Paradoxos Geométricos nas Aulas de Geometria

Geometric Paradoxes in Geometry Classes

Rudimar Luiz Nós
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Curitiba, PR
rudimarnos@utfpr.edu.br

Francielle Gonçalves Sentone
Escola Estadual Professora Abigail dos Santos Corrêa, Matinhos, PR
fran.sentone@gmail.com

Resumo: Apresentamos neste trabalho alguns paradoxos geométricos, assim como as atividades sobre os paradoxos de Curry e de Hooper aplicadas em turmas da Educação Básica e do Ensino Superior com o intuito de investigar, através de uma atividade recreativa e de um questionário, como os estudantes empregam conceitos e definições para solucionar problemas geométricos. As atividades evidenciaram a formação deficiente dos estudantes do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em Geometria Plana e em Geometria Analítica e concluímos que os professores de matemática poderiam empregar a Matemática Recreativa para motivar a aprendizagem.

Palavras-chave: Matemática Recreativa; paradoxo do tabuleiro; paradoxo de Curry; paradoxo de Hooper.

Abstract: We present in this work some geometric paradoxes as well as the activities about the Curry and Hooper paradoxes applied in classes of basic and higher education in order to investigate, through a recreational activity and a questionnaire, how students use concepts and definitions to solve geometric problems. The activities revealed the deficient formation of the elementary and high school students in Plane Geometry and in Analytic Geometry and we concluded that mathematics teachers could use Recreational Mathematics to motivate learning.

Key words: Recreational Mathematics; the checkerboard paradox; Curry's paradox; Hooper's paradox.

1 Introdução

Um paradoxo é uma declaração que vai contra o senso comum, expectativas ou definições; é uma proposição que, apesar de aparentar um raciocínio coerente, demonstra falta de lógica. A palavra paradoxo provém do grego *paradoksos*: o prefixo *para* significa contrário a, ou oposto de, e o sufixo *doxo*, opinião. No latim, *paradoxum* é uma sentença que se opõe à opinião comum. Bons exemplos são o paradoxo do mentiroso, cuja primeira versão conhecida é atribuída a Eubulides de Mileto (século IV a.C.) [1], o paradoxo do altruísta e o paradoxo do Tangram, este um paradoxo geométrico.

Paradoxo 1.1 (Paradoxo do mentiroso) *Um homem diz que está mentindo. O que ele*

Recebido em 08/08/2017 - Aceito em 29/09/2017

diz é verdadeiro ou falso?

- Se o homem está mentindo, o que ele diz é verdadeiro. Logo, ele não é mentiroso. Contraditório!
- Se o homem não está mentindo, o que ele diz é falso. Logo, ele é mentiroso. Contraditório novamente.

Paradoxo 1.2 (Paradoxo do altruísta) *Uma pessoa é altruísta se não pensa em si mesma. Considere um indivíduo que pensa em uma pessoa somente se ela é altruísta.*

- Se o indivíduo é altruísta, então ele pensa em si mesmo. Logo, ele não é altruísta. Contraditório!
- Se o indivíduo não é altruísta, então ele não pensa em si mesmo. Logo, ele é altruísta. Novamente, contraditório.

Paradoxo 1.3 (Paradoxo do Tangram) *Na Figura 1, qual das duas gravuras de um chinês tem a maior área?*

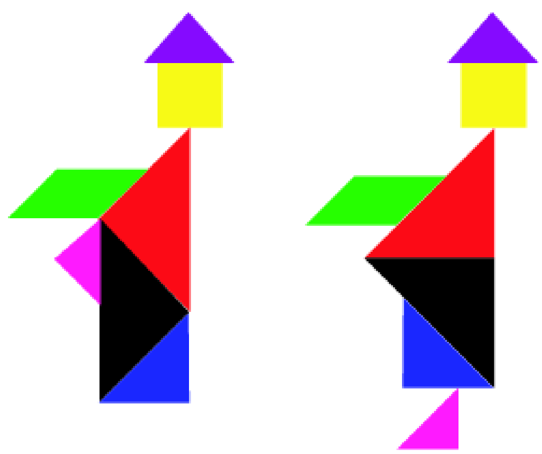


Figura 1. Paradoxo do Tangram [2]

- O Tangram é um antigo quebra-cabeça chinês composto por sete peças que formam um quadrado. O mesmo conjunto de peças do Tangram pode produzir duas figuras com áreas aparentemente diferentes, uma das quais é um subconjunto apropriado da outra, como na Figura 1. Essa contradição foi denominada *paradoxo do Tangram* [3].

Para [4], os melhores paradoxos são os mais fáceis de afirmar e os mais difíceis de resolver. Então, solucionar um paradoxo seria como desvendar um truque? Seria mágica? Poderíamos, enquanto professores de matemática, empregar paradoxos para introduzir/investigar conceitos, principalmente geométricos? Segundo [5], a resposta é sim, pois "Os Paradoxos Geométricos são tratados na Matemática Recreativa, desenvolvendo habilidades de raciocínio matemático por parte do aluno, tornando a Matemática e o raciocínio lógico dedutivo mais atrativos".

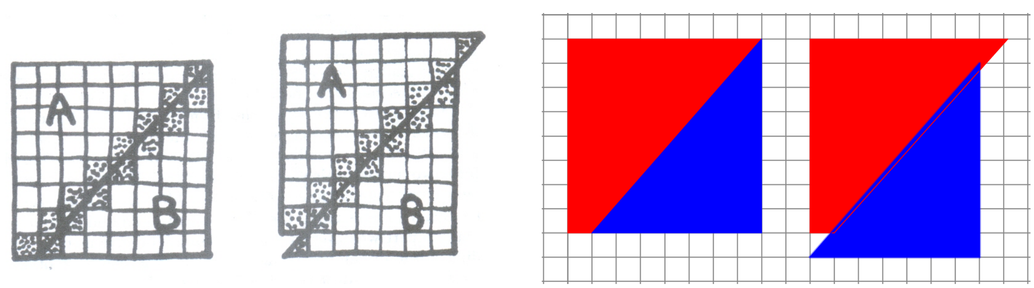
Dessa forma, inspirados principalmente por [6], propusemo-nos a apresentar alguns paradoxos geométricos para estudantes da Educação Básica e do Ensino Superior. O objetivo do trabalho é investigar como os estudantes do Ensino Fundamental, do Ensino Médio e do Curso de Licenciatura em Matemática empregam conceitos de Geometria Plana e de Geometria Analítica, tais como área, o Teorema de Pitágoras e o coeficiente angular da reta, para desvendar os paradoxos ou truques geométricos e, também, motivá-los para o estudo desses conceitos. Todas as figuras empregadas no texto para desvendar os truques geométricos foram construídas no GeoGebra [7].

