

# Uma Apresentação do Teorema de Mamikon

## Mamikon's Theorem Revisited

**Eloy Nicotera Junior**

Universidade Federal do ABC - UFABC, Santo André, SP  
*eloynjunior@gmail.com*

**Sinuê Dayan Barbero Lodovici**

Universidade Federal do ABC - UFABC, Santo André, SP  
*sinue@ufabc.edu.br*

**Resumo:** O Teorema de Mamikon apresenta caminhos geométricos alternativos ao Cálculo para determinação de áreas. Este método tem uma abordagem dinâmica e requer poucos conhecimentos de Matemática Superior, o que nos permite a apresentação do assunto para alunos ainda nos anos iniciais do ensino básico. Por ser um trabalho recente, quase todos os trabalhos e artigos sobre o teorema são publicações do próprio Mamikon e de seus colaboradores. Acreditamos, porém, que esta seja a primeira apresentação desse em português. Neste artigo apresentamos o desenvolvimento do teorema, contando com uma abordagem intuitiva e visual de fácil entendimento, principalmente se apresentadas com softwares de visualização como o Geogebra<sup>1</sup>. Apresentamos, então, aplicações para o cálculo da área sob a curva de algumas das principais funções estudadas tanto pelos alunos do ensino básico como superior. Finalizamos o artigo com uma apresentação da demonstração formal do teorema fundamentada em Geometria Diferencial.

**Palavras-chave:** teorema de Mamikon; cálculo visual; geometria; geometria dinâmica; geometria diferencial.

**Abstract:** Mamikon's Theorem brings us an alternative geometric approach on evaluating some areas to Differential Calculus. The theorem offers a dynamic appeal which enables someone to teach this subject even to high school students with little mathematical background. Due to the fact that such a result is recent, almost every paper and article about the subject was written by Mamikon himself and his collaborators. As so, we believe that this is the first work on the subject written in Portuguese. Here, we try to present this theorem with a simple, visual and intuitive approach that could be easily grasped by anyone, mainly if supported by a software such as Geogebra. Some applications with well-known functions were also presented. We conclude this article by presenting a formal proof of theorem with Differential Geometry.

**Key words:** Mamikon's theorem; visual calculus; geometry; dynamic geometry; differential geometry.

---

<sup>1</sup><http://www.geogebra.org>

## 1 Introdução

Este trabalho tem como base o livro *New Horizons in Geometry* [1], de Tom Apostol e Mamikon Mnatsakanian, que traz uma abordagem visual e inovadora, com métodos geométricos que requerem pouco ou nenhuma fórmula, para resolver muitos problemas clássicos do Cálculo. Como tal, grande parte dos resultados e aplicações aqui presentes são uma releitura e um detalhamento daquilo ali apresentado.

Nos próximos parágrafos desta introdução, por exemplo, apresentamos uma tradução livre de parte do prefácio que Tom. M. Apostol escreveu para seu livro com Mamikon Mnatsakanian.

Mamikon concebeu as ideias principais de seu trabalho em 1959, quando estudante de graduação na *Yerevan University* na Armênia. Ainda jovem, apresentou seu método para matemáticos soviéticos, porém estes o desincentivaram dizendo “*Não pode estar certo. Você não pode resolver problemas de Cálculo tão facilmente*”.

Posteriormente, Mamikon obteve o título de Ph.D. em Física e tornou-se professor de astrofísica da *Yerevan University*. Mamikon publicou seu trabalho em 1981, mas não conseguiu com ele grande repercussão, provavelmente, por ter publicado em russo em um jornal armênio de circulação limitada [8].

Em 1990, Mamikon viajou para a Califórnia com o objetivo de estudar terremotos. Quando a União Soviética colapsou, Mamikon ficou extraditado nos Estados Unidos e com o auxílio de alguns matemáticos começou a trabalhar na *UC Davis* e para o Departamento de Educação da Califórnia, onde desenvolveu seu método como uma ferramenta de ensino universal onde alunos podiam realizar experimentos com a ajuda de computadores e diagramas. Ele ensinou seu método em diversas escolas, desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio e demonstrava-o para professores em conferências. Tanto os professores quanto os alunos ficaram entusiasmados, pois este método dinâmico não requer um grande formalismo da Álgebra, Trigonometria ou Cálculo.

Alguns anos mais tarde, em visita à *Caltech*, Mamikon conheceu Tom Apostol<sup>2</sup> e mostrou a ele os potenciais que seu método poderia trazer para o ensino de Matemática, especialmente quando combinado com as ferramentas modernas de visualização que a tecnologia trouxe. Desde então, Mamikon e Apostol publicaram 30 trabalhos em conjunto, a maioria na área da Geometria. Juntos conquistaram três *Lester R. Ford Awards*<sup>3</sup> por cinco trabalhos publicado na *American Mathematical Monthly*, em 2004, 2007 e 2009.

O método de Mamikon requer simples conceitos matemáticos e sempre que possível apela para o toque intuitivo dos alunos para chegar a resultados e conclusões surpreendentes. De maneira geral, Mamikon e Apostol abordam a geometria clássica com uma visão moderna bem como a geometria moderna utilizando-se de um toque clássico. Os resultados discutidos pelos autores são inovadores e, quando não, apresentam abordagens não usuais para obter generalizações inesperadas.

O trabalho destes autores pode trazer para os alunos do ensino básico um primeiro contato com problemas normalmente resolvidos com o uso do Cálculo e de Equações Diferenciais. Com seu teorema, muitos destes problemas podem ser resolvidos apelando para noções da Geometria e um toque de imaginação para abordar as figuras de uma forma dinâmica.

Nossa contribuição pessoal para o problema encontra-se principalmente no maior detalhamento das aplicações e na demonstração apresentada na Seção 4. Nossa demonstração

<sup>2</sup>Tom Apostol é membro da *Caltech* desde 1950. Apostol atua na área de Teoria dos Números e é autor de mais de 100 trabalhos e 61 livros, dentre os quais estão os dois volumes de Cálculo publicados e traduzidos para diversos idiomas há mais de 50 anos.

