Frações contínuas

Maria Cecília K. Aguilera-Navarro
Departamento de Matemática - UNICENTRO
85010-990 Guarapuava, PR
aguilera@unicentro.br

Valdir C. Aguilera-Navarro
Departamento de Química e Física - UNICENTRO
85010-990 Guarapuava, PR
aguilera@almix.com.br

(*Recebido: 7 de dezembro de 2000)*

Resumo: *Faz-se uma apresentação e um estudo geral das frações contínuas. Mostra-se como essas frações podem representar funções e sua relação com a série de Taylor e com os aproximantes de Padé. Vários exemplos ilustram a teoria.*

Palavras-chave: *Frações contínuas, representação de funções, série de Taylor, aproximantes de Padé*

Abstract: *A presentation and a general discussion of continuous fractions are developed. It is shown that these fractions can represent functions. Their relationships with Taylor series and Padé approximants are discussed. Several examples illustrate the theory.*

Key words: *Continuous fractions, representation of functions, Taylor series, Padé approximants*

1 Introdução

As frações contínuas têm importância tanto pelo aspecto fundamental da teoria subjacente como pelas inúmeras possibilidades de aplicações em problemas diversos como modelagens e equações diferenciais. Embora haja alguma literatura em Português sobre frações contínuas (VELOSO, 1956; BESKIN, 1987), não temos ciência de nenhum trabalho que relacione essas frações com as séries de Taylor e com os aproximantes de Padé, apesar da sua importância. Sentimo-nos, então, duplamente motivados a desenvolver o presente trabalho. Primeiramente, para oferecer aos interessados material referente a essa relevante questão. Com esta idéia presente, tivemos o cuidado de apresentar o material sob forma didática, para aqueles que desejarem se familiarizar com o tema e nele se aprofundar. O tema foi tratado com o rigor matemático necessário.

Em segundo lugar, mostramos a relação que há entre as frações contínuas, as séries de Taylor e os aproximantes de Padé. Embora as séries de Taylor sejam amplamente conhecidas e tratadas em quase todos os textos de Cálculo, o mesmo não acontece com a teoria dos aproximantes de Padé. Para o leitor interessado, sugerimos os trabalhos de Aguilera-Navarro *et al.* (AGUILERA-NAVARRO *et al.*, 1997; 1999).

Na próxima seção, apresentamos uma introdução aos fundamentos da teoria das frações contínuas. Na seção 3, apresentamos teoremas de convergência. A relação entre frações contínuas, séries de Taylor e aproximantes de Padé é discutida na seção 4. Algumas observações de caráter geral são apresentadas na seção 5. Exemplos de representação de funções por frações contínuas são dados na seção 6. Referências bibliográficas são dadas no final do artigo.

2 Frações contínuas

De uma maneira muito simplificada, podemos dizer que uma fração contínua é uma fração em que o denominador tem a forma de um inteiro mais uma fração, cujo denominador é também formado por um inteiro mais uma fração, e assim por diante. Uma fração contínua F_1 tem, assim, a estrutura

$$F_1 = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{c_1}{d_1 + \cfrac{e_1}{f_1 + \cdots}}} \tag{1}$$

onde $a_1, b_1, c_1, \cdots$ são quantidades positivas ou negativas, constantes ou não; podem depender de um ou mais parâmetros.

Uma fração contínua pode, alternativamente, assumir a forma

$$F_2 = F + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{c_2}{d_2 + \cfrac{e_2}{f_2 + \cdots}}} \tag{2}$$

onde F, $a_2, b_2, c_2, \ldots$ são quantidades positivas ou negativas, constantes ou não; podem depender de um ou mais parâmetros.

Talvez a primeira vez que o gérmen de uma fração contínua apareceu na história da matemática foi no famoso e histórico *Elementos*, de Euclides. Quando esse autor tratou do problema do máximo divisor comum de dois números naturais, usou um algoritmo semelhante ao de se converter uma fração numa fração contínua como se pode ver no seguinte exemplo, que consta do *Elementos* (SMITH, 1953):

$$\frac{12}{38} = \frac{6}{19} = \frac{1}{3 + \cfrac{1}{6}} \tag{3}$$

Posteriormente, vestígios de tal procedimento são encontrados em textos árabes e gregos.