2 Desenvolvimento

2.1 O paradoxo do tabuleiro

O paradoxo do tabuleiro (*The checkerboard paradox*) é um paradoxo no qual o princípio da distribuição oculta [6, 8] é responsável por misteriosos "ganhos" ou "perdas" de áreas.

Na Figura 2(a), temos à esquerda um tabuleiro quadrado 8×8 com área igual a 64. Esse tabuleiro é cortado em duas partes que, reencaixadas, formam a figura à direita com área igual a 63. Na manipulação, uma unidade de área some.



(a) Paradoxo do tabuleiro [6] (b) Construção do paradoxo do tabuleiro

Figura 2. Desvendando o paradoxo do tabuleiro

A explicação para o truque é que o tabuleiro não é cortado segundo sua diagonal. Ele é cortado do último quadrado da primeira linha até o segundo quadrado da última linha. Devido a este corte, cada quadrado cortado não foi cortado ao meio, mas sim de maneira que, quando deslocados, pareçam quadrados como os demais, mas não são. E quando deslocamos as peças de maneira que se encaixem, percebemos, como na Figura 2(b), que as duas peças se sobrepõem e a área da região sobreposta é a área do quadrado que sumiu.

2.2 O paradoxo de Curry

O paradoxo de Curry é uma ilusão de ótica com figuras geométricas planas criado pelo famoso mágico amador norte-americano Paul Jerome Curry (1917-1986). Devido à ilusão, muitos autores não o consideram um paradoxo geométrico. No paradoxo do quadrado perdido, como também é chamado, quatro figuras são reagrupadas de maneira a faltar um quadrado, como ilustra a Figura 3.

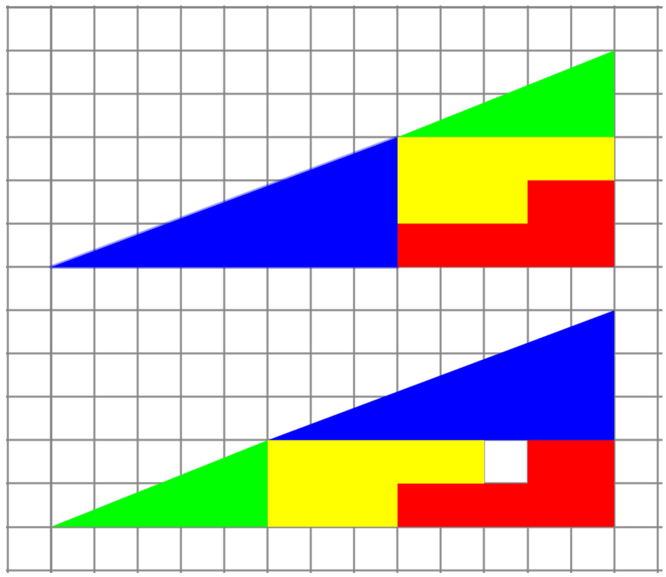


Figura 3. Paradoxo de Curry: o enigma do quadrado perdido

Para desvendar o paradoxo de Curry, podemos empregar conceitos geométricos, tais como o cálculo de áreas, o Teorema de Pitágoras, a semelhança de triângulos e a declividade da reta, e de Teoria dos Números, como a sequência de Fibonacci. O emprego destes conceitos conduz à conclusão de que os triângulos retângulos de catetos de medidas $5uc$ e $13uc$ da Figura 3 são uma ilusão de ótica. Na verdade, eles são quadriláteros é há uma diferença de áreas, como comprova a Figura 4.

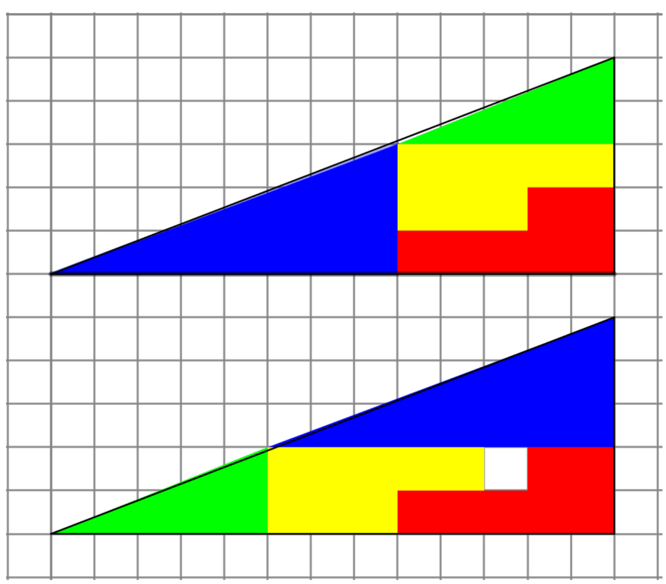


Figura 4. Desvendando o paradoxo de Curry

2.2.1 Área

Na Figura 3, temos, a princípio, dois triângulos retângulos de medidas congruentes, compostos pelas mesmas quatro peças, porém com um quadrado a menos. Mas como é possível dois triângulos com as mesmas medidas terem áreas diferentes?

Para [9, 10] isto não é possível.

> "Intuitivamente, a área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e serve para quantificar o espaço por ela ocupado. Para encontrar a área de uma figura F, devemos comparar sua superfície, espaço ocupado, com a de outra figura tomada como unidade. O resultado será um número que exprime quantas unidades de área está contida na figura F. Para o conceito de área ter validade, uma das propriedades válidas afirma que polígonos congruentes têm áreas iguais".

Considerando os triângulos da Figura 3, "para que sejam congruentes devemos deslocar um deles no espaço, sem deformá-lo, até coincidir com o outro" [9]. Ao deslocarmos um triângulo de maneira a fazê-lo coincidir com o outro, a área do quadrado faltante não será comum a ambos os triângulos. Logo, os triângulos não são congruentes uma vez que não têm a mesma área.

Para calcular as áreas das partes dos triângulos da Figura 3 usaremos como unidade de medida o quadrado unitário, ou seja, o quadrado que tem o lado medindo uma unidade de comprimento, representada por $1uc$, e área igual a uma unidade de área, representada por $1ua$. Assim, o triângulo retângulo cujos catetos medem $5uc$ e $13uc$, doravante denominado triângulo 5×13, tem $32,5$ quadrados unitários, ou seja, tem área igual a $32,5ua$. Calculando a área de todas as partes desse triângulo, temos que:

1. Área do triângulo retângulo 3×8: $\dfrac{3 \times 8}{2} = 12ua$;
2. Área do triângulo retângulo 2×5: $\dfrac{2 \times 5}{2} = 5ua$;
3. Área dos polígonos não-convexos: $3 + 5 = 8ua$ e $2 + 5 = 7ua$.

