

# Localização de imagens em um sistema de espelhos angulares por meio de álgebra matricial

W. Gallêas<sup>1</sup> e V. M. Aquino<sup>2</sup>

Departamento de Física - UEL  
86051-990 Londrina, PR - Brasil

(Recebido: 5 de dezembro de 2001)

**Resumo:** Neste trabalho, as posições angulares das imagens de um objeto puntiforme em um sistema de espelhos angulares são obtidas por meio de operações sucessivas geradas por matrizes de rotação, de reflexão e produtos entre essas matrizes. O método de solução permite uma maior familiaridade dos estudantes com a álgebra matricial, a qual nem sempre é ensinada aos estudantes no estágio inicial dos cursos de graduação, época em que estudam óptica geométrica, assim como possibilita a solução completa do problema, obtenção do número de imagens e a posição angular das mesmas.

**Palavras-chave:** espelhos angulares, imagens em sistemas de espelhos angulares, óptica e cálculo matricial

**Abstract:** The determination of image positions of a point object in a system of angular mirrors is derived by successive operations generated by reflection and rotation matrices, and their product. The method is a pedagogical way to introduce students to the matrix formalism.

**Key words:** angular mirrors, images in systems of angular mirrors, optics and matrix algebra

---

<sup>1</sup>batosai111@hotmail.com

<sup>2</sup>verissim@sica.uel.br

## 1 Introdução

As posições das imagens de um objeto pontual, formadas por um sistema de dois espelhos planos que formam entre si um ângulo genérico  $\alpha$ , podem ser encontradas por métodos geométricos. O número dessas imagens apresenta-se como função do ângulo  $\alpha$  e, em alguns casos da posição do objeto na região entre os espelhos. A solução parcial desse problema pode ser encontrada em textos básicos de física, apresentando como principais resultados que tais imagens são dispostas sobre uma circunferência de raio  $r$ , distância entre o ponto objeto e a linha de intersecção entre os espelhos e uma relação entre o número de imagens  $n$  e o ângulo  $\alpha$  para valores discretos desse ângulo. A ótica geométrica é ensinada a estudantes do curso de física, de uma maneira geral, dissociada da álgebra matricial, existindo poucos textos onde tal conteúdo é desenvolvido com o auxílio de matrizes (ver, por exemplo, as referências [1] e [2]), onde a refração nas interfaces, a propagação dentro e fora de lentes e sistemas óticos são analisados com a utilização desse recurso. Neste trabalho, as posições angulares das imagens do ponto objeto em um sistema de espelhos planos são obtidas por meio de transformações geradas por matrizes de rotação entre sistemas com eixos  $x$  e  $x'$  pertencentes aos planos dos espelhos, transformações de reflexão e transformações geradas por combinações do produto entre essas matrizes. O método de solução permite não só uma maior familiaridade dos estudantes com álgebra matricial, a qual nem sempre é aprendida pelos estudantes no estágio inicial dos cursos de graduação, licenciatura/bacharelado, época em que estudam ótica geométrica, assim como possibilita a solução completa do problema, ou seja, obtenção do número de imagens e posição angular das mesmas para quaisquer valores do ângulo  $\alpha$ . Na seção 2, apresentamos o problema, os resultados já conhecidos e os elementos algébricos necessários para a sua solução, utilizando-se as matrizes de transformação. Na seção 3, a análise dos resultados obtidos na seção 2 é efetuada, o número de imagens e a posição angular das mesmas são calculados. Finalmente, na seção 4, uma ilustração do método é efetuada para uma situação particular e os resultados já conhecidos por utilização de outros métodos são recuperados.

## 2 Imagens geradas por um sistema de dois espelhos planos

Seja o problema encontrar-se as imagens de um ponto objeto  $I_0$  geradas por um sistema de espelhos, conforme figura 1.

As imagens podem ser encontradas por métodos geométricos (ver, por exemplo, as referências [3] e [4]) e estão distribuídas sobre uma circunferência de raio igual à distância entre o ponto objeto e a linha de intersecção entre os espelhos. O número  $n$  de imagens formadas é dado pela expressão:

$$n = \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \quad (1)$$

válida nos casos:

- (a) quando a relação  $\frac{2\alpha}{\theta_0}$  é um número par, qualquer que seja a posição do objeto  $I_0$  entre os dois espelhos;
- (b) quando a relação  $\frac{2\alpha}{\theta_0}$  é um número ímpar, estando o objeto no plano bissetor do ângulo alfa.