Entretanto, atribui-se ao matemático italiano Rafael Bombelli (1572) o mérito de ser considerado o iniciador da teoria moderna sobre as frações contínuas. Quando trata de raízes quadradas, esse autor considera o caso de encontrar quanto vale $\sqrt{13}$, e apresenta como resposta o valor (BOMBELLI)

$$3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cdots}}} \tag{4}$$

que é uma forte indicação de que ele sabia que

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cdots}}} \tag{5}$$

Passando, agora, para uma discussão mais formal, definimos uma fração contínua como sendo o limite dos truncamentos sucessivos dos termos de uma fração da forma:

$$G = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}} \tag{6}$$

que também pode ser representada por

$$G = \left[b_0; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \right] \tag{7}$$

ou

$$G = b_0 + \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_3}{b_3+} \cdots \tag{8}$$

Com o objetivo de facilitar e organizar nossa análise, e antecipar notação que será utilizada na seção 4, observamos que os primeiros truncamentos de (6) são

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{b_0}{1}, \quad \frac{A_1}{B_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + b_0 b_1}{b_1} \tag{9}$$

$$\frac{A_2}{B_2} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = \frac{b_0 a_2 + a_1 b_2 + b_0 b_1 b_2}{a_2 + b_1 b_2} \tag{10}$$

e

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}} \tag{11}$$

Dizemos que a equação (11) define o n-ésimo convergente a G. Desta forma, por definição, a fração contínua G é obtida pelo limite de (11) quando n vai ao infinito, isto é,

$$G = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{A_n}{B_n} \right) \tag{12}$$

Podemos verificar as seguintes relações de recorrência

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= b_{n+1} A_n + a_{n+1} A_{n-1}, \\ B_{n+1} &= b_{n+1} B_n + a_{n+1} B_{n-1}, \end{aligned} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

com

$$\begin{aligned} A_{-1} &= 1, \quad A_0 = b_0 \\ B_{-1} &= 0, \quad B_0 = 1 \end{aligned} \tag{14}$$

A prova pode ser feita por indução. Primeiramente, observemos que as relações de recorrência (13) são formalmente idênticas. Dessa forma, vamos demonstrar que a primeira delas é verdadeira. A demonstração de que a outra também é verdadeira segue exatamente os mesmos passos apenas substituindo-se A por B.

A partir de (9), vemos que as relações (13) são verdadeiras para $n = 0$. Por hipótese de indução, suponhamos que são verdadeiras para todo $n = k$, isto é,

$$A_{k+1} = b_{k+1} A_k + a_{k+1} A_{k-1} \tag{15}$$

Vamos provar que vale para $n = k + 1$, isto é,

$$A_{k+2} = b_{k+2} A_{k+1} + a_{k+2} A_k \tag{16}$$

Dividindo esta última relação por b_{k+2}, obtemos

$$\frac{A_{k+2}}{b_{k+2}} = A_{k+1} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}} A_k \tag{17}$$

Substituindo (15) em (17), obtemos

$$\frac{A_{k+2}}{b_{k+2}} = b_{k+1} A_k + a_{k+1} A_{k-1} + \frac{a_{k+2}}{b_{k+2}} A_k \tag{18}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{k+2} &= a_{k+2}A_k + b_{k+1}b_{k+2}A_k + a_{k+1}b_{k+2}A_{k-1} \\ &= a_{k+2}A_k + b_{k+2}\left(b_{k+1}A_k + a_{k+1}A_{k-1}\right) \\ &= a_{k+2}A_k + b_{k+2}A_{k+1} \end{aligned} \tag{19}$$

onde, na última passagem, usamos a relação (15). Fica, assim, demonstrada a veracidade da relação (16), e, como foi mencionado no começo desta demonstração, as relações (13) são verdadeiras para todo n.

As relações (13) são chamadas *fórmulas fundamentais de recorrência*. Delas podemos derivar determinantes que serão úteis para relacionar os coeficientes das frações contínuas com os coeficientes da série de Taylor correspondente.

De (13) e por uma das propriedades dos determinantes temos que

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A_{n-1} & b_nA_{n-1} + a_nA_{n-2} \\ B_{n-1} & b_nB_{n-1} + a_nB_{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_{n-1} & b_nA_{n-1} \\ B_{n-1} & b_nB_{n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{n-1} & a_nA_{n-2} \\ B_{n-1} & a_nB_{n-2} \end{vmatrix} \\ &= -a_n \begin{vmatrix} A_{n-2} & A_{n-1} \\ B_{n-2} & B_{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

Por aplicações sucessivas de (20), obtemos

$$A_{n-1}B_n - B_{n-1}A_n = (-1)^n\, a_1a_2 \cdots a_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

onde o caso $n = 1$ pode ser verificado diretamente de (9).