Somando as áreas das peças, determinamos uma área total de $32ua$. Há uma falta de $0,5ua$ para a área do triângulo 5×13. Portanto, essas quatro peças não podem formar o triângulo 5×13.

2.2.2 O Teorema de Pitágoras

Já temos uma primeira inconsistência em relação às áreas. Verifiquemos então se a hipotenusa h_1 do triângulo retângulo 5×13 equivale à soma das hipotenusas h_2 e h_3 dos triângulos retângulos 3×8 e 2×5, respectivamente. Usaremos para tanto o Teorema de Pitágoras. Este teorema é enunciado em [10] como "um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos".

Teorema 2.1 (Teorema de Pitágoras) *Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.*

Empregando o Teorema 2.1, constatamos que:

1. Hipotenusa h_1 do triângulo retângulo 5×13: ${h_1}^2 = 5^2 + 13^2 \Rightarrow h_1 = \sqrt{194}$;

2. Hipotenusa h_2 do triângulo retângulo 3×8: ${h_2}^2 = 3^2 + 8^2 \Rightarrow h_2 = \sqrt{73}$;

3. Hipotenusa h_3 do triângulo retângulo 2×5: ${h_3}^2 = 2^2 + 5^2 \Rightarrow h_3 = \sqrt{29}$.

Estamos supondo que $h_1 = h_2 + h_3$. Logo:

$$\begin{aligned} h_1 &= h_2 + h_3; \\ \sqrt{194} &= \sqrt{73} + \sqrt{29}; \\ \left(\sqrt{194}\right)^2 &= \left(\sqrt{73} + \sqrt{29}\right)^2; \\ 194 &= 73 + 29 + 2\sqrt{73 \times 29}; \\ 194 - 73 - 29 &= 2\sqrt{73 \times 29}; \\ \frac{92}{2} &= \sqrt{73 \times 29}; \\ 46^2 &= \left(\sqrt{73 \times 29}\right)^2; \\ 2116 &= 2117. \end{aligned} \tag{1}$$

A igualdade (1) é uma contradição. Assim, a hipotenusa h_1 do triângulo retângulo 5×13 não equivale à soma das hipotenusas h_2 e h_3 dos triângulos retângulos 3×8 e 2×5, respectivamente.

2.2.3 Semelhança de triângulos

Após constatarmos outra inconsistência de medidas, investiguemos agora se os triângulos retângulos 5×13, 3×8 e 2×5 são semelhantes. A semelhança de triângulos é definida em [11] como a seguir.

Definição 2.1 *Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos internos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.*

Dessa forma, se dois pares de lados correspondentes forem proporcionais, então os ângulos internos correspondentes serão congruentes e dois triângulos serão semelhantes. Comparemos os três triângulos retângulos da Figura 3.

1. Triângulos retângulos 5×13 e 3×8:

$$\frac{5}{3} = \frac{13}{8}. \tag{2}$$

A igualdade (2) não é verdadeira, uma vez que para tal, 40 deveria ser igual a 39.

2. Triângulos retângulos 5×13 e 2×5:

$$\frac{5}{2} = \frac{13}{5}. \tag{3}$$

A igualdade (3) não é verdadeira, uma vez que para tal, 25 deveria ser igual a 26.

3. Triângulos retângulos 3×8 e 2×5:

$$\frac{3}{2} = \frac{8}{5}. \tag{4}$$

A igualdade (4) não é verdadeira, uma vez que para tal, 15 deveria ser igual a 16.

As igualdades (2), (3) e (4) são falsas. Dessa forma, os triângulos retângulos não são semelhantes.

2.2.4 Declividade da reta

Depois da terceira inconsistência de medidas, analisemos se a reta suporte da hipotenusa h_1 do triângulo retângulo 5×13 é a reta suporte das hipotenusas h_2 e h_3 dos triângulos retângulos 3×8 e 2×5, respectivamente. Isto equivale a verificar inicialmente se as retas suportes têm a mesma declividade. Os triângulos retângulos da Figura 3 sugerem que a reta suporte das três hipotenusas é a mesma. O coeficiente angular de uma reta r, ilustrada na Figura 5, é definido por [12] da forma que segue.

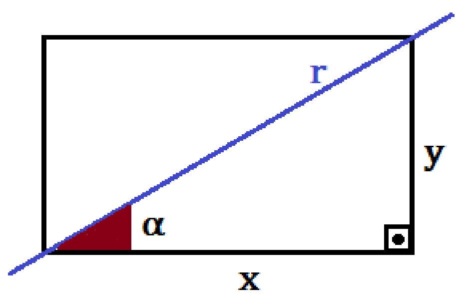


Figura 5. Declividade da reta r: coeficiente angular $m = \tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$

Definição 2.2 *O coeficiente angular de uma reta r não perpendicular ao eixo das abcissas é o número real m tal que*

$$m = \tan\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}. \tag{5}$$

A partir da igualdade (5), podemos determinar a medida do ângulo α de inclinação da reta r:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{6}$$

Empregando as relações (5) e (6), obtemos:

1. Coeficiente angular m_1 da reta suporte da hipotenusa h_1: $m_1 = \dfrac{5}{13} \approx 0,385$;

   Ângulo de inclinação α_1 da reta suporte de h_1: $\alpha_1 = \arctan\left(\dfrac{5}{13}\right) \approx 21,04°$;

2. Coeficiente angular m_2 da reta suporte da hipotenusa h_2: $m_2 = \dfrac{3}{8} = 0,375$;
   Ângulo de inclinação α_2 da reta suporte de h_2: $\alpha_2 = \arctan\left(\dfrac{3}{8}\right) \approx 20,56°$;

3. Coeficiente angular m_3 da reta suporte da hipotenusa h_3: $m_3 = \dfrac{2}{5} = 0,4$;
   Ângulo de inclinação α_3 da reta suporte de h_3: $\alpha_3 = \arctan\left(\dfrac{2}{5}\right) \approx 21,80°$.

Como os coeficientes angulares são diferentes, as hipotenusas dos triângulos retângulos 5×13, 3×8 e 2×5 têm retas suportes distintas.

2.2.5 A sequência de Fibonacci

Os números 2, 3, 5, 8 e 13, medidas dos catetos dos três triângulos retângulos da Figura 3, são termos consecutivos da sequência de Fibonacci

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ S_{n-1} + S_{n-2}, & n \geq 2. \end{cases} \tag{7}$$

Em [6], o sistema de equações (8) é descrito para calcular os ganhos ou perdas de área em figuras que têm os números da sequência de Fibonacci como medida dos lados.