Como forma de resolver o problema, vamos separar as imagens em dois conjuntos **A** e **B** (ver figura 2), onde as imagens do conjunto **A** constituem-se da imagem do objeto  $I_0$  no espelho *A*,  $I_1^A$ , a imagem em *B* de  $I_1^A$  tomado como objeto,  $I_2^A$ , e assim sucessivamente. O conjunto **B**, da mesma forma, contitue-se da primeira imagem de  $I_0$  observada em *B*,  $I_1^B$  e todo o conjunto proveniente desta. Tais processos são realizados quando uma imagem é produzida na região entre o prolongamento dos espelhos denominada zona morta.

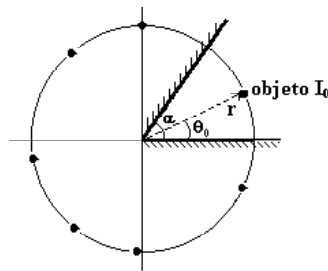


Figura 1. Ilustração do sistema de espelhos angulares.  $\alpha$  é o ângulo de abertura entre os planos dos espelhos e o ponto objeto  $I_0$  possui coordenadas polares  $r$  e  $\theta_0$ .

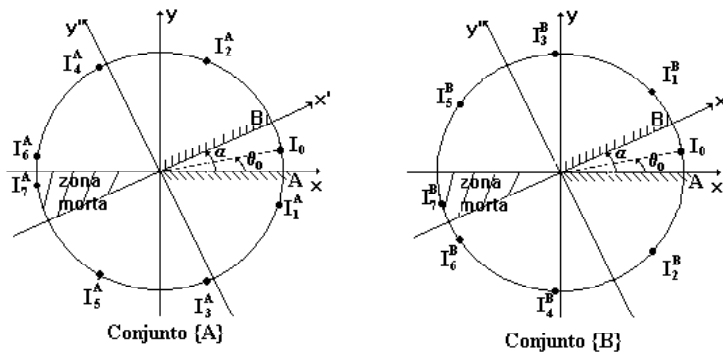


Figura 2. Conjunto de imagens **A** e **B** formadas por um sistema de espelhos planos.

Sejam os referenciais  $S$  e  $S^\alpha$ , onde  $S^\alpha$  é o referencial rodado de um ângulo  $\alpha$  no sentido anti-horário em relação a  $S$ , com coordenadas  $(x, y)$  e  $(x^\alpha, y^\alpha)$ , respectivamente, para os quais representaremos um dado ponto  $I_P$  por suas coordenadas dispostas na forma das matrizes coluna

$$I_P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} ; I_P^\alpha = \begin{pmatrix} x_P^\alpha \\ y_P^\alpha \end{pmatrix} \quad (2)$$

As matrizes de transformação que levam do conjunto de coordenadas  $(x|y)$  para o conjunto  $(x'|y')$  e vice versa [5] são dadas por

$$R = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3)$$

de maneira que:  $I_P' = RI_P$  e  $I_P = R^{-1}I_P'$ .

### O conjunto A

Tomando-se o referencial  $S$ , com eixo  $x$  pertencente ao plano do espelho  $A$  (ver figura 2), as coordenadas da primeira imagem do conjunto **A** são obtidas pela operação

$$\begin{pmatrix} x_1^A \\ y_1^A \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

na qual  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  é a matriz de reflexão [5].

Simbolicamente, representamos tal operação por

$$I_1^A = PI_0 \quad (5)$$

A imagem  $I_2^A$  corresponde à imagem de  $I_1^A$  tomada como objeto em relação ao espelho  $B$  e tem suas coordenadas com respeito ao referencial  $S'$  obtidas mediante a transformação das coordenadas de  $I_1^A$  para o referencial  $S'$  seguida da operação de reflexão, ou seja

$$I_2^A = PRI_1^A \quad (6)$$

Tais coordenadas no referencial  $S$  são dadas pela relação

$$I_2^A = R^{-1}PRI_1^A \quad (7)$$

Repetindo-se o processo, as coordenadas das próximas imagens do conjunto são determinadas por

$$\begin{aligned} I_3^A &= PI_2^A \\ I_4^A &= R^{-1}PRI_3^A \\ I_5^A &= PI_4^A \\ I_6^A &= R^{-1}PRI_5^A \\ &\vdots \end{aligned}$$

É interessante notar que, enquanto a matriz  $P$  realiza uma reflexão no espelho  $A$ , a matriz  $R^{-1}PR$  realiza uma reflexão no espelho  $B$ .