<sup>3</sup>Prêmio concedido aos melhores artigos publicados no periódico *American Mathematical Monthly*.

difere ligeiramente da demonstração apresentada por Mamikon e Apostol no apêndice de [1], pois naquela o uso de uma mudança de variáveis numa integral torna, a nosso ver, sua apresentação não muito clara para o caso de curvas não planas. Tentamos também adicionar alguns comentários no intuito de tornar os teoremas expostos matematicamente mais precisos que nas referências originais. Por fim, disponibilizamos em [goo.gl/xKkMXj](http://goo.gl/xKkMXj) uma apresentação dinâmica, utilizando o software Geogebra, de alguns dos resultados aqui tratados.

## 2 Formulação do Teorema de Mamikon

Nesta seção trazemos as ideias iniciais do teorema partindo de sua forma mais simples, calcular a área de uma coroa circular, até sua forma completa que pode ser usada para o cálculo da área de algumas superfícies geradas à partir de curvas no espaço.

### 2.1 Evolução do Teorema

O método de Mamikon teve início com um simples problema de geometria, muitas vezes apresentado aos alunos do final do Ensino Fundamental. Determinar a área de uma coroa circular dado uma corda, de comprimento  $a$ , da circunferência maior que seja tangente à circunferência interior.

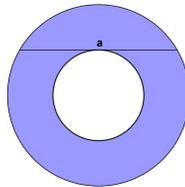


Figura 1. Coroa circular.

Este problema é facilmente resolvido observando que a circunferência menor de raio  $r$  tem área  $\pi r^2$  e a circunferência maior de raio  $R$  tem área  $\pi R^2$ , então a área da coroa circular será dada por  $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$ . Mas os raios e o segmento de comprimento  $a$  formam um triângulo retângulo de catetos  $a/2$  e  $r$  e hipotenusa  $R$ , então pelo Teorema de Pitágoras temos que  $R^2 - r^2 = (a/2)^2$ . Logo, a área procurada será  $\pi a^2/4$ . Ou seja, a resposta depende apenas do comprimento de  $a$  e não dos raios das circunferências.

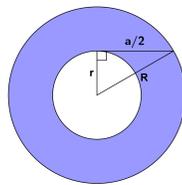


Figura 2. Coroa circular e o triângulo retângulo.

Mamikon notou que se soubéssemos que a resposta dependia apenas de  $a$  poderia haver outra forma de abordar o problema. Como os comprimentos dos raios, mantida a corda de comprimento  $a$ , não influenciam na resposta poderíamos imaginar em diminuir linearmente

o raio das circunferências até que o raio  $r$  da circunferência menor ficasse nulo (e a circunferência menor degenerasse para um ponto apenas). Nesse ponto nossa figura se tornaria apenas um disco de diâmetro  $a$  e, logo, sua área seria  $\pi a^2/4$ . Mamikon perguntou-se ainda se haveria outra forma de mostrar que a resposta dependia apenas de  $a$ . Trouxe, então, uma ideia dinâmica ao problema.

Interpretando a metade da corda como um vetor de comprimento  $L = a/2$  tangente à circunferência interior, observamos que, movendo este vetor sobre a circunferência de modo a manter sua tangência a mesma, ele varre toda a região da coroa circular. Intuitivamente, a área da coroa poderia ser então determinada “somando” o comprimento dos vetores criados durante esse movimento de rotação.

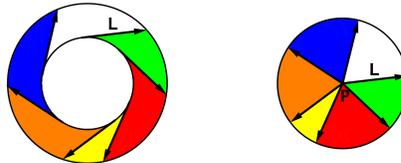


Figura 3. Coroa varrida pelo vetor de comprimento fixo e a região composta pela translação dos vetores .

Observe, porém, que transladando estes vetores paralelamente de modo que a origem destes coincida (esteja sobre um único ponto) criamos um círculo de raio  $L$  (veja Figura(3)). Assim, uma maneira de analisarmos a área, é verificar que a medida que o vetor de comprimento  $L$  se move pela coroa, ele descreve em sua imagem com origem fixa uma rotação ao redor de um ponto  $P$ , desenhando, dessa forma, um círculo de raio  $L$ . Portanto, as duas regiões teriam áreas equivalentes, o que de fato ocorre.

Também foi percebido que esta dinâmica poderia ser aplicada quando trocamos a circunferência interior por uma curva simples, fechada e convexa qualquer, a qual nos referiremos no artigo simplesmente como *forma oval*. Na Figura 4 mostramos a mesma ideia usando duas elipses.

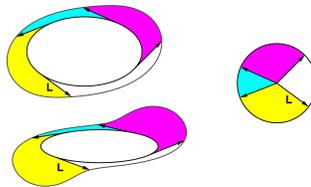


Figura 4. Tangente às elipses varrendo a coroa oval.

Enquanto o segmento tangente de tamanho fixo move-se ao longo das elipses ela descreve uma região que chamaremos de *coroa oval*<sup>4</sup>.

Novamente transladando cada segmento para o vértice comum  $P$  enquanto a tangente desliza pelas elipses, sua imagem gera um círculo de raio  $L$ . Então a área da coroa oval deve ser igual à área do círculo de raio  $L$ .

Veja que neste caso não podemos utilizar o Teorema de Pitágoras e, para determinar a área, provavelmente teríamos que recorrer ao Cálculo, caindo em uma tarefa não muito

<sup>4</sup>No original, *Oval Ring*.

trivial. Inicialmente deveríamos determinar uma equação para a curva interior, em seguida usar sua derivada para descrever a área varrida por um vetor tangente.

Ao longo deste artigo usaremos a expressão “*área da região definida por uma tangente*” para nos referir a áreas, como as coroas ovais acima descritas, delimitadas por uma curva base e pela curva descrita pela extremidade de um vetor que se desloca mantendo sua tangência à tal curva base. A expressão “*feixe de tangentes*” será usada, então, para descrever a região varrida por esses mesmos vetores quando tomados todos com origem num ponto comum. No caso das coroas ovais, o feixe de tangentes seria o círculo de raio  $L$ .