Proposição 2.1 *Sejam A, B e C três números consecutivos da sequência de Fibonacci e X a perda ou ganho de área. As equações do sistema*

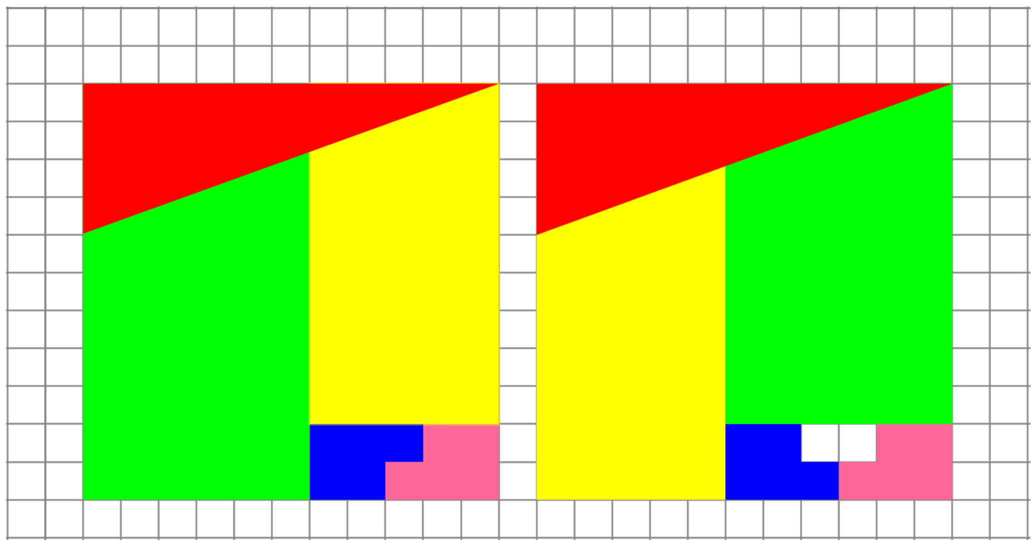
$$\begin{cases} A + B = C, \\ B^2 = A \cdot C \pm X, \end{cases} \tag{8}$$

relacionam A, B, C e X.

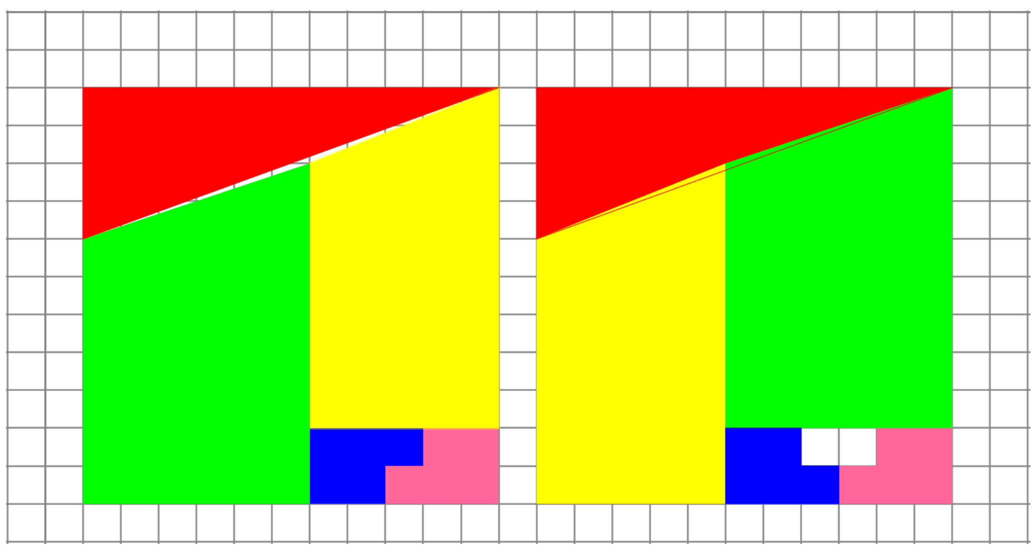
No sistema (8), a segunda equação é a Identidade de Cassini (Jean-Dominique Cassini (1625-1712)). Considerando nesse sistema $A = 5$, $B = 8$ e $C = 13$, obtemos $X = -1$. Desse modo, $X = -1$ significa que o reagrupamento das peças na Figura 3 provocou o ganho de um quadrado unitário.

2.3 Outras formas para o paradoxo de Curry

Outra forma do paradoxo de Curry é a forma quadrada. Nesta, um quadrado de lado ℓ é divido em peças que formam outro "quadrado" de lado ℓ, porém com um "buraco". Curry trabalhou em muitas variações de quadrados, mas não conseguiu construir um quadrado que pudesse ser dividido em menos de cinco peças e ainda produzisse um "buraco" que não tocasse a borda. As Figuras 6 e 7 ilustram duas das formas quadradas propostas por Curry.