Em termos das matrizes  $P I_0 R$  e  $R^{-1}$ , as matrizes  $I_m^A$  são dadas por

$$\begin{aligned} I_1^A &= P I_0 \\ I_2^A &= R^{-1} P R P I_0 \\ I_3^A &= P R^{-1} P R P I_0 \\ I_4^A &= R^{-1} P R P R^{-1} P R P I_0 \\ I_5^A &= P R^{-1} P R P R^{-1} P R P I_0 \\ I_6^A &= R^{-1} P R P R^{-1} P R P R^{-1} P R P I_0 \end{aligned}$$

É fácil verificar-se que as quantidades  $I_m^A$  podem ser escritas em termos das matrizes  $N = R^{-1} P R P$  e  $P$  na forma

$$\begin{aligned} I_1^A &= P I_0 \\ I_2^A &= N I_0 \\ I_3^A &= P N I_0 \\ I_4^A &= N^2 I_0 \\ I_5^A &= P N^2 I_0 \\ I_6^A &= N^3 I_0 \end{aligned}$$

com a matriz  $N$  explicitamente dada por

$$N = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \quad (8)$$

o que permite generalizar os resultados na forma

$$I_m^A = N^{\frac{m}{2}} I_0; \quad m = 2, 4, 6, \dots \quad (9)$$

$$I_m^A = P N^{\frac{m-1}{2}} I_0; \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (10)$$

Calculando-se  $N^k$  para alguns valores de  $k$  inteiros e generalizando-se para um  $k$  genérico obtemos

$$N^k = \begin{pmatrix} \cos 2k\alpha & \sin 2k\alpha \\ \sin 2k\alpha & \cos 2k\alpha \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$P N^k = \begin{pmatrix} \cos 2k\alpha & \sin 2k\alpha \\ \sin 2k\alpha & \cos 2k\alpha \end{pmatrix} \quad (12)$$

o que nos permite expressar as quantidades  $I_m^A$  na forma

$$I_m^A = \square_m^A I_0 \quad (13)$$

na qual

$$\square_m^A = \begin{pmatrix} \cos m\alpha & \sin m\alpha \\ \sin m\alpha & \cos m\alpha \end{pmatrix} \quad m = 2, 4, 6, \dots \quad (14)$$

e

$$A_m = \begin{pmatrix} \cos(m - 1) & \sin(m - 1) \\ \sin(m - 1) & \cos(m - 1) \end{pmatrix} \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (15)$$

Introduzindo os fatores  $(-1)^m$  e  $\frac{(-1)^m - 1}{2}$  nos resultados para um  $m$  genérico podem ser sintetizados na expressão

$$A_m = \begin{pmatrix} \cos(m - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^m}{2}) & \sin(m - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^m}{2}) \\ (-1)^m \sin(m - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^m}{2}) & (-1)^m \cos(m - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^m}{2}) \end{pmatrix} \quad (16)$$

com  $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

**O conjunto B**

Os elementos do conjunto **B** são obtidos por meio das operações

$$\begin{aligned} I_1^B &= R^{-1} P R I_0 \\ I_2^B &= P R^{-1} P R I_0 \\ I_3^B &= R^{-1} P R P R^{-1} P R I_0 \\ I_4^B &= P R^{-1} P R P R^{-1} P R I_0 \\ I_5^B &= R^{-1} P R P R^{-1} P R P R^{-1} P R I_0 \\ I_6^B &= P R^{-1} P R P R^{-1} P R P R^{-1} P R I_0 \end{aligned}$$

ou em termos das matrizes  $J = R^{-1} P R$  e  $M = P J$

$$\begin{aligned} I_1^B &= J I_0 \\ I_2^B &= M I_0 \\ I_3^B &= J M I_0 \\ I_4^B &= M^2 I_0 \\ I_5^B &= J M^2 I_0 \\ I_6^B &= M^3 I_0 \end{aligned}$$