2.1 Transformações de equivalência

Podemos reescrever a fração contínua (6) numa forma que é mais conveniente em algumas situações. Para isso, utilizamos recursos oferecidos por *transformações de equivalência*. Sabemos que o valor de uma fração não se altera quando multiplicamos o numerador e o denominador por uma mesma quantidade não nula. Assim, podemos multiplicar numeradores e denominadores de (6) por números não nulos c_j. Embora G obviamente não se altere, as quantidades A_n e B_n, em geral, serão alteradas pelo fator $c_1c_2 \cdots c_n$. Temos, então, que a fração contínua G pode ser reescrita como

$$G = b_0 + \cfrac{c_1a_1}{c_1b_1 + \cfrac{c_1c_2a_2}{c_2b_2 + \cfrac{c_2c_3a_3}{c_3b_3 + \cdots}}} \tag{22}$$

Se $b_n \neq 0$, tomando $c_n = b_n^{-1}$, obtemos

$$G = b_0 + \cfrac{a_1^*}{1 + \cfrac{a_2^*}{1 + \cfrac{a_3^*}{1 + \cdots}}} \tag{23}$$

onde

$$a_1' = \frac{a_1}{b_1}, \quad a_j' = \frac{a_j}{b_{j-1}b_j}, j = 2, 3, 4, \ldots \tag{24}$$

Vamos, agora, considerar somente sequências pares ou ímpares, ou seja, sequências do tipo (A_{2n}, B_{2n}) ou (A_{2n+1}, B_{2n+1}). De (23), com $b_0 = 1$,

$$\frac{A_2}{B_2} = 1 + \frac{a_1'}{1 + a_2'} \tag{25}$$

De

$$\begin{aligned} \frac{a_2'}{1 + \dfrac{a_3'}{1 + a_4'}} &= \frac{a_2'(1 + a_4')}{1 + a_3' + a_4'} = \frac{a_2'(1 + a_4') + a_2'a_3' - a_2'a_3'}{1 + a_3' + a_4'} \\ &= \frac{a_2'(1 + a_3' + a_4')}{1 + a_3' + a_4'} - \frac{a_2'a_3'}{1 + a_3' + a_4'} \\ &= a_2' - \frac{a_2'a_3'}{1 + a_3' + a_4'} \end{aligned} \tag{26}$$

obtemos

$$\frac{A_4}{B_4} = 1 + \frac{a_1'}{1 + a_2' - \dfrac{a_2'a_3'}{1 + a_3' + a_4'}} \tag{27}$$

Repetindo esse processo sucessivamente para $a_4', a_6', \ldots,$ a parte par G_p de G se expressa como

$$G_p = 1 + \cfrac{a_1'}{1 + a_2' - \cfrac{a_2'a_3'}{1 + a_3' + a_4' - \cfrac{a_4'a_5'}{1 + a_5' + a_6' - \cdots}}} \tag{28}$$

Analogamente, podemos expressar a parte ímpar G_i de G como

$$G_i = 1 + a_1' - \cfrac{a_1'a_2'}{1 + a_2' + a_3' - \cfrac{a_3'a_4'}{1 + a_4' + a_5' - \cfrac{a_5'a_6'}{1 + a_6' + a_7' - \cdots}}} \tag{29}$$

2.2 Exemplo

Como um exemplo simples, tomemos

$$G = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} \tag{30}$$

de onde vemos que $b_0 = 1, a_i = 1, b_i = 2, i = 1, 2, 3, \ldots$.

A partir das expressões (9), (10) e (11), obtemos

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{1}{1}, \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{7}{5}, \quad \frac{A_3}{B_3} = \frac{17}{12}, \quad \frac{A_4}{B_4} = \frac{41}{29} \tag{31}$$

As relações de recorrência (13) se tornam

$$A_{n+1} = 2A_n + A_{n-1}, \quad B_{n+1} = 2B_n + B_{n-1} \tag{32}$$

onde, $b_0 = 1, a_i = 1, b_i = 2, i = 1, 2, 3, \ldots$.