## 2.2 “Demonstração” por polígonos

Ao invés de uma circunferência ou elipse como base da nossa figura, poderíamos considerar um polígono convexo? A resposta é sim. A propósito é muito mais fácil observar a relação entre a área da região definida por uma tangente e do feixe de tangentes quando consideramos polígonos. Abaixo mostramos um triângulo e a região descrita por seus segmentos tangentes.

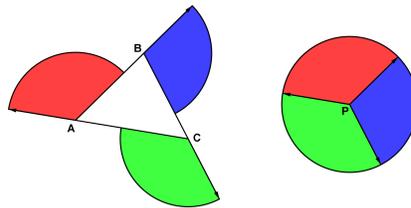


Figura 5. Tangente de comprimento constante movendo-se pelo triângulo.

Como os lados do triângulo são suportados por retas, durante seu deslocamento entre os vértices, a tangente não muda de direção, logo não descreve nenhuma área ao se mover. A área da região definida por uma tangente, nesse caso, surge durante a mudança de direção que ocorre quando a tangente passa por um dos vértices em direção ao lado consecutivo do triângulo, onde irá descrever um setor circular com raio igual ao comprimento do segmento.

Ao percorrer o perímetro do triângulo a tangente irá descrever três setores circulares de mesmo raio e que juntos completarão um círculo de raio igual ao comprimento dessa tangente.

O mesmo vale para um polígono convexo qualquer. Em um polígono com  $n$  lados a tangente irá descrever  $n$  setores circulares. Se lembrarmos que a soma de todos os ângulos externos de um polígono convexo é sempre  $360^\circ$  e observarmos que os setores circulares varridos pela tangente descrevem exatamente esses ângulos, é fácil verificar que o feixe de tangentes, nesse caso, formará também um círculo.

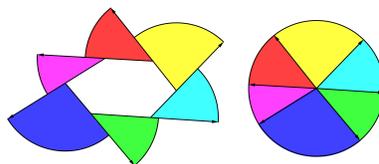


Figura 6. Tangente de comprimento constante movendo-se pelo hexágono.

Assim, a área da região varrida pela tangente ao caminhar pelos lados do polígono será igual à área do círculo cujo raio é o comprimento do segmento tangente.

Considerando agora a área da região definida por uma tangente de uma forma oval qualquer como o limite das áreas descritas por polígonos convexos inscritos cujo número de lados tende ao infinito e cujos comprimentos tendem a zero, concluímos:

**Teorema 1 (Teorema de Mamikon para coroas ovais)** *A área de uma coroa oval obtida por uma tangente de comprimento  $L$  de uma forma oval qualquer é sempre igual a  $\pi L^2$ .*

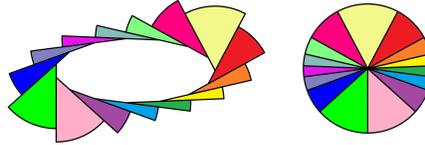


Figura 7. Tangente de comprimento constante movendo-se por um polígono convexo de muitos lados.

### 2.3 Área da região definida por uma tangente de comprimento constante sobre uma curva sem inflexões

Imaginando uma curva plana como o caminho percorrido por um ente móvel, chamamos de *ponto de inflexão* um ponto onde a concavidade da curva se inverte, ou seja, um ponto onde o sentido de rotação descrito pelo ente móvel se inverte.

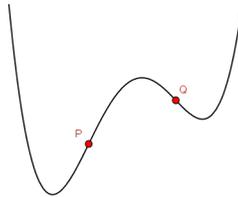


Figura 8. Curva com inflexão nos pontos  $P$  e  $Q$ .

Considere uma curva plana suave sem inflexões<sup>5</sup>, que chamaremos de *curva de tangência*  $\tau$ . A reunião de todos os segmentos tangentes de comprimento constante define uma região que é cercada por  $\tau$  e por uma curva superior  $\sigma$  definida pela outra extremidade dos segmentos. A forma desta região depende da curva  $\tau$  e do comprimento do segmento tangente que vai de  $\tau$  até  $\sigma$ . Nos referiremos a esta região novamente como a *região definida pela tangente*.

<sup>5</sup>Curvas suaves são curvas descritas por uma função  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que têm todas as derivadas  $f'$ ,  $f''$ ,  $f''' \dots$  contínuas.

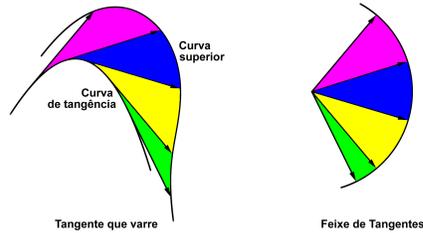


Figura 9. O feixe de tangentes correspondente à região definida pela tangente de comprimento constante é um setor circular.

Quando cada segmento é transladado paralelo de modo que o ponto de tangência de todos seja trazido a um ponto comum teremos a região definida como feixe de tangentes. Notamos que poderíamos ter trazido a outra extremidade de cada segmento a um ponto comum, gerando um feixe de tangentes simétrico ao anterior.

Como cada segmento tem comprimento constante o feixe de tangentes é um setor circular cujo raio é o comprimento do segmento.

Visto que área descrita pela tangente sobre uma curva suave simples sem inflexões pode ser vista como uma parte de uma coroa oval segue imediatamente do Teorema 1 o resultado:

**Teorema 2 (Teorema de Mamikon para tangentes de comprimento constante)** *A área descrita pela tangente sobre uma curva suave simples sem inflexões  $\tau$  é igual à área do setor circular que forma o feixe de tangentes correspondente. Tal setor independe da forma da curva, dependendo apenas da variação angular total descrita pela tangente durante o percurso ao longo da curva. Ou seja, se as tangentes de comprimento  $L$  nos pontos inicial e final descrevem ângulo  $\theta$ , então a área da região definida por uma tangente é  $\frac{\theta L^2}{2}$ .*

Podemos ver esta aplicação no mundo real observando uma bicicleta fazendo uma mudança de trajetória. A roda da frente da bicicleta traça uma curva enquanto a roda traseira traça uma outra.

