Equações diferenciais ordinárias
Método das frações contínuas

Maria Cecília Kawazoe Aguilera-Navarro
Departamento de Matemática - UNICENTRO
85015-990 Guarapuava, PR
aguilera@unicentro.br

Valdir C. Aguilera-Navarro
Departamento de Química e Física - UNICENTRO
85015-990 Guarapuava, PR
aguilera@unicentro.br

(*Recebido: 7 de dezembro de 2000*)

Resumo: *Neste trabalho, de natureza essencialmente pedagógica, apresentamos um método pouco conhecido, ausente dos livros textos, para se obter uma solução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. O método baseia-se no conceito de frações contínuas.*

Palavras-chave: *equações diferenciais, métodos para solução, frações contínuas*

Abstract: *An unusual method to solve ordinary second-order differential equation based on continued fractions is presented.*

Key words: *differential equations, solution methods, continued fractions*

1 Introdução

A modelagem de um problema em Matemática Aplicada, em Física e em outras áreas onde a Matemática desempenha um papel relevante, muitas vezes nos conduz a equações diferenciais cujas soluções são difíceis de obter. Ademais, é sabido que são poucas as equações diferenciais cujas soluções podem ser explícita ou implicitamente expressas em termos de funções elementares ou de funções especiais e para as quais se dispõe de um método de resolução bem definido.

Muitas vezes, uma solução implícita em termos de funções elementares pode nos conduzir a uma expressão bastante complicada, tornando extremamente difícil encontrar valores da variável dependente para os dados valores da variável independente, sendo, assim, quase inútil a solução obtida.

Neste trabalho, de natureza claramente pedagógica, discutimos um método para resolver equações diferenciais ordinárias, que não é apresentado na maioria dos livros textos sobre o assunto. Esse método, que chamaremos *métodos das frações contínuas para solução de equações diferenciais ordinárias*, ou simplesmente, *método das frações contínuas,* produz uma representação para a derivada logarítmica da solução procurada, em termos de frações contínuas.

Na próxima seção, apresentamos os detalhes do método das frações contínuas indicando um algoritmo que define, de forma simples e sistemática, os diversos níveis da fração contínua. Na seção 3, aplicaremos o método para resolver uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes. Esse exemplo é apenas didático, pois a solução de tais equações é bastante conhecida e pode ser obtida por métodos clássicos. Serve, pois, apenas para exemplificar a sistemática da busca de uma solução e constiuir-se num paradigma para tratar casos mais complicados.

Aos interessados em se aprofundar na Teoria das Equações Diferenciais oferecemos, no final do texto, uma bibliografia.

2 O método das frações contínuas

Nesta seção, vamos apresentar o método das frações contínuas para encontrar a solução de uma equação diferencial ordinária, de segunda ordem, homogênea. Um breve, mas auto-suficiente apanhado da teoria das frações contínuas pode ser encontrado em AGUILERA-NAVARRO *et al.*, 2000.

Consideremos a equação diferencial ordinária homogênea de segunda ordem, em sua forma mais geral, isto é

$$A(x)\frac{d^2y}{dx^2} + B(x)\frac{dy}{dx} + C(x)y = 0 \tag{1}$$

onde $A(x)$, $B(x)$ e $C(x)$ são funções de x, contínuas num mesmo intervalo I, e não se anulam quando a variável independente x pertence a esse intervalo, isto é,

$$\left.\begin{array}{l} A(x) \neq 0 \\ B(x) \neq 0 \\ C(x) \neq 0 \end{array}\right\} \quad \text{para } x \in I \tag{2}$$

Resolver a equação (1) significa encontrar a função $y = y(x)$ que a satisfaça. Para simplificar a notação, adotamos a convenção de Newton para indicar derivadas, isto é,

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{e} \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \tag{3}$$

Assim, reescrevemos a equação (1) sob a forma

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \tag{4}$$

Tendo em conta as condições definidas em (2), podemos dividir toda a equação (4) por $C(x)$ e reescrevê-la na forma