O termo geral para as relações de recorrência (32) pode ser obtido assumindo-se que A_n ou B_n é uma soma da forma $\alpha x^n + \beta y^n$ e determinando o valor de α, β, x e y. Assim, como temos quatro incógnitas, montamos um sistema de quatro equações (não lineares) e tentamos obter uma solução. Essas equações podem ser construídas tomando-se $n = 1, 2, 3, 4$ para a primeira das relações (32) e tendo em conta os valores de A_n dados em (31). Dessa maneira, obtemos o sistema de equações algébricas não lineares

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha x + \beta y &= 3 \\ \alpha x^2 + \beta y^2 &= 7 \\ \alpha x^3 + \beta y^3 &= 17 \end{aligned} \tag{33}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right) \tag{34}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}\right) \tag{35}$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \tag{36}$$

$$y = 1 - \sqrt{2} \tag{37}$$

Temos, assim, que

$$A_n = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}\right)^{n+1} \tag{38}$$

Usando o mesmo procedimento para os coeficientes B_n, encontramos

$$B_n = \left[\frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{2}\right)^{n+1}\right]\sqrt{2} \tag{39}$$

No limite $n \to \infty$ vemos que

$$G = \lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2} \tag{40}$$

Como em (30) todas as quantidades a_n têm o valor 1, a relação (21) se reduz a

$$A_{n-1}B_n - B_{n-1}A_n = (-1)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{41}$$

Finalmente, a versão transformada de (30) é

$$G = 1 + \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{4}}{1 + \cfrac{\frac{1}{4}}{1 + \cdots}}} \tag{42}$$

e as partes pares e ímpares de (42) G são

$$G_p = 1 + \cfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4} - \cfrac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{2} - \cfrac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{2} - \cdots}}} \qquad \text{e} \qquad G_i = \frac{3}{2} - \cfrac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{2} - \cfrac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{2} - \cfrac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{2} - \cdots}}} \tag{43}$$

3 Teoremas de convergência

Daremos a seguir alguns teoremas de convergência para frações contínuas. As demonstrações são extremamente elaboradas e não serão apresentadas aqui por fugirem do escopo deste trabalho. Os interessados nas demonstrações poderão consultar a referência (BAKER, 1975).

Teorema 1: Se os a_n da fração contínua

$$G = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + \cfrac{a_3}{1 + \cdots}}} \tag{44}$$

são tais que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \qquad \text{e} \quad a > -\frac{1}{4} \tag{45}$$

então existe um inteiro N tal que

$$G_m = \cfrac{a_m}{1 + \cfrac{a_{m+1}}{1 + \cfrac{a_{m+2}}{1 + \cdots}}} \tag{46}$$

converge para todo $m > N$.

Teorema 2: Se todos os a_n da fração contínua

$$G = \cfrac{1}{1 + \cfrac{a_2}{1 + \cfrac{a_3}{1 + \cdots}}} \tag{47}$$

pertencem ao domínio parabólico truncado

$$|z| - \mathrm{Re}(z) \leq \rho < \frac{1}{2} \tag{48}$$

$$|z| \leq M + \epsilon n, \quad 0 < \epsilon < 1, \quad (1 - 2\rho)/\epsilon^2 > 1 \tag{49}$$

para algum M, ϵ e ρ, onde $\mathrm{Re}(z)$ é a parte real da variável complexa z, então os convergentes A_n/B_n convergem a um limite G. A parábola (48) tem seu vértice em $z = -1/4$ e seu foco em $z = 0$, e é aberta à direita.

4 Relação com séries de Taylor e aproximantes de Padé

Os coeficientes de uma série de Taylor e os da fração contínua associada estão intimamente relacionados, como não poderia deixar de ser. Sejam

$$G = G(z) = b_0 + \cfrac{a_1 z}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \cfrac{a_3 z}{1 + \cdots}}} \tag{50}$$

e

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = \lim_{n \to \infty} \frac{A_n(z)}{B_n(z)} \tag{51}$$

Então, os coeficientes de Taylor g_n dependem de $b_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ e são reproduzidos exatamente dos n-ésimos convergentes a $G(z)$. À semelhança de (9), (10) e (11), esses convergentes são dados por

$$\frac{A_0(z)}{B_0(z)} = \frac{b_0}{1}, \quad \frac{A_1(z)}{B_1(z)} = \frac{b_0 + a_1 z}{1}, \quad \frac{A_2(z)}{B_2(z)} = \frac{b_0 + a_1 z + b_0 a_2 z}{1 + a_2 z} \tag{52}$$

Em geral,

$$\begin{aligned} A_{n+1}(z) &= A_n(z) + a_{n+1}\, z\, A_{n-1}(z) \\ B_{n+1}(z) &= B_n(z) + a_{n+1}\, z\, B_{n-1}(z) \end{aligned} \tag{53}$$

que são relações de recorrência análogas a (13).