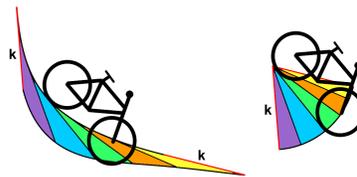


Figura 10. Determinar a área da região entre as marcas das duas rodas da bicicleta.

A área descrita pela tangente, desde que o percurso da roda traseira não cruze com o percurso da roda dianteira, tem área igual a um setor circular dependendo apenas do comprimento da bicicleta e da mudança de ângulo entre a posição inicial e a posição final conforme mostramos acima<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Situações mais gerais da bicicleta podem ser vistas em [1].

## 2.4 Tangente com comprimento variável.

Trazemos agora uma ideia um pouco mais abrangente, onde os segmentos tangentes que partem de  $\tau$  até a curva  $\sigma$  não precisam ter um comprimento constante. Considere a região definida por uma tangente com comprimento variável e o feixe de tangentes correspondente quando trazemos todos os pontos de tangência para o ponto comum  $O$ , como ilustrado na Figura 11.

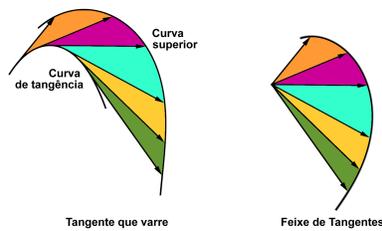


Figura 11. Tangente e feixe de tangentes com comprimento variável.

O Teorema de Mamikon sugere que ambas as figuras têm a mesma área. Essa verificação pode ser feita considerando o Teorema de Mamikon para segmentos tangentes de comprimento constante e ao fazer um recorte contínuo em uma região definida pela tangente de comprimento constante cada segmento cortado ao ser transladado para o feixe de tangentes trará uma perda de área equivalente à primeira figura. Logo, o Teorema pode ser aplicado também a uma tangente de comprimento variável. Ou seja:

**Teorema 3 (Teorema de Mamikon para tangentes de comprimento variável)** *A área descrita pela tangente a uma curva suave simples sem inflexões  $\tau$  é igual à área do feixe de tangentes correspondente, mesmo que o comprimento da tangente varie ao longo do seu percurso em  $\tau$ .*

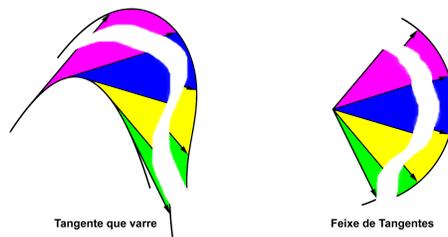


Figura 12. Os cortes retirados têm área equivalente.

## 2.5 Forma Geral do Teorema de Mamikon.

No caso mais geral do Teorema de Mamikon a curva inicial nem mesmo precisa ser plana. Podemos considerar qualquer curva suave no espaço com os segmentos tangentes variando seu tamanho.

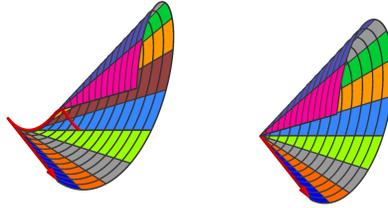


Figura 13. Tangentes e feixe de tangentes de uma curva espacial.

A área da região formada pelas tangentes ao percorrer uma curva espacial suave é igual à área de seu feixe de tangentes, que é descrito sobre uma “superfície cônica”.

A região da tangente está sobre uma superfície desenvolvível<sup>7</sup> que pode ser desenrolada em um plano sem distorção de área. Novamente a forma descrita pela tangente depende apenas da curva inicial e de como os comprimentos e direção dos segmentos tangentes variam pela curva. Aqui, o feixe de tangentes de uma curva no espaço será uma superfície cônica cujo vértice é o ponto comum a que transladamos os segmentos tangentes (uma superfície que também pode ser desenrolada em um plano).

Ressaltamos que as ideias aqui apresentadas foram apresentadas de maneira visual e intuitiva. Uma demonstração formal dos resultados descritos será apresentada no final do artigo.

### 3 Aplicações

Nos anos iniciais dos cursos superiores na área de exatas somos apresentados ao Cálculo Diferencial e suas aplicações para determinar a área sob curvas. Estas ideias requerem uma base não tão modesta quanto aos conhecimentos matemáticos. Porém, com o Teorema de Mamikon, podemos apresentar algumas destas ideias e problemas a alunos do Ensino Médio, bastando que estes tenham conhecimentos básicos de Geometria e alguma noção sobre funções.

Para o uso do Teorema de Mamikon necessitamos de algum conhecimento o sobre retas tangentes e subtangentes. *Subtangente* é a projeção sobre um eixo, e especialmente sobre um eixo de coordenadas, do segmento da tangente compreendido entre o ponto de contato de uma curva e o ponto onde a tangente encontra o eixo considerado<sup>8</sup>.

Nesta seção trazemos a discussão e aplicações do teorema a algumas funções e equações clássicas presentes nos ensinamentos fundamental e médio e em cursos de cálculo diferencial.

#### 3.1 Pitágoras a partir de Mamikon

Assumindo verdadeiro o Teorema de Mamikon, podemos, usando a recíproca da ideia que originou o teorema, encontrar mais uma prova do Teorema de Pitágoras.

Considerando uma coroa circular onde a circunferência interior tem raio  $r$  e a circunferência exterior raio  $R$ , sabemos que sua área será dada pela diferença  $\pi R^2 - \pi r^2$ .

<sup>7</sup>Mais sobre este assunto pode ser visto em [6] e [9].

<sup>8</sup>Apresentamos tais conceitos mais detalhadamente em [9]

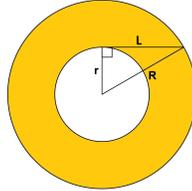


Figura 14. O Teorema de Mamikon implica o Teorema de Pitágoras.