com

$$J = \begin{pmatrix} \cos 2 & \sin 2 \\ \sin 2 & \cos 2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$M = \begin{pmatrix} \cos 2 & \sin 2 \\ \sin 2 & \cos 2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Verificando-se que

$$M^k = \begin{pmatrix} \cos 2k & \sin 2k \\ \sin 2k & \cos 2k \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$JM^k = \begin{pmatrix} \cos 2(k+1) & \sin 2(k+1) \\ \sin 2(k+1) & -\cos 2(k+1) \end{pmatrix} \quad (20)$$

podemos generalizar as expressões para  $I_B^m$  na forma

$$I_m^B = M^{\frac{m}{2}} I_0 ; \quad m = 2 \quad (21)$$

$$I_m^B = JM^{\frac{m+1}{2}} I_0 ; \quad m = 1 \quad (22)$$

ou ainda,

$$I_m^B = \square_m^B I_0 \quad (23)$$

na qual  $\square_m^B$  é dada por

$$\square_m^B = \begin{pmatrix} \cos(m + \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{m+1}}{2}) & \sin(m + \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{m+1}}{2}) \\ (-1)^{m+1} \sin(m + \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{m+1}}{2}) & (-1)^m \cos(m + \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{m+1}}{2}) \end{pmatrix} \quad (24)$$

com  $m = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

### 3 Obtenção das imagens

É evidente que as operações na forma  $I_m^{AB} = \square_m^{AB} I_0$  geradas pelas matrizes  $\square_m^{AB}$  geram vetores posição na forma

$$I_m^{AB} = \begin{pmatrix} x_m^{AB} \\ y_m^{AB} \end{pmatrix} \quad (25)$$

os quais correspondem ou não a imagens do objeto  $I_o$  no sistema de espelhos. É necessário encontrar a maneira de analisar o processo quando a imagem dos conjuntos **A** e **B** recaem na zona morta, caso em que são as últimas imagens do conjunto. No desenvolvimento a seguir, apresentamos a forma geral para determinarmos o número total de imagens do conjunto, a posição angular de cada imagem e, conseqüentemente, o número total de imagens do sistema para ângulos de abertura  $\theta$  genéricos e qualquer posicionamento angular  $\theta_0$  do objeto.

Considerando, primeiramente, o conjunto **A**, cujas posições das imagens são dadas pela equação (13), que reescrita em coordenadas polares com

$$I_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$I_m^A = \begin{pmatrix} x_m^A \\ y_m^A \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta_m \\ \sin \theta_m \end{pmatrix} \quad (27)$$

e  $\square_m^A$  dada pela expressão (16) resulta

$$\square_m^A = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + (m - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^m}{2})) & \\ \sin \theta_m & (-1)^m \sin(\theta_0 + (m - \frac{1}{2} + \frac{(-1)^m}{2})) \end{pmatrix} \quad (28)$$

que forma um sistema de duas equações que devem ser satisfeitas simultaneamente. Utilizando-se de algumas propriedades simples das funções seno e cosseno, obtemos, se  $m$  for par

$$\frac{A^P}{m} = \theta + m\alpha \quad (29)$$

e, se  $m$  for ímpar,

$$\frac{A^I}{m} = 2\alpha - \theta + (1 - m)\alpha \quad (30)$$

O fator  $2\alpha$  em (30) foi introduzido de forma a termos as posições angulares sempre medidas no sentido anti-horário e os índices  $A^P$  e  $A^I$  foram introduzidos para caracterizar as imagens como pares ou ímpares e pertencentes ao conjunto **A**.