Vemos que $A_n(z)$ e $B_n(z)$ são funções polinomiais de graus dados por

$$\begin{aligned} &gr\,[A_{2n}(z)] = n && gr\,[B_{2n}(z)] = n \\ &gr\,[A_{2n+1}(z)] = n + 1 && gr\,[B_{2n+1}(z)] = n \end{aligned} \tag{54}$$

Com essas informações sobre os graus, juntamente com o fato de que o n-ésimo convergente reproduz os primeiros $n + 1$ coeficientes da série de Taylor de $G(z)$, podemos concluir que:

Teorema: *A seqüência dos convergentes da fração contínua (50) são exatamente a seqüência dos Padés* $[0/0]$, $[1/0]$, $[1/1]$, $[2/1]$, $[2/2]$, $\ldots$ *da tabela de Padé para* $G(z)$.

A parte par de (50) é dada pela sequência diagonal $[0/0]$, $[1/1]$, $[2/2]$, ... da tabela de Padé (AGUILERA-NAVARRO et al., 1997). Analogamente a (28), a parte par de (50) é dada por

$$G_p = b_0 + \cfrac{a_1 z}{1 + a_2 z - \cfrac{a_2 a_3\, z^2}{1 + (a_3 + a_4)\, z - \cfrac{a_4 a_5\, z^2}{1 + (a_5 + a_6)\, z - \cdots}}} \tag{55}$$

Podemos relacionar os parâmetros a_i das frações contínuas (50) e (55) diretamente com os coeficientes g_i da série de potências (51) da seguinte maneira

$$a_{2n} = -\frac{C\,(n+1, n)\, C\,(n-1, n-1)}{C(n, n-1)C(n, n)}, \quad n \geq 1 \tag{56}$$

$$a_{2n+1} = -\frac{C\,(n+1, n+1)\, C\,(n, n-1)}{C(n, n)C(n+1, n)} \tag{57}$$

onde

$$C(r, s) \equiv \det \begin{vmatrix} g_{r-s+1} & g_{r-s+2} & \cdots & g_r \\ g_{r-s+2} & g_{r-s+1} & \cdots & g_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_r & g_{r+1} & \cdots & g_{r+s-1} \end{vmatrix} \tag{58}$$

Também podemos relacionar os coeficientes a_i e b_j, da fração contínua (6), e os coeficientes p_r e q_s dos aproximantes de Padé à função G (BAKER, 1975). Os coeficientes $p_r = p_r(m, n)$ e $q_s = q_s(m, n)$, do aproximante de Padé $[m/n]$, definidos por

$$[m/n] = \frac{\sum_{j=0}^{m} p_j(m, n) z^j}{\sum_{i=0}^{n} q_i(m, n) z^i} \tag{59}$$

onde $[m/n]$ é o Padé mn que representa a função G, e os coeficientes a_{2n} e a_{2n+1}, da fração contínua associada a G, estão relacionados por

$$a_{2n} = \frac{q_n\,(n, n)\, q_0\,(n-1, n-1)}{q_0(n, n) q_{n-1}(n-1, n-1)} \tag{60}$$

$$a_{2n+1} = \frac{p_{n+1}\,(n+1, n)\, q_0\,(n, n-1)}{q_0(n+1, n) p_n(n, n-1)} \tag{61}$$

Com as relações (60) e (61), podemos computar as frações contínuas a partir da tabela de Padé, ou vice-versa, computar os degraus da tabela de Padé a partir das frações contínuas.

5 Algumas propriedades das frações contínuas

Nesta seção, apresentamos, resumidamente e sem demonstrar, algumas propriedades das frações contínuas.

Sejam

$$f = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}} \tag{62}$$

e seu convergente de ordem n

$$f_n = \frac{A_n}{B_n} = b_0 + \frac{a_1}{b_1+}\,\frac{a_2}{b_2+}\,\frac{a_3}{b_3+}\,\frac{a_4}{b_4+}\cdots\frac{a_n}{b_n} \tag{63}$$

1. Se existir $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_n}{B_n}$, a fração contínua se diz *convergente.*

   Se $a_i = 1$ e os b_i são inteiros, sempre há convergência.