$$y = Q_0 y' + P_1 y'' \tag{5}$$

onde

$$Q_0 = Q_0(x) = -B(x)/C(x) \ \text{ e } P_1 = P_1(x) = -A(x)/C(x) \tag{6}$$

Derivando uma vez a equação (5) com respeito a x, obtemos

$$y' = Q_0' y' + Q_0 y'' + P_1' y'' + P_1 y''' \tag{7}$$

Essa expressão pode ser reagrupada como

$$y'(1 - Q_0') = (Q_0 + P_1')y'' + P_1 y'''$$

que, por sua vez, pode ser reescrita na forma

$$y' = \frac{(Q_0 + P_1')}{(1 - Q_0')} y'' + \frac{P_1}{(1 - Q_0')} y'''$$

ou, ainda,

$$y' = Q_1 y'' + P_2 y''' \tag{8}$$

onde

$$Q_1 = Q_1(x) = \frac{(Q_0 + P_1')}{(1 - Q_0')} \tag{9}$$

e

$$P_2 = P_2(x) = \frac{P_1}{(1 - Q_0')} \tag{10}$$

Em seguida, derivamos y', dado em (8), para obter

$$y'' = Q_1' y'' + Q_1 y''' + P_2' y''' + P_2 y^{iv} \tag{11}$$

Reagrupando os termos de (11) e reescrevendo o resultado no padrão definido em (8), obtemos

$$y'' = Q_2 y''' + P_3 y^{iv} \tag{12}$$

onde, de modo similar a (9) e (10), Q_2 e P_3 são dados por

$$Q_2 = Q_2(x) = \frac{Q_1 + P_2'}{1 - Q_1'} \tag{13}$$

e

$$P_3 = P_3(x) = \frac{P_2}{1 - Q_1'} \tag{14}$$

Derivando y'' dado em (12) e continuando com esse processo, no n-ésimo passo, obtemos

$$y^{(n)} = Q_n y^{(n+1)} + P_{n+1} y^{(n+2)} \tag{15}$$

com

$$Q_n = Q_n(x) = \frac{Q_{n-1} + P_n'}{1 - Q_{n-1}'} \tag{16}$$

e

$$P_{n+1} = P_{n+1}(x) = \frac{P_n}{1 - Q_{n-1}'} \tag{17}$$

Na expressão (15), $y^{(n)}$ representa a derivada de ordem n de y com relação a x. Até que ordem devemos derivar y depende da precisão que se requer para a solução do problema que está sendo considerado.

Para trazer à tona o algoritmo implícito nesses cálculos, reescrevamos alguns dos resultados obtidos até este ponto. A equação (5) toma a forma

$$\frac{y}{y'} = Q_0 + P_1 \frac{y''}{y'}$$

ou

$$\frac{y}{y'} = Q_0 + \frac{P_1}{\dfrac{y'}{y''}} \tag{18}$$

Reescrevamos, agora, a equação (8) como

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y''} &= Q_1 + P_2 \frac{y'''}{y''} \\ &= Q_1 + \frac{P_2}{\dfrac{y''}{y'''}} \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado em (18) obtemos

$$\frac{y}{y'} = Q_0 + \cfrac{P_1}{Q_1 + \cfrac{P_2}{\cfrac{y'}{y''}}} \tag{19}$$

Continuando com esse procedimento, chegamos à seguinte expressão

$$\frac{y}{y'} = Q_0 + \cfrac{P_1}{Q_1 + \cfrac{P_2}{Q_2 + \cfrac{P_3}{Q_3 + \cfrac{P_4}{Q_4 + \cdots}}}} \tag{20}$$

O inverso de (20) representa a derivada do logaritmo neperiano de y, ou, em outras palavras, a derivada logarítmica de y. A fração contínua obtida em (20) é a essência do método aqui discutido. Notemos que $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ e $P_1, P_2, P_3, \ldots$ são funções da variável independente x.

Como ilustração, na próxima seção, aplicaremos o método da fração contínua para resolver uma equação diferencial de segunda ordem com coeficientes constantes.

Antes de encerrar esta seção, é importante salientar que o método exposto conduz a uma solução do tipo discutido apenas se a fração contínua

$$\cfrac{1}{Q_0 + \cfrac{P_1}{Q_1 + \cfrac{P_2}{Q_2 + \cfrac{P_3}{Q_3 + \cfrac{P_4}{Q_4 + \cdots}}}}} \tag{21}$$

converge. Assim, vamos enunciar, sem demonstrar, o seguinte teorema (PERRON, 1913):

Teorema: A fração contínua (21) converge para o valor y'/y somente se

(i) $y \neq 0$
(ii) $\lim_{n\to\infty} P_n = P < \infty$
(iii) $\lim_{n\to\infty} Q_n = Q < \infty$
(iv) as raízes α_1 e α_2 de $\alpha^2 - Q\alpha - P = 0$ não têm o mesmo módulo
(v) se $|\alpha_2| < |\alpha_1|$, então $\lim_{n\to\infty} \left|y^{(n)}\right|^{1/n} < |\alpha_2|^{-1}$ desde que $|\alpha_2| \neq 0$.
Quando $|\alpha_2| = 0$, a condição (v) é substituída por
(v') $\lim_{n\to\infty} \left|y^{(n)}\right|^{1/n} < \infty$.