Considerando, agora, o conjunto **B**, cujas posições das imagens são dadas pela equação (21), pelo mesmo procedimento, obtemos

$$\begin{aligned} \cos m\alpha &= \cos\left(\theta + \left(m + \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{m+1}}{2}\right)\alpha\right) \\ \sin m\alpha &= (-1)^{m+1} \sin\left(\theta + \left(m + \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{m+1}}{2}\right)\alpha\right) \end{aligned} \quad (31)$$

o que faz resultar, se  $m$  for par

$$\frac{B^P}{m} = 2\alpha - \theta + m\alpha \quad (32)$$

e, se  $m$  for ímpar,

$$\frac{B^I}{m} = (m + 1)\alpha - \theta \quad (33)$$

Com as posições angulares das imagens dadas pelas equações (29), (30), (32) e (33), podemos, então, determinar os elementos dos conjuntos **A** e **B**. De acordo com a estrutura de construção das imagens, uma imagem pertencerá ao conjunto **A**, com índice par ou **B**, com índice ímpar, caso  $m < \alpha + \theta$ . As imagens ímpares de **A** e pares de **B** pertencerão ao conjunto caso  $m > \alpha$ . Em todos os casos, a imagem de índice  $m$  será a última caso  $m = \alpha + \theta$ .

### 3.1 O conjunto A

#### 3.1.1 Subconjunto par

Seja  $q$  um número inteiro tal que

$$\alpha = q\beta + \theta \quad (34)$$

na qual  $\beta$  é um ângulo sempre menor que  $\alpha$ . Para que uma dada imagem do subconjunto par pertença a **A**, a condição  $m < \alpha + \theta$  deve ser satisfeita. Para  $q$  par, a imagem de índice  $q$  tem posição angular dada por

$$q = \theta + q\alpha = (\theta + \alpha) + (q-1)\alpha \quad (35)$$

Como  $\theta < \alpha$  e  $\alpha < \alpha + \theta$ ,  $q < \alpha + \theta$  e a imagem de índice  $q$  pertence ao conjunto **A**. Caso  $\theta + \alpha = 0$ , então  $m = \alpha + \theta$  e a imagem de índice  $q$  será a última



do conjunto. Caso  $\theta_0 \leq 0$ , então  $\theta_q < \theta$  e a imagem de índice  $q$  estará fora da zona morta.

Analisando a imagem de índice  $q + 2$  obtemos

$$\theta_{q+2} = \theta_0 + (q + 2)\Delta \quad (36)$$

$$= \theta_0 + q\Delta + 2\Delta \quad (37)$$

$$\theta_q = \theta_0 \leq \theta + \Delta + 2\Delta > \theta + \Delta \quad (38)$$

Assim, a imagem de índice  $q + 2$  está além da zona morta, de forma que não pertence ao conjunto **A**. Logo, caso  $\theta_0 \leq 0$ , a imagem de índice  $q + 1$  será a última do conjunto **A**. Observe que tal conclusão poderia também ser obtida pela análise da posição angular da imagem de índice  $q + 1$  equação (28).

### 3.1.2 Subconjunto ímpar

Para que uma dada imagem do subconjunto ímpar pertença a **A**, a condição  $\theta_m > \theta$  deve ser satisfeita. Para  $q$  ímpar, a imagem de índice  $q$  tem posição angular dada por

$$\theta_q = 2\Delta \theta_0 + (1 - q)\Delta \quad (39)$$

$$= 2\Delta \theta_0 + \Delta + \Delta \theta \quad (40)$$

$$= \Delta \theta_0 + \Delta + \Delta > \theta \quad (41)$$

Logo, a imagem de índice  $q$  pertence a **A**. Caso  $\theta_0 > 0$ , temos que  $\theta_q > \theta + \Delta$  e a imagem de índice  $q$  será a última do conjunto. Caso  $\theta_0 < 0$ , a imagem de índice  $q$  estará fora da zona morta. Analisando a imagem de índice  $q + 2$  obtemos

$$\theta_{q+2} = 2\Delta \theta_0 + (q + 1)\Delta \quad (42)$$

$$= 2\Delta \theta_0 + \Delta \theta + \Delta \quad (43)$$

$$= (\Delta \theta_0 + \Delta) + \Delta \theta < \theta \quad (44)$$

Dessa forma, a imagem de índice  $q + 2$  está além da zona morta e a imagem de índice  $q + 1$  é a última imagem do conjunto.

Observe que quando  $\theta_0 > 0$  a última imagem do conjunto é de índice  $q + 1$  seja  $q$  par ou ímpar, assim como, se  $\theta_0 < 0$  a última imagem será a de índice  $q$ .

