e A. F. R. de Toledo Piza, *Physica* v. A 236, p. 321, 1997.
- [5] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*. California: The Benjamin/Cummings Publishing Company Inc. 1985.
- [6] S. R. A. Salinas, *Introdução à Física Estatística*, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1997.
- [7] S. M. de Souza, S. M. de Oliveira e M. T. Thomaz, *American Journal of Physics*, v. 60, p. 1122, 1992.
- [8] M. C. D. Barrozo, M. T. Thomaz e A. F. R. de Toledo Piza, *American Journal of Physics*, v. 63, p. 463, 1995.
- [9] A. C. Mastine, *Dinâmica de campo médio de um sistema fermiônico descrito pelo oscilador anarmônico na presença de campo magnético*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, 2002.
- [10] M. T. Thomaz e A. F. R. de Toledo Piza, *Physica*, v. A218, p. 237 1995.
- [11] J. des Cloiseaux, *Problème à N Corps*, École d'été de Physique Théorique. Les Houches: Gordon and Breach, 1967.
- [12] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge: Cambridge University Press, 1985.