Mas pelo Teorema de Mamikon vimos que sua área também é igual a  $\pi L^2$ , onde  $L$  é um segmento tangente à circunferência interior. Igualando as equações temos:

$$\begin{aligned} \pi R^2 - \pi r^2 &= \pi L^2 \\ R^2 - r^2 &= L^2 \\ r^2 + L^2 &= R^2 \end{aligned}$$

ou seja, o Teorema de Pitágoras.

### 3.2 Área sob o gráfico de funções Exponenciais

As funções exponenciais estão em toda parte nas aplicações da Matemática. Elas ocorrem em problemas relacionados ao crescimento populacional, decaimento radioativo, transmissão do fluxo de calor e outras situações físicas onde a taxa de crescimento/decrescimento de uma quantidade é proporcional à quantidade presente.

A curva exponencial é o gráfico de uma função que apresenta subtangente constante<sup>9</sup>, fato este, que nos ajuda a calcular a área da região sobre o gráfico de uma função da forma  $f(x) = e^{\frac{x}{b}}$  usando o *Teorema da tangente* de Mamikon.

Observando a Figura 15, notamos que ao traçar a reta tangente no ponto  $(x, e^{\frac{x}{b}})$  dividimos a área sob a curva em duas partes. Um triângulo retângulo de área  $T$ , com catetos  $b$  e  $e^{\frac{x}{b}}$ , e a região sombreada à esquerda que vai de  $-\infty$  até  $x - b$  com área  $S$ . Esta região de área  $S$  pode ser, no entanto, descrita ao deslocarmos a tangente no sentido negativo sobre a curva, ou seja, esta é a *região definida pela tangente* da curva.

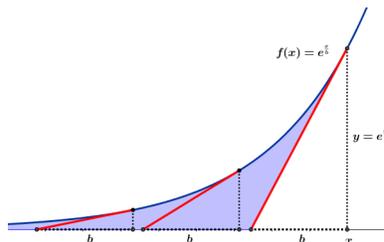


Figura 15. Região sombreada de área  $S$  e o triângulo de área  $T$ .

Deslocando cada segmento tangente para uma origem comum, o ponto  $(x - b, 0)$ , estaremos descrevendo o triângulo de área  $T$ .

<sup>9</sup>Sugerimos ao leitor interessado verificar tal propriedade com o auxílio do livro [7].

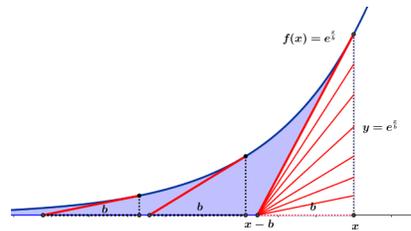


Figura 16. Segmentos tangentes transladados para o ponto  $x - b$ .

Essa equivalência se dá pelo fato das subtangentes serem constantes. Cada triângulo formado pelo segmento tangente tem base  $b$  e altura decrescendo de  $e^{\frac{x}{b}}$  conforme  $x$  vai para  $-\infty$ .

Portanto, ao transladar os segmentos tangentes para  $x - b$  estamos montando o *feixe de tangentes* da área  $S$  e pelo *Teorema de Mamikon* ambos possuem mesma área,  $S = T$ . Temos então, que a área sobre  $f$  de  $-\infty$  à  $x$  será dada por duas vezes a área  $T$ .

$$2T = 2 \frac{be^{\frac{x}{b}}}{2} = be^{\frac{x}{b}} \quad (1)$$

Na linguagem do cálculo, mostramos que:

$$\int_{-\infty}^x e^{\frac{t}{b}} dt = be^{\frac{x}{b}} \quad (2)$$

### 3.3 Área sob uma parábola

Uma outra função muito conhecida pelos alunos é a função quadrática, cuja curva é uma parábola. Esta função é vista desde o 9º ano do Ensino Fundamental II, onde se trabalha com pontos de máximo/mínimo e raízes. Esse estudo estende-se, no Ensino Superior, com o cálculo da área sob a parábola em cursos de cálculo diferencial.

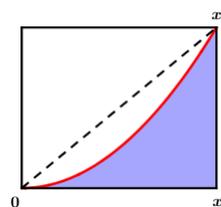


Figura 17. Segmento parabólico: região compreendida entre a curva e o eixo  $x$ .

Para a utilização do Teorema de Mamikon no cálculo da área sob uma curva de equação  $y = x^2$  no intervalo  $[0, x]$  consideramos o retângulo de base  $x$  e altura  $x^2$  no qual o segmento parabólico está inscrito. Precisamos também de uma curva auxiliar  $y = 2x^2$ , a qual chamaremos de parábola bissetora.

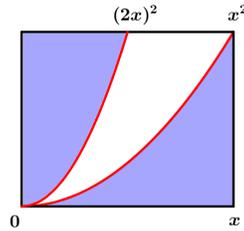


Figura 18. Parábola bissetora  $y = (2x)^2$  e a parábola  $y = x^2$  inscritas no retângulos.

As duas regiões à esquerda delimitadas pela parábola bissetora possuem mesma área. Este fato é melhor entendido tomando os segmentos de comprimento  $x_i$  paralelos ao eixo  $x$  na altura  $x_i^2$ . A parábola  $y = (2x)^2$  divide estes segmentos ao meio e como as áreas podem ser obtidas com a “soma” destes segmentos (Princípio de Cavalieri) ambas serão iguais<sup>10</sup>.

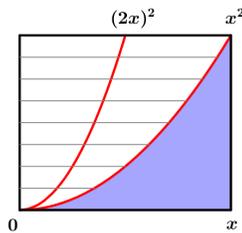


Figura 19. Segmentos de comprimento  $x_i$  divididos ao meio pela parábola bissetora.

Mostraremos agora que a região sob a parábola  $y = x^2$  também é igual as duas outras partes.

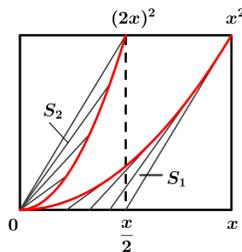


Figura 20. Região definida pela tangente  $S_1$  e seu feixe de tangentes  $S_2$ .