3 Equação diferencial com coeficientes constantes

Consideremos a equação diferencial (5) para o caso particular em que as funções $Q_0(x)$ e $P_1(x)$ sejam constantes e iguais a $2a$ e b, respectivamente. Essa equação toma, então, a forma

$$y = 2ay' + by'' \tag{22}$$

O coeficiente 2 não tem qualquer significado especial. A 2 está apenas para simplificar a apresentação do resultado final.

Evidentemente, todas as derivadas em (9), (10), (13), (14), (16) e (17) são nulas nesse caso, pois $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ e $P_2, P_3, \ldots, P_{n+1}$ são constantes. Conseqüentemente, essas equações mostram que todas as funções do tipo Q e as do tipo P são expressas diretamente em termos das constantes da equação original (22). Explicitamente

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \cdots = Q_0 = 2a \tag{23}$$

e

$$P_2 = P_3 = P_4 = \cdots = P_1 = b \tag{24}$$

Inserindo os resultados (23) e (24) em (20) obtemos que

$$\frac{y}{y'} = 2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}}}$$

que podemos escrever como

$$\frac{y}{y'} - a = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}}} \tag{25}$$

O segundo membro de (25) nada mais é do que a representação em termos de fração contínua da expressão (AGUILERA-NAVARRO *et al.*, 2000)

$$\sqrt{a^2 + b}$$

Assim, a equação (25) toma a forma

$$\frac{y}{y'} = a + \sqrt{a^2 + b}$$

de onde vemos que

$$\frac{y'}{y} = \frac{d(\ln y)}{dx} = c \tag{26}$$

onde, para simplificar a notação, introduzimos a constante c através da definição

$$c = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 + b}} \tag{27}$$

De (26), concluimos que

$$\ln y = \int c dx = cx + \ln y_0 \tag{28}$$

onde y_0 é uma constante determinada pelas condições iniciais impostas à solução da equação (22). Tomamos o logaritmo de y_0, apenas por conveniência, como será visto na seqüência.

Finalmente, calculando a função exponencial dos dois membros de (28), obtemos a solução procurada da equação diferencial (22), a saber,

$$y = y_0 \exp{(cx)} \tag{29}$$

com c dado por (27).

Podemos verificar que (29) é realmente uma solução da equação diferencial (22), inserindo-a na equação, tomando em conta a expressão para c dada em (27).

4 Discussão e conclusão

O método das frações contínuas permite-nos desenvolver um algoritmo iterativo e sistemático para encontrar uma solução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Esse método não conduz à chamada "solução geral", mas sempre leva a pelo menos uma solução, ainda que formal.

Ilustramos o método aplicando-o ao caso particular de uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes. Aplicações mais elaboradas em equações associadas a alguns problemas de física podem ser encontradas na referência GARIBOTTI *et al.*, 1975.

Referências e bibliografia

AGUILERA-NAVARRO, M. C. K.; AGUILERA-NAVARRO, V. C., Frações contínuas. *Rev. Cienc. Ex. e Nat.*, Ano 2, n. 1, pp. 73-86, 2000.

AYRES, F., *Equações diferenciais.* Rio de Janeiro: LTC, 1959.

CODDINGTON, E. A., *Ordinary differential equations.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1965.

CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N., *Theory of ordinary differential equations.* New York: McGraw Hill, 1955.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F., *Equações diferenciais aplicadas.* Rio de Janeiro: Impa, 1997.

GARIBOTTI, C. R.; MIGNACO, J. A., Approximation solution of bound state problems through continued fractions. *Z. Physik A*, v. 274, p. 33-39, 1975.

IMAZ, C.; VOREL, Z., *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* México: Limusa-Wiley, 1968.

INCE, E. L.,*Ordinary differential equations.* New York: Dover, 1956.

PERRON, O., *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* Mathematische Wissenschaften, Band XXXVI (1913), *apud* GARIBOTTI, C. R. *et al.* (1975), p. 289.

TENEMBAUM, M.; POLLARD, H., *Ordinary differential equations.* New York: Harper&Row, s.d.