2. Se $a_i > 0$ e $b_i > 0$ então $f_{2n} < f_{2n+2}$ e $f_{2n-1} > f_{2n+1}$

3.

$$1 + a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_2a_3a_4\cdots a_n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_2}{1 + a_2 - \cfrac{a_3}{1 + a_3 - \ddots \cfrac{a_n}{1 + a_n}}}} \tag{64}$$

4.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{a_1^2}{a_1 + a_2 - \cfrac{a_2^2}{a_2 + a_3 - \cfrac{a_3^2}{a_3 + a_4 - \ddots \cfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-1} + a_n}}}}} \tag{65}$$

6 Exemplos

A seguir, oferecemos alguns exemplos de representação de algumas funções e números transcendentais em termos de frações contínuas. Essas representações são muito úteis em cálculos computacionais, pois os algoritmos desenvolvidos com base nessas representações são mais eficientes que aqueles desenvolvidos com base nas séries de Taylor.

$$\arctan(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{4x^2}{5 + \cfrac{9x^2}{7 + \cdots}}}} \tag{66}$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= x \quad a_n = (n - 1)^2 x^2 \\ b_0 &= 0 \quad b_n = 2n - 1 \end{aligned} \tag{67}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{A_0}{B_0} &= 0 & \frac{A_3}{B_3} &= \frac{15x + 4x^3}{15 + 9x^2} \\ \frac{A_1}{B_1} &= x & \frac{A_4}{B_4} &= \frac{105x + 55x^3}{105 + 90x^2 + 9x^4} \\ \frac{A_2}{B_2} &= \frac{3x}{3 + x^2} & \frac{A_5}{B_5} &= \frac{945x + 735x^3 + 64x^5}{945 + 1050x^2 + 225x^4} \end{aligned} \tag{68}$$

$$\ln(x + 1) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{3 + \cfrac{4x}{4 + \cfrac{4x}{5 + \cfrac{9x}{6 + \cdots}}}}}} \tag{69}$$

$$\tan(z) = \cfrac{z}{1 - \cfrac{z^2}{3 - \cfrac{z^2}{5 - \cfrac{z^2}{7 - \cdots}}}}, \quad z \neq (1 - 2n)\frac{\pi}{2} \tag{70}$$

$$\tanh(z) = \cfrac{z}{1 + \cfrac{z^2}{3 + \cfrac{z^2}{5 + \cfrac{z^2}{7 + \cdots}}}}, \quad z \neq (1 - 2n)\frac{\pi i}{2} \tag{71}$$

$$\exp(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{1 + \cfrac{z}{2 - \cfrac{z}{3 + \cfrac{z}{2 - \cfrac{z}{5 + \cdots}}}}}} \tag{72}$$

São conhecidas representações em termos de frações contínuas de vários números transcendentais. Como exemplo, apresentamos duas representações do número π e da base e dos logaritmos naturais

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}} \tag{73}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}} \tag{74}$$

O resultado (73) foi obtido no século XVIII, por Euler (EULER, 1783). Também é devida a esse notável matemático a expressão (74) (EULER, 1737).

Agradecimentos

Os autores agradecem um dos árbitros pela indicação dos trabalhos de Beskin e Veloso.

Referências

AGUILERA-NAVARRO, M. C. K.,AGUILERA-NAVARRO, V. C., FERREIRA, R. e TERAMON, N., *Aproximantes de Padé*. Notas do Departamento de Matemática. Londrina: UEL, 1997.

AGUILERA-NAVARRO, M. C. K.,AGUILERA-NAVARRO, V. C., FERREIRA, R. e TERAMON, N., Os aproximantes de Padé, *Rev. Universitária* (*Soc. Bras. de Matemática*), n. 26/27, 1999, p. 49-66.

BAKER, G. A., Jr., *Essentials of Padé Approximants.* New York: Academic Press, 1975.

BESKIN, N. *Frações contínuas.* Trad. Pedro Lima, Moscou: Mir, 1987.

BOMBELLI, "Modo di formare il rotto nella estrattione delle Radici quadrate", *Algebra.* (*apud* SMITH, D. E., *History of Mathematics*, New York: Dover, 1953, p. 419).

EULER, L. *De fractionibus continuis*, 1737, (*apud* SMITH, D. E., *History of Mathematics*, New York: Dover, 1953, p. 421).

EULER, L. *Opuscula analytica*, Petrograd: 1783, v. 1; e Petrograd: 1785, v. 2. (*apud* SMITH, D. E., *History of Mathematics*, New York: Dover, 1953, p. 311).

SMITH, D. E., *History of Mathematics*, New York: Dover, 1953, p. 418.

VELOSO, P. D., *Frações contínuas e análise combinatória.* Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1956.