Na Figura 20 o triângulo à esquerda e acima da parábola  $(2x)^2$  e o triângulo abaixo de  $x^2$  tem mesma área. Logo, reduzimos nosso trabalho a mostrar que as regiões sombreadas  $S_1$ , abaixo de  $x^2$ , e  $S_2$ , acima de  $(2x)^2$ , têm mesma área.

$S_1$  é a região definida pela tangente da parábola  $x^2$ . Tomando um segmento tangente à  $x^2$  no ponto  $(t, t^2)$  sua outra extremidade no eixo  $x$  será  $(\frac{t}{2}, 0)$ . Transladando cada um

<sup>10</sup>O mesmo princípio é usado na soma de Riemann e também no Princípio de Cavalieri se aplicado ao plano (<http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=2861>).

destes segmentos em  $\frac{t}{2}$  à esquerda os pontos  $(\frac{t}{2}, 0)$  serão levados à origem e o ponto  $(t, t^2)$  será levado para  $(\frac{t}{2}, t^2)$ , ou seja, sobre a parábola  $(2x)^2$ . Logo, a região  $S_2$  é o *feixe de tangentes* relacionado à região definida pela tangente  $S_1$  e pelo Teorema de Mamikon têm mesma área.

Concluimos então, que cada região apresentada na Figura 18 têm área equivalente a um terço da área do retângulo, mostrando que a área sob a parábola  $y = x^2$  é  $\frac{x^3}{3}$ .

De maneira análoga, utilizando o Teorema de Mamikon, podemos mostrar que a área compreendida entre o eixo x e uma curva  $y = x^r$ , com  $r > 0$  é dada por:<sup>11</sup>.

$$\int_0^x t^r dt = \frac{x^{r+1}}{r+1} \tag{3}$$

### 3.4 Área sob o gráfico de potências com expoente negativo

Podemos também para determinar a área sob o gráfico de  $f(x) = x^{-r}$ , com  $r > 1$  usando o Teorema da Tangente de Mamikon. A área abaixo de  $f$  é composta pelo triângulo de área  $T$  e a *região definida pela tangente* de área  $S$ .

Na Figura 21, o *feixe de tangentes* de  $S$  obtido ao transladar cada segmento tangente para a origem. A curva do *feixe de tangentes* tem sua equação paramétrica em função do vetor tangente à  $f$ , ou seja  $v(t) = (-s(t), -f(t))$ , onde  $s(t) = -\frac{t}{r}$ . Pelo Teorema de Mamikon estas regiões têm mesma área  $S$ . Note que adjacente ao *feixe de tangentes* temos também um triângulo de área  $T$ .

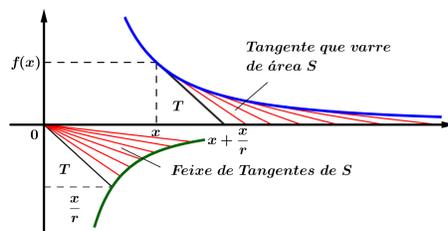


Figura 21. Região definida pela tangente e seu feixe de tangentes.

Refletindo o *feixe de tangentes* e o triângulo pelo eixo  $x$  teremos uma região congruente com área  $S + T$ . Agora, estendendo esta região por um fator  $r$ , isto é, multiplicando cada coordenada  $x$  por um fator  $r$ , teremos uma nova região cuja área será  $r(S + T)$ .

<sup>11</sup>Estes casos podem ser melhor analisados em [9]

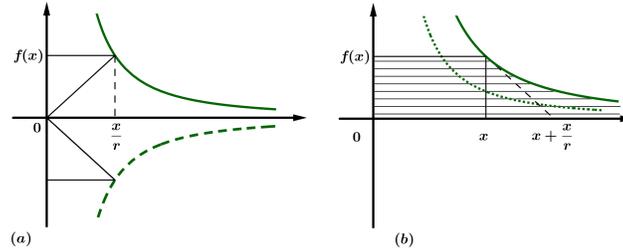


Figura 22. (a) Reflexão da área do *feixe de tangentes* e do triângulo (b) Região de (a) com cada coordenada  $x$  multiplicada por  $r$ .

Note que como a curva do *feixe de tangentes* é dada por  $s(t) = (-s(t), -f(t)) = (\frac{t}{r}, -t^{-r})$ , ao refleti-la pelo eixo  $y$  e multiplicando a primeira coordenada por  $r$ , obtemos a curva original  $(t, t^{-r})$ .

Portanto, esta área redimensionada é composta por um retângulo de área  $R$  e a região original de área  $S + T$  da figura 21. Logo,  $r(S + T) = R + (S + T)$ , e novamente:

$$S + T = \frac{R}{r - 1} = -\frac{x^{-r+1}}{(-r + 1)} \quad (4)$$

### 3.5 Uma aplicação reversa do teorema de Mamikon: área da região delimitada por $f(\theta) = \tan \theta$ .

Em algumas das aplicações apresentadas conseguimos calcular a área da *região definida pela tangente* a partir da área do seu *feixe de tangentes*, que era mais fácil de ser determinado. Em alguns casos, porém, podemos usar o Teorema de Mamikon na direção inversa se a área da *região definida pela tangente* for mais simples de ser calculada do que a área do seu *feixe de tangentes*.

Mostraremos aqui uma prova geométrica para a fórmula:

$$\int_0^x \tan^2 \theta \, d\theta = \tan x - x \quad (5)$$

Na Figura 23 (a) vemos o gráfico polar da equação  $r(\theta) = \tan \theta$  enquanto  $\theta$  varia de 0 à  $x$ . A área sombreada  $A(x)$ , formada por cada segmento com uma das extremidades na origem e a outra na curva  $r$ , é dada por:

$$A(x) = \frac{1}{2} \int_0^x r(\theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^x \tan^2 \theta \, d\theta \quad (6)$$

Considere uma circunferência de raio unitário onde cada segmento tangente é cortado pela reta que passa em seu centro, mostrado na figura (b).