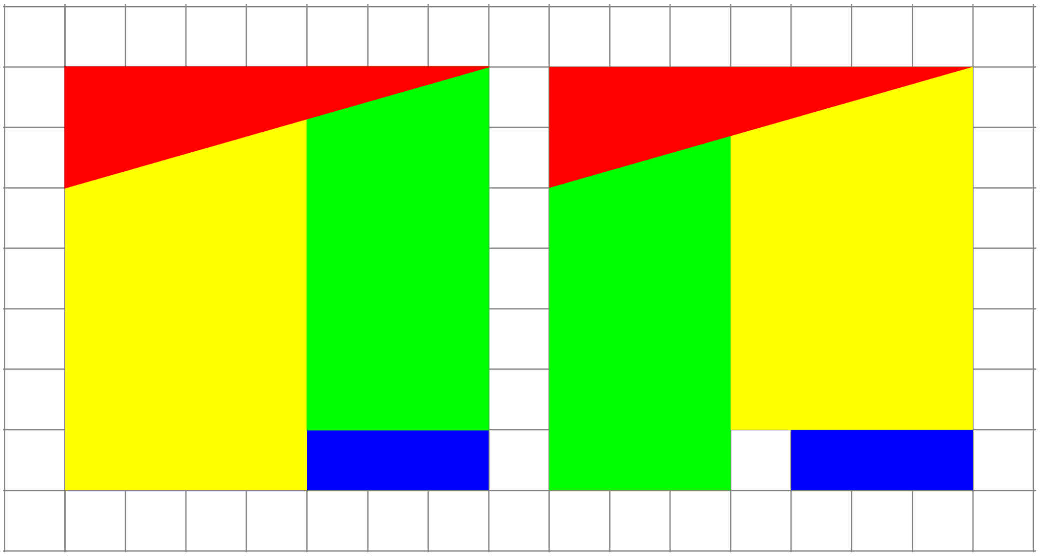


(a) Forma quadrada do paradoxo de Curry com cinco peças

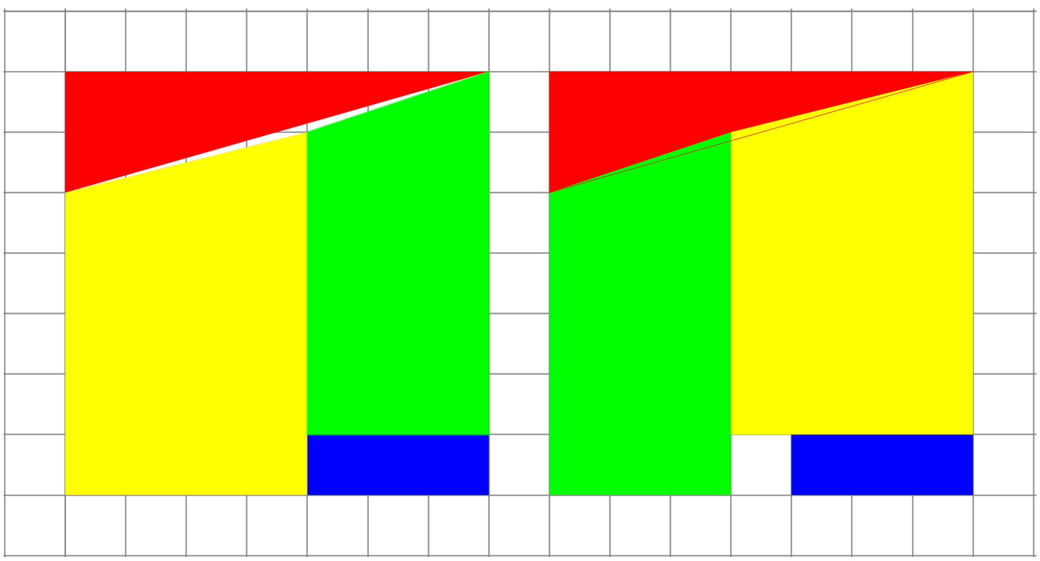


(b) Desvendando a forma quadrada do paradoxo de Curry com cinco peças

Figura 6. Construção da forma quadrada do paradoxo de Curry com cinco peças



(a) Forma quadrada do paradoxo de Curry com quatro peças



(b) Desvendando a forma quadrada do paradoxo de Curry com quatro peças

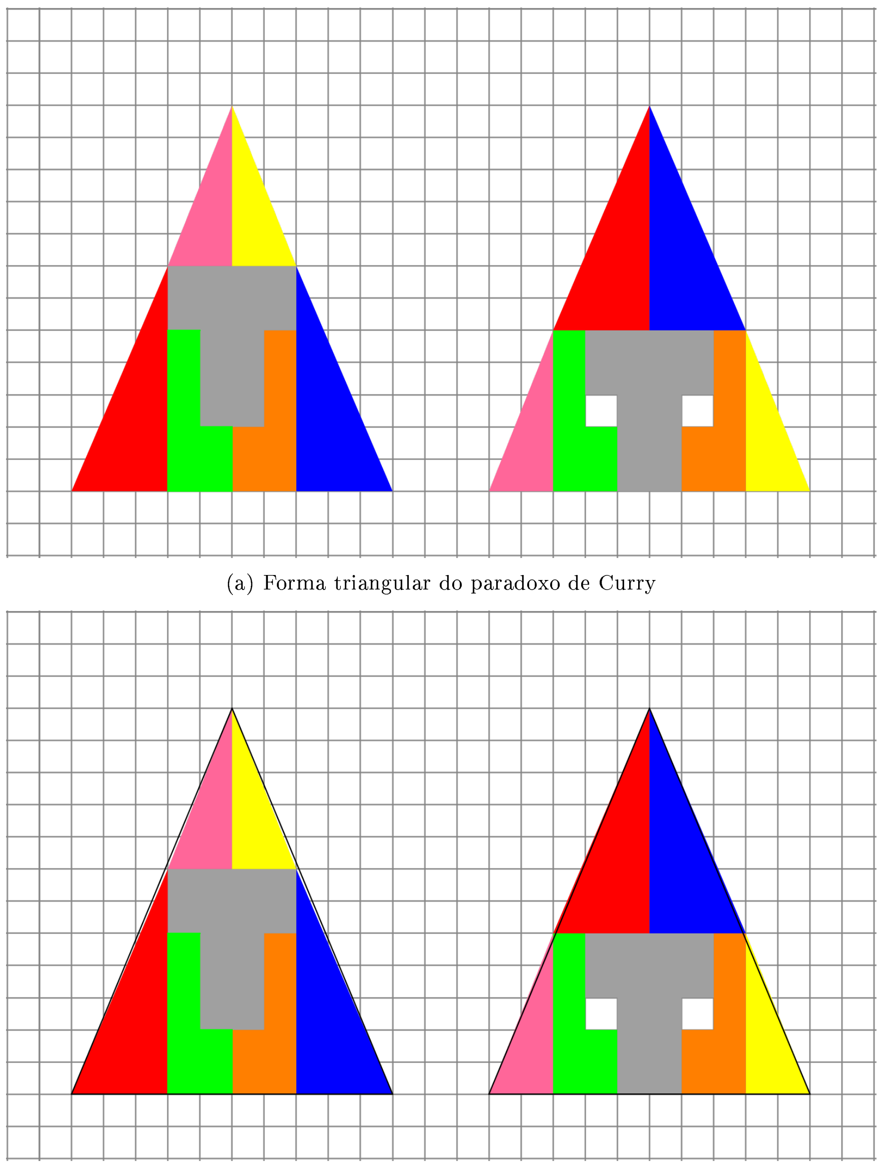
Figura 7. Construção da forma quadrada do paradoxo de Curry com quatro peças

No paradoxo de Curry, além do triângulo retângulo há uma variedade interessante de triângulos isósceles divididos em quatro, cinco, seis ou sete peças que formam um "buraco" de dois, quatro ou seis quadrados unitários [6, 8]. Esses triângulos podem ser construídos de duas maneiras:

1. os lados congruentes do triângulo isósceles não coincidem com os lados das peças;

2. as peças se sobrepõem.

A explicação para estes paradoxos, os triângulos isósceles de Curry, continua a mesma: as figuras são uma ilusão de ótica. Podemos observar as falhas na Figura 8.