## 3.2 O conjunto B

### 3.2.1 Subconjunto par

A posição angular da imagem de índice  $q$  é dada por

$$\theta_q = 2\Delta + \theta_0 - q\Delta \quad (45)$$

Assim, para que ela pertença a **B**, a condição  $q > \alpha$  deve ser satisfeita. Utilizando-se a expressão (32), obtemos

$$q = 2\alpha + \theta + \alpha \alpha \alpha \quad (46)$$

$$= \alpha + \theta + \alpha > \alpha \quad (47)$$

Logo, a imagem de índice  $q$  pertence a **B**. Caso  $\alpha + \theta \leq \alpha$ , a imagem de índice  $q$  está na zona morta e é a última imagem do conjunto. Se  $\alpha + \theta > \alpha$ , a imagem de índice  $q$  esta fora da zona morta. Analisando a imagem de índice  $q + 2$  obtemos

$$q+2 = 2\alpha + \theta \alpha (q + 2)\alpha \quad (48)$$

$$= 2\alpha + \theta \alpha 2\alpha \alpha \alpha + \alpha \quad (49)$$

$$= \alpha + (\theta + \alpha) \alpha 2\alpha < \alpha \quad (50)$$

de maneira que a imagem de índice  $q + 2$  está além da zona morta e não pertence ao conjunto **B**. A imagem de índice  $q + 1$  é então a última imagem do conjunto **B**.

### 3.2.2 Subconjunto Ímpar

A posição angular da imagem de índice  $q$  é

$$q = (q + 1)\alpha \alpha \theta \quad (51)$$

$$= \alpha + \alpha \alpha (\alpha + \theta) < \alpha + \alpha \quad (52)$$

Como  $q < \alpha + \alpha$ , a imagem de índice  $q$  pertence a **B**. Caso  $(\alpha + \theta) \leq \alpha$ , a condição  $\alpha \alpha q \leq \alpha + \alpha$  estará satisfeita e a imagem de índice  $q$  será a última imagem do conjunto. Caso  $(\alpha + \theta) > \alpha$ , a imagem de índice  $q$  estará fora da zona morta e uma análise da posição angular da imagem  $q + 2$  ou  $q + 1$  demonstrará que a imagem de índice  $q + 1$  é a última imagem do conjunto **B**.

Reunindo todas as condições obtidas, podemos sintetizá-las na seguinte forma:

#### Conjunto A:

$$\theta \alpha \alpha : \quad \alpha I_1 I_2 \alpha \alpha I_q \alpha \quad (53)$$

$$\theta < \alpha : \quad \alpha I_1 I_2 \alpha \alpha I_{q+1} \alpha \quad (54)$$

#### Conjunto B:

$$\theta + \alpha \alpha \alpha : \quad \alpha I_1 I_2 \alpha \alpha I_q \alpha \quad (55)$$

$$\theta + \alpha > \alpha : \quad \alpha I_1 I_2 \alpha \alpha I_{q+1} \alpha \quad (56)$$

## 4 Redução aos casos particulares e ilustração do método

Os casos particulares apresentados na seção 2 estão relacionados com a situação na qual  $\frac{2q}{p}$  é um número inteiro. Nessa situação, distinguimos os casos nos quais  $\frac{2q}{p}$  é um número par (caso **a**, abaixo) e onde ele é um número ímpar com  $q = \frac{p}{2}$  (caso **b**).

De acordo com nossa análise, esses casos são obtidos quando

$$\begin{aligned} \text{caso a :} \quad & \frac{q}{p} = q \quad (p = 0) \\ \text{caso b :} \quad & \frac{q}{p} = q + \frac{1}{2} \quad (p = q = \frac{p}{2}) \end{aligned}$$

### 4.1 Caso a

Para o caso **a**,  $q = \frac{p}{2}$  de forma que o conjunto **A** apresenta  $q$  imagens. Como  $q = \frac{p}{2}$ , o conjunto **B** também deve apresentar  $q$  imagens.

Para  $q$  par, temos as seguintes posições angulares das últimas imagens de **A** e **B**

$$\begin{aligned} \frac{A}{q} &= \frac{p}{2q} + 0 \\ \frac{B}{q} &= \frac{p}{2q} + 0 \end{aligned}$$

Para  $q$  ímpar, temos que

$$\begin{aligned} \frac{A}{q} &= \frac{p}{2q} + \frac{1}{2} + 0 \\ \frac{B}{q} &= \frac{p}{2q} + \frac{1}{2} + 0 \end{aligned}$$

Podemos ver que, independentemente de  $q$  ser par ou ímpar, as posições angulares das últimas imagens do conjunto **A** e do conjunto **B** se sobrepõem, de forma que são observadas  $n = 2q + 1$  imagens. Assim, com o valor de  $q$  do caso **a**, recuperamos o resultado particular dado pela equação (1).