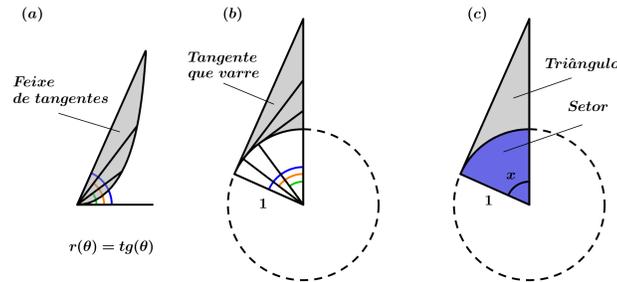


Figura 23. (a) A região à esquerda é o feixe de tangentes da região definida pela tangente em (b), ou seja, têm a mesma área. Em (c), o triângulo é composto pela região definida pela tangente e um setor circular.

Seja  $\theta$  o ângulo formado pelo raio ligado ao ponto tangente e a reta que passa pelo centro, então cada segmento tangente terá comprimento  $\tan \theta$ . Logo, esta região sombreada na figura (b) é a região definida pela tangente correspondente ao feixe de tangentes na figura (a) e pelo Teorema de Mamikon têm mesma área  $A(x)$ .

Mas, área da região definida pela tangente pode ser calculada como a área do triângulo retângulo onde os catetos são o raio da circunferência de comprimento 1 e o segmento tangente de comprimento  $\tan x$  menos a área do setor circular de ângulo  $x$ . Logo:

$$A(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \tan^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2} \tan x - \frac{x}{2} \quad (7)$$

## 4 Teorema de Mamikon: Demonstração Formal

Nesta seção trazemos a demonstração formal do teorema utilizando a Geometria Diferencial. Para mais detalhamento das ferramentas aqui utilizadas sugerimos consultar [6], [10], [11] e [9].

**Teorema 4** A área da região definida pela tangente de uma curva suave, onde o vetor aceleração não se anula, é igual à área do seu feixe de tangentes correspondente.

**Demonstração:** Considere uma curva  $\alpha$  suave no espaço descrita dada por  $X : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , com  $X''(s) \neq 0$  para todo  $s$ , parametrizada pelo comprimento de arco no intervalo  $0 \leq a \leq s \leq b$ . Denotamos por  $T(s)$  o vetor unitário tangente a  $\alpha$ , ou seja,

$$T(s) = \frac{X'(s)}{|X'(s)|} = X'(s) \quad (8)$$

Considere agora a equação paramétrica:

$$Y(s, u) = X(s) + uT(s), \text{ com } 0 \leq u \leq f(s), \text{ onde } f \text{ é uma função qualquer.} \quad (9)$$

Então  $Y$  descreve uma superfície  $S$ .

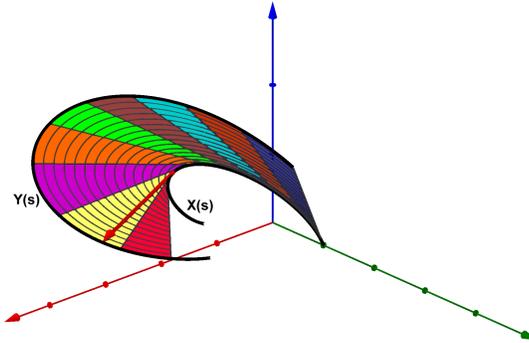


Figura 24. Área gerada sobre a curva  $X$

Note que como  $Y$  varia em função de  $s$  e  $u$  no intervalo  $[0, f(s)]$ ,  $S$  é gerada estendendo-se o vetor tangente  $T$  de  $X$  até a posição do vetor  $Y$  em  $(s, f(s))$ .

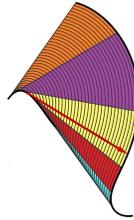


Figura 25. Planificação da superfície parametrizada  $Y$ .

Geometricamente,  $S$  é uma superfície desenvolvível, isto é, ela pode ser desenrolada em um plano sem distorção. Ou seja, a superfície  $S$  é a região definida pela tangente.

A área de  $S$  é dada por:

$$a(S) = \int_a^b \int_0^{f(s)} \left\| \frac{\partial Y}{\partial u} \times \frac{\partial Y}{\partial s} \right\| dud s \quad (10)$$

Para resolver a integral calculamos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = \frac{\partial X}{\partial s} + u \frac{dT}{ds} = T(s) + uT'(s) \quad (11)$$

e

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = T(s) \quad (12)$$

logo,

$$\frac{\partial Y}{\partial u} \times \frac{\partial Y}{\partial s} = (T(s) + uT'(s)) \times T(s) = T(s) \times T(s) + uT'(s) \times T(s) \quad (13)$$

Como  $T(s) \times T(s) = 0$ , temos então que:

$$a(S) = \int_a^b \int_0^{f(s)} \|uT'(s) \times T(s)\| dud s \quad (14)$$

O feixe de tangentes  $S_1$  correspondente à superfície  $S$  é obtido ao transladar paralelamente os vetores tangentes a  $X$  para um ponto  $P$  de origem comum.

Uma parametrização da superfície  $S_1$  é dada por:

$$Y_1(s, u) = P + uT(s), \text{ com } 0 \leq u \leq f(s) \quad (15)$$

A superfície  $S_1$  é um cone generalizado<sup>12</sup> onde sua geratriz é dada pelo vetor  $uT(s)$  e  $P$  o seu vértice.

Sua área também pode ser obtida por:

$$a(S_1) = \int_a^b \int_0^{f(s)} \left\| \frac{\partial Y_1}{\partial u} \times \frac{\partial Y_1}{\partial s} \right\| dud s \quad (16)$$

onde as derivadas parciais são:

$$\frac{\partial Y_1}{\partial s} = u \frac{dT}{ds} = uT'(s) \quad (17)$$

e

$$\frac{\partial Y_1}{\partial u} = T(s), \quad (18)$$

logo,

$$\frac{\partial Y_1}{\partial u} \times \frac{\partial Y_1}{\partial s} = uT'(s) \times T(s) \quad (19)$$

Portanto, a área de  $S_1$  é:

$$a(S_1) = \int_a^b \int_0^{f(s)} \|uT'(s) \times T(s)\| dud s = a(S) \quad (20)$$

■

Concluimos então que a área de  $S$  descrita pela região definida pela tangente é igual a área  $S_1$  do feixe de tangente correspondente à  $S$ .