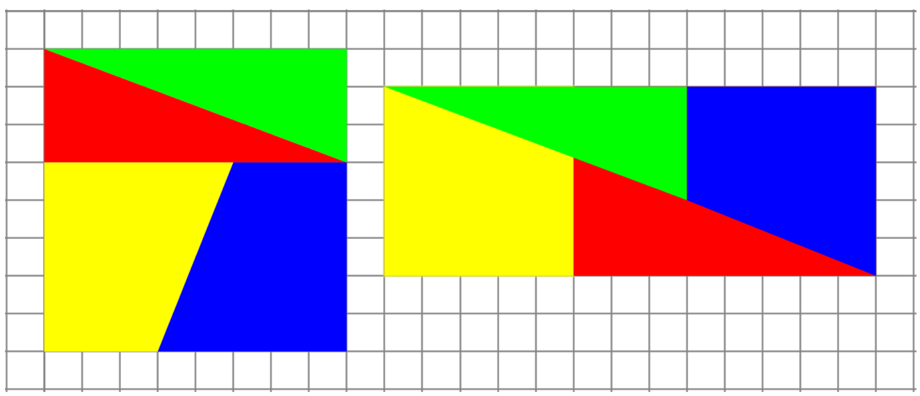
(a) Forma triangular do paradoxo de Curry

(b) Desvendando a forma triangular do paradoxo de Curry

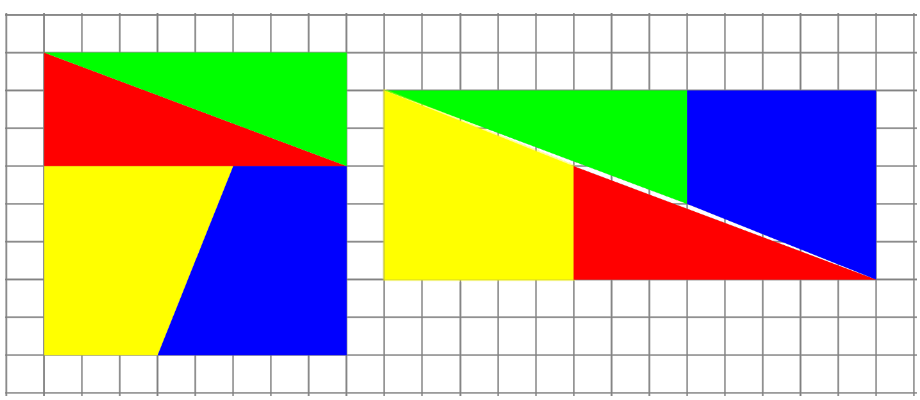
Figura 8. Construção da forma triangular do paradoxo de Curry

2.4 O paradoxo de Hooper

Segundo [6], outro paradoxo que provoca a perda ou o ganho de área é encontrado originalmente em *Rational Recreations* de William Hooper, uma obra de quatro volumes publicada em Londres em 1774. O paradoxo de Hooper consiste na divisão de uma figura em peças e no reagrupamento destas para formar outra figura, porém com área diferente da figura original. Em [6, 13] esse paradoxo á apresentado da seguinte forma: um quadrado com lado medindo $8uc$, de área $64ua$, é transformado em um retângulo de dimensões $5uc$ e $13uc$, de área $65ua$, como ilustra a Figura 9(a). Neste caso, podemos observar na Figura 9(b) que o quadrado de lado $8uc$ não tem falhas, enquanto no retângulo falta uma área próxima à diagonal. Esta área meda $1ua$, exatamente o que o quadrado tem a menos do que o retângulo. Novamente, podemos utilizar conceitos geométricos para investigar a ilusão provocada pelo reagrupamento das peças.



(a) Paradoxo de Hooper: $64 = 65$?



(b) Desvendando o paradoxo de Hooper: $64 = 65$?

Figura 9. Construção do paradoxo de Hooper

3 Resultados e discussão

As atividades foram propostas com o intuito de mensurar o domínio de conceitos de Geometria Plana e/ou de Geometria Analítica por partes dos estudantes dos três níveis de ensino. Nas turmas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, apresentamos o paradoxo de Curry para os estudantes construindo os triângulos no GeoGebra - Figura 10, e em Etil Vinil Acetato (EVA) - Figura 11.

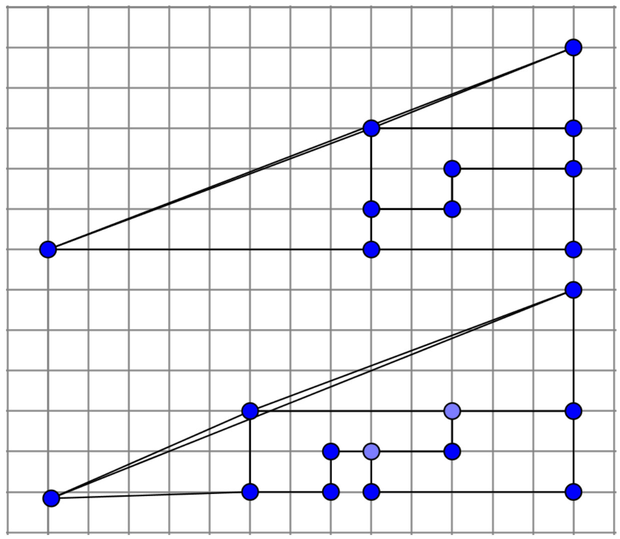


Figura 10. Triângulos de Curry construídos no GeoGebra

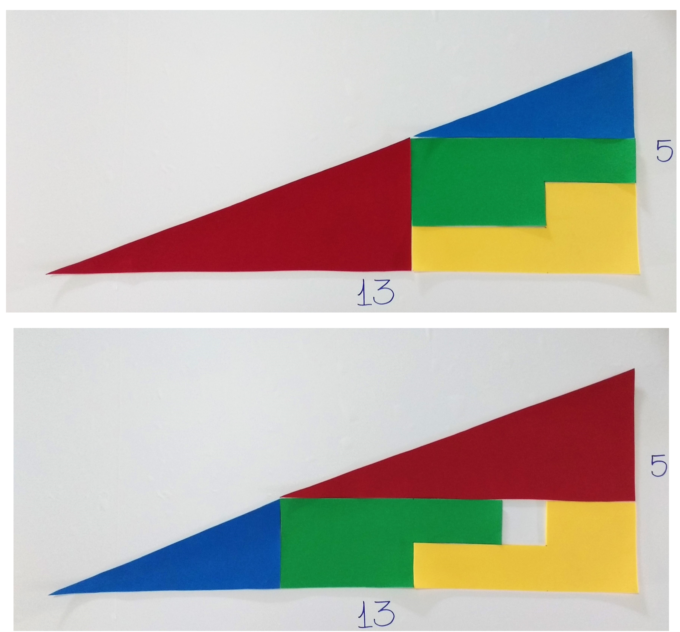


Figura 11. Triângulos de Curry construídos em EVA

3.1 Ensino Fundamental

A atividade com quatro questões foi aplicada em uma turma do nono ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual em Matinhos-PR. Dos 22 estudantes dessa turma, 17 estavam presentes. Discutimos com os estudantes, de maneira similar à introdução deste trabalho, o que seria um paradoxo e apresentamos o paradoxo de Curry. Conceitos geométricos como a área de algumas figuras planas e o Teorema de Pitágoras foram revistos. Essa parte durou 50 minutos, o tempo de uma aula. Na aula seguinte, durante mais 50 minutos, os estudantes responderam, trabalhando individualmente, às questões que seguem. A Figura 12 mostra os resultados gerais da atividade.