### 4.2 Caso b

Para o caso **b**,  $q = \frac{p}{2}$  de forma que o conjunto **A** apresenta  $q$  imagens. Também temos que  $q = \frac{p}{2}$  de forma que o conjunto **B** também apresenta  $q$  imagens. Para  $q$  par, temos as seguintes posições angulares das últimas imagens

$$\begin{aligned} \frac{A}{q} &= \frac{p}{2q} \\ \frac{B}{q} &= \frac{p}{2q} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para  $q$  ímpar, temos que

$$\begin{aligned} \frac{A}{q} &= \frac{p}{2q} + \frac{1}{2} \\ \frac{B}{q} &= \frac{p}{2q} \end{aligned}$$

Podemos ver que não há sobreposição de imagens em ambos os casos de forma que é observado um número total de imagens  $n = 2q$ . Com o valor de  $q$  do caso **b**, recuperamos, então, a expressão (1).

### 4.3 Ilustração do método

Consideremos o caso específico em que  $\alpha = 37^\circ$  e  $\theta_0 = 21^\circ$ , caso em que  $\frac{\alpha}{\theta_0} = 4 \frac{864}{32}$ , de forma que  $q = 4$  e  $\alpha = 0 \frac{864}{32} = 32^\circ$ . Verificamos que  $\alpha + \theta_0 > \alpha$  o que implica que o conjunto **B** apresenta  $q + 1$  imagens. O conjunto **A** também apresenta  $q + 1$  imagens, pois  $\theta_0 < \alpha$ . A fração  $\frac{2\alpha}{\theta_0}$  não é um número inteiro, de forma que as últimas imagens não se sobrepõem. Assim, são observadas  $n = 2(q + 1) = 10$  imagens. Um exemplo simples no qual as imagens se sobrepõem é o caso em que  $\alpha = 90^\circ$  e  $\theta_0 = 45^\circ$ , o qual recai no caso particular discutido na seção 4.1. Nesse caso,  $q = 2$  e  $\alpha = 0$  de maneira que existem duas imagens no conjunto **A** e duas no conjunto **B**. As duas últimas imagens dos conjuntos se sobrepõem na posição angular  $\frac{A+B}{2} = 225^\circ$  de forma que podem ser observadas três imagens. As posições das imagens  $\frac{A}{1}$  e  $\frac{B}{1}$  podem ser calculadas com a utilização das expressões (30) e (33) e resultam iguais a  $315^\circ$  e  $135^\circ$ , respectivamente.

## 5 Conclusão

Apresentamos, nas seções anteriores, uma forma diferente de encontrar-se as imagens de um objeto puntiforme geradas por um sistema de espelhos. A vantagem do método é permitir encontrar as posições angulares dessas imagens por meio de expressões algébricas (equações (29), (30), (32) e (33)) e o número total das mesmas (expressões (53) a (56)) a partir do conhecimento da abertura angular  $\alpha$  entre os espelhos e da posição angular  $\theta_0$ . Todos esses resultados podem ser obtidos também por métodos geométricos, mas o presente método apresenta-se como uma forma elegante de resolver-se o problema, assim como uma maneira didaticamente interessante de introduzir o formalismo matricial a jovens estudantes dos cursos de Física.

## Referências

- [1] Allen Nussbaum, *Geometric Optics An Introduction*, Addison - Wesley, Massachusetts: 1968.
- [2] Robert M. Eisberg e Lawrence S. Lerner, *Física - Fundamentos e Aplicações*, Vol IV, McGraw-Hill do Brasil: 1983.
- [3] Francisco Ramalho Jr. et al., *Os Fundamentos da Física*, Vol. 2, Editora Moderna: 1988.
- [4] D. Halliday, R. Resnick, e J. Walker, *Física 4*, 4ª edição, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos: 1988.
- [5] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Singapore: 1973.