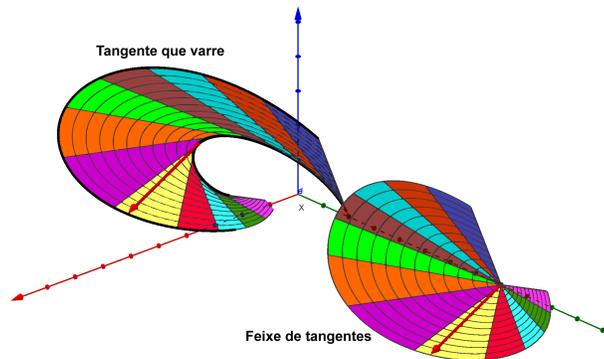


Figura 26. Superfície descrita pela região definida pela tangente e seu feixe de tangentes correspondente.

<sup>12</sup>Um cone generalizado é uma união de retas passando por um ponto  $P$  (chamado de vértice do cone) e pelos pontos de uma dada curva  $\delta$ .

Esta demonstração também cobre as curvas no plano, bastando considerar uma das coordenadas do vetor  $X$  como uma constante. E neste caso o feixe de tangentes será um setor circular generalizado.

O teorema também é válido para as superfícies cujas curvas iniciais podem ser decompostas em uma soma ou diferença de um número finito de curvas que atendam as características descritas na hipótese. Isto deve dar conta das curvas não suaves, como por exemplo as curvas poligonais. E também aquelas que apresentam pontos de inflexão, onde a tangente muda de direção podendo causar sobreposição da região gerada, conforme mostrado abaixo. Nestes casos, podemos dividir a curva em intervalos onde não tenhamos  $X'' = 0$ . Isso cuidaria também de curvas planas com inflexões, sob a ressalva de que áreas “sobrepostas” seriam contadas segundo o número de vezes que foram sobrepostas (ver Figuras 27 e 28).

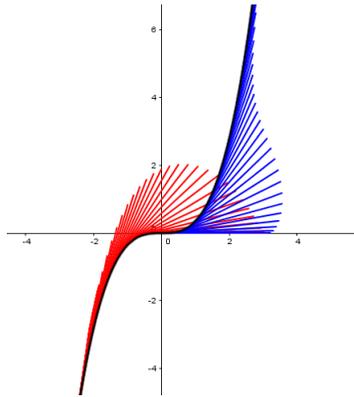


Figura 27.  $f(x) = x^3$  com inflexão em  $x = 0$ .

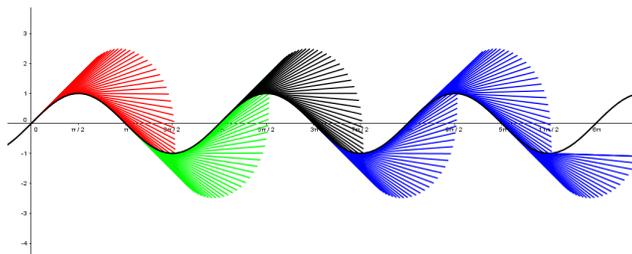


Figura 28.  $f(x) = \text{sen}x$  com inflexão em  $x = k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 5 Conclusões

Esperamos que este artigo possa ajudar professores e alunos a terem uma visão mais ampla e curiosa da Matemática; servir, também, como uma possibilidade de apresentação do Cálculo aos alunos do Ensino Médio e motivá-los para prosseguir seus caminhos na área de exatas; ou ainda, motivar estudos futuros do trabalho de Mamikon e Apostol apresentados no livro *A visual approach to calculus problems* que explora a possibilidade de aplicações para diversos problemas envolvendo as cônicas, cicloides, cálculos de volume entre outros.

## Referências

- [1] APOSTOL, T. M.; MNATSAKANIAN, M. A. *New Horizons in Geometry*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America, ISBN 978-0883853542, 2012.
- [2] APOSTOL, T. M. A visual approach to calculus problems. *Engineering & Science*, Califórnia, n. 3, p.22-31, 2000. Disponível em: <http://calteches.library.caltech.edu/712/2/Calculus.pdf>. Acesso em 06 de jun. 2016.
- [3] APOSTOL, T. M. *Calculus - Volume I*. Rio de Janeiro: Reverté , ISBN 978-8429150155, 2007.
- [4] APOSTOL, T. M.; MNATSAKANIAN, M. A. Tangents and Subtangents Used to Calculate Areas. *The American Mathematical Monthly*, Washington D.C., v. 109, n. 10, p.900-908, 2002. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/3072457>. Acesso em 14 de mar. 2016.
- [5] APOSTOL, T. M.; MNATSAKANIAN, M. A. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Nova Jersey: Dover Publication, ISBN 978-0486806990, 2016.
- [6] DO CARMO, M. P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Courier Dover Publications, ISBN 978-0486806990, 2016.
- [7] LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Sociedade Brasileira de Matemática, ISBN 978-8585818814, 2013.
- [8] MNATSAKANIAN, M. A. On the Area of a Region on a Developable Surface. *Communicated by the Armenian Academy of Sciences*, Armênia, v. 8, n. 2, p.97-102, 1981. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.474.6699>. Acesso em 08 de out. 2016.
- [9] NICOTERA JUNIOR, E. *Cálculo Visual: Uma apresentação do Teorema de Mamikon*. 2017. Dissertação de Mestrado em Matemática - Universidade Federal do ABC. Santo André, SP. 2017. Disponível em: <http://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes/?polo=ufabc&titulo=&aluno=eloy>. Acesso em 07 de nov. 2017.
- [10] STEWART, J. *Single Variable Calculus: Early Transcendentals*. São Paulo: Cengage Learning, ISBN 978-8522114610, 2013.
- [11] STEWART, J. *Single Variable Calculus: Vol. 2*. São Paulo: Cengage Learning, ISBN 978-8522114634, 2013.