Questão 3.1 **(1^a questão)** *A soma das áreas de cada peça é igual à área dos triângulos formados pelas peças?*

Questão 3.2 **(2^a questão)** *Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa dos três triângulos retângulos. O que você conclui? Empregue a máquina calculadora para justificar sua conclusão.*

Questão 3.3 **(3^a questão)** *Observando a figura e a sua construção no GeoGebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?*

Questão 3.4 **(4^a questão)** *Com base nas conclusões sobre o paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o paradoxo de Hooper?*

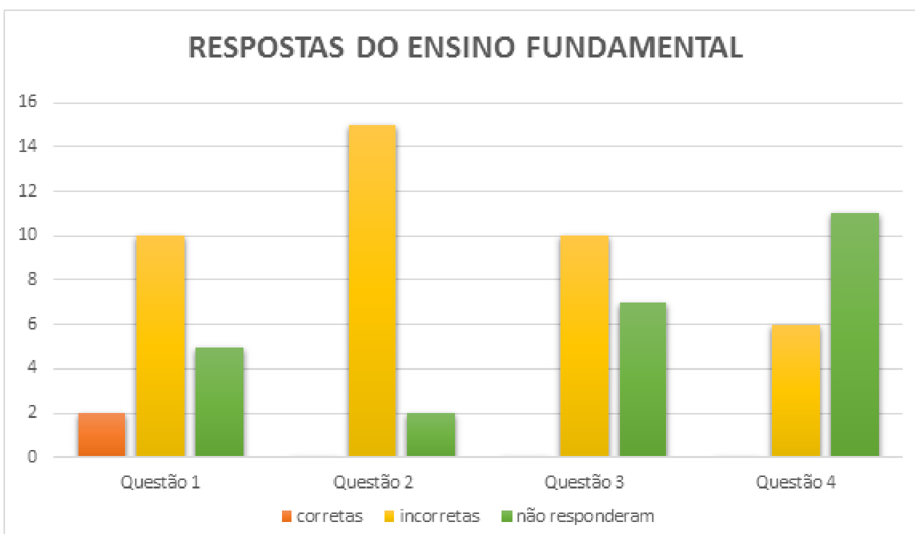


Figura 12. Respostas às questões da atividade para o Ensino Fundamental [8]

3.2 Ensino Médio

A atividade com cinco questões foi aplicada em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de um colégio público estadual em Matinhos-PR. Dos 39 estudantes dessa turma, 30 estavam presentes, sendo que 24 responderam às questões propostas e 6 não devolveram o questionário com as respostas. Discutimos com os estudantes, de maneira análoga à introdução deste trabalho, o que seria um paradoxo e apresentamos o paradoxo de Curry. Conceitos de Geometria Analítica, como a equação geral da reta e o coeficiente angular da reta, foram revisados. Essa parte durou uma aula de 50 minutos. Na aula seguinte, durante mais 50 minutos, os estudantes responderam, trabalhando individualmente, às questões listadas a seguir. A Figura 13 ilustra os resultados gerais da atividade.

Questão 3.5 (1ª questão) *Determine a equação geral $y = mx + n$ da reta suporte da diagonal dos retângulos de dimensões 13×5, 8×3 e 5×2. Use a máquina calculadora para determinar o ângulo de inclinação das retas.*

Questão 3.6 (2ª questão) *No primeiro triângulo formado pelas quatro peças, calcule: a) $y(0)$; b) $y(8)$; c) $y(13)$. As imagens calculadas coincidem com os valores verificados na figura?*

Questão 3.7 (3ª questão) *No segundo triângulo formado pelas quatro peças, calcule: a) $y(0)$; b) $y(5)$; c) $y(13)$. As imagens calculadas coincidem com os valores verificados na figura?*

Questão 3.8 (4ª questão) *Observando a figura e a sua construção no GeoGebra, o que você conclui sobre os triângulos formados pelas peças e sobre o quadrado perdido?*

Questão 3.9 (5ª questão) *Com base nas conclusões sobre o paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o paradoxo de Hooper?*

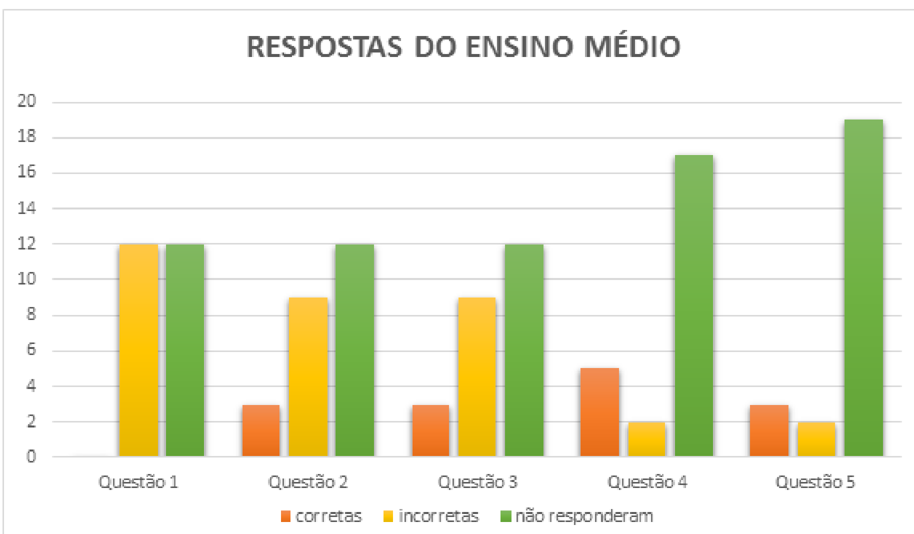


Figura 13. Respostas às questões da atividade para o Ensino Médio [8]

3.3 Ensino Superior

A atividade foi aplicada em uma turma do segundo período do Curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública federal, na disciplina de Geometria Espacial. Dos 37 estudantes dessa turma, 13 estavam presentes. Discutimos com os estudantes o que seria um paradoxo, exemplificando com paradoxos lógico-matemáticos e com os paradoxos geométricos de Curry e de Hooper. Os estudantes trabalharam em duplas durantes duas aulas de 50 minutos. O roteiro de atividades proposto para o Ensino Superior é praticamente o mesmo proposto para o Ensino Fundamental, uma vez que os estudantes já haviam cursado Geometria Plana no semestre anterior. A Figura 14 mostra os resultados gerais da atividade.

Questão 3.10 **(1^a questão)** *A soma das áreas de cada peça é igual à área dos triângulos formados pelas peças?*

Questão 3.11 **(2^a questão)** *Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule a medida da hipotenusa dos três triângulos retângulos. O que você conclui?*

Questão 3.12 **(3^a questão)** *Qual é sua explicação para o quadrado perdido?*

Questão 3.13 **(4^a questão)** *Com base nas conclusões sobre o Paradoxo de Curry, o que você tem a dizer sobre o Paradoxo de Hooper?*

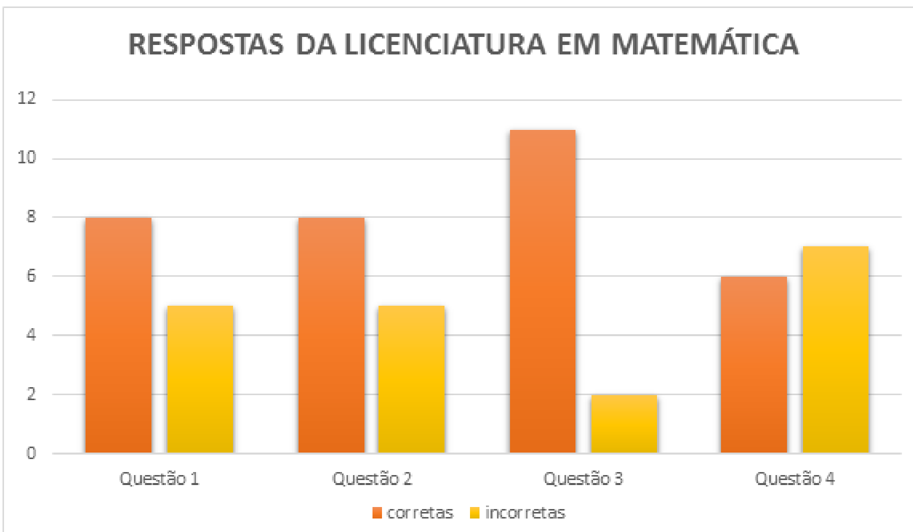


Figura 14. Respostas às questões da atividade para o Ensino Superior [8]

3.4 Análise das atividades

A partir da análise das respostas dos roteiros de atividades que aplicamos em sala de aula, verificamos que os estudantes das turmas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio têm dificuldades para empregar conceitos e definições; uma minoria é capaz de efetuar os cálculos associados corretamente e, ainda, uma parte desta minoria não sabe como usar esses cálculos para justificar a solução dos problemas propostos. Quanto ao Ensino Superior, os resultados foram satisfatórios. Mesmo assim, constatamos a falta de rigor matemático nas soluções apresentadas, assim como o mau uso da linguagem escrita.

4 Conclusões

Apresentamos neste trabalho alguns paradoxos geométricos e empregamos os paradoxos de Curry e de Hooper para avaliar a aprendizagem de conteúdos de Geometria Plana e de Geometria Analítica.

Os resultados das atividades aplicadas na Educação Básica, principalmente no que diz respeito ao cálculo de áreas, nos fazem pensar que a Geometria, mesmo constando nos Parâmetros Curriculares Nacionais para Matemática, é negligenciada ou pouco abordada/explorada em sala de aula no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Em 1989, [14] já afirmava/questionava:

> Quanto ao ensino de Geometria, o problema torna-se ainda mais grave: constata-se que ele vem gradualmente desaparecendo do currículo real das escolas. Será que este conhecimento não é necessário ao homem moderno? Terá a geometria perdido sua importância do ponto de vista educacional? Que outros motivos fizeram com que ela fosse praticamente expulsa da sala de aula?

Transcorridos quase trinta anos, a situação nos parece a mesma ou pior. Estamos cientes de que os resultados de duas turmas são insuficientes para fazermos inferências representativas sobre o ensino de Geometria na Educação Básica brasileira. Contudo, os resultados da prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, que apresenta um número expressivo de questões sobre Geometria Plana e Geometria Espacial, parecem corroborar essa conclusão.

Assim, devemos, enquanto professores de Matemática, trabalhar para incluir efetivamente a Geometria no currículo da Educação Básica. E nesse processo inclusivo, poderíamos empregar a Matemática Recreativa para estabelecer/explorar conceitos geométricos.

Agradecimentos

À CAPES, pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

Referências

[1] APROSIO, A. P. Pinóquio no país dos paradoxos. Zahar, Rio de Janeiro, 2015.

[2] WOLFRAMMATHWORLD Tangram Paradox.
Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/TangramParadox.html

[3] DUDENEY, H. Amusements in mathematics, Dover, New York, 1958.

[4] FARLOW, S. J. Paradoxes in mathematics. Dover, New York, 2014.

[5] ALVES, E. C. A.; MORAIS FILHO, D. C. de. Paradoxos geométricos recreativos como recurso didático. VII Semana de Matemática, Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, 2013.

[6] GARDNER, M. Mathematics, magic and mystery. Dover, New York, 1956.

[7] GEOGEBRA. Discover math with geogebra.
Disponível em: https://www.geogebra.org

[8] SENTONE, F. G. Paradoxos geométricos em sala de aula. Dissertação de Mestrado, UTFPR, Curitiba, 2017.

[9] NETO, A. C. M. Geometria. *Coleção PROFMAT*, v.9, n.1, Rio de Janeiro, 2013.

[10] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. Temas e problemas elementares. *Coleção PROFMAT*, v.5, n.3, Rio de Janeiro, 2012.

[11] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Fundamentos de matemática elementar: geometria plana. v.9, n.9, São Paulo, 2013.

[12] IEZZI, G. Fundamentos de matemática elementar: geometria analítica. v.7, n.6, São Paulo, 2013.

[13] MELLO e SOUZA, J. C. de. Matemática divertida e curiosa. Rio de Janeiro, 2001.

[14] PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica. Dissertação de Mestrado, Unicamp, 1989.