Análise da Estrutura a Termo das Taxas de Juros

Analysis of the Term Structure of Interest Rates

Silvia Franciele Padilha Frota[1 2]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Curitiba, PR
silviafrancielefrota@gmail.com

Ronie Peterson Dario
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Curitiba, PR
ronie@utfpr.edu.br

João Luis Gonçalves
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Curitiba, PR
jlgoncalves@utfpr.edu.br

Francisco Itamarati Secolo Ganacim
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Curitiba, PR
ganacim@utfpr.edu.br

Resumo: A Estrutura a Termo das Taxas de Juros (ETTJ) é um elemento essencial para formulação da política monetária. Ela é capaz de indicar as expectativas do mercado financeiro em relação as taxas de juros futuras. Nesse trabalho estudamos a formação da ETTJ com enfoque maior na matemática envolvida, pois na literatura esse assunto em geral é tratado apenas com foco na economia. Demonstramos as relações matemáticas entre as taxas de juros à vista, futuras e instantâneas. Estudamos também o modelo matemático de previsão da curva de juros proposta por Svensson [1]. Esse modelo é de fácil aplicação pois necessita de poucos parâmetros para ajustar a curva de juros. Por esse motivo esse modelo tem sido amplamente usado em Bancos Centrais de diversos países inclusive pelo Banco Central do Brasil. Concluímos com uma aplicação do modelo de Svensson utilizando os preços dos títulos prefixados do Tesouro Direto.

Palavras-chave: estrutura a termo das taxas de juros; curva de juros.

Abstract: The Term Structure of Interest Rates (TSIR) is an essential element for the formulation of monetary policy. It is able to indicate the expectations of the financial market in relation to future interest rates. In this work we study the formation of TSIR with a greater focus on the mathematics involved, since in the literature this subject is generally treated only with a focus on economics. We demonstrate the mathematical relationships between instantaneous, future and instantaneous interest rates. We also study the empirical mathematical model of forecasting the interest curve proposed by Svensson [1]. This model

[1] Mestre pelo PROFMAT-UTFPR

[2] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001, e é baseado na dissertação de mestrado [1].

Recebido em 27/09/2017 - Aceito em 11/02/2019

is easy to apply since it requires few parameters to adjust the interest curve. For this reason, this model has been widely used in Central Banks of several countries, including the Central Bank of Brazil. We conclude with an application of the Svensson model using the prices of fixed-rate Brazil Government bonds.

Key words: term structure of interest rates; interest rates.

1 Introdução

Uma das formas do governo federal brasileiro se financiar é por meio da emissão de títulos públicos de renda fixa. Ao adquirir um título, um investidor se torna credor do governo em troca de uma remuneração.

Há diversas modalidades de títulos públicos. A remuneração pode ser prefixada ou pós-fixada e atrelada a um determinado índice financeiro. A forma do pagamento da remuneração pode ser parcelada ao longo do investimento ou realizada como um único pagamento ao final do contrato.

A formação dos preços dos títulos é diferente para cada modalidade. Por exemplo, o preço de um título prefixado é obtido através do desconto correspondente à taxa de mercado sobre o seu valor de face, que é o montante investido somado à rentabilidade.

De particular interesse são os títulos prefixados sem pagamentos antecipados de juros, conhecidos como títulos zero cupom. É a partir deles que é construída a Estrutura a Termo das Taxas de Juros, ou simplesmente ETTJ. Dá-se esse nome à relação entre o rendimento e a maturidade (prazo de vencimento) de títulos de renda fixa com as mesmas características.Por ser derivada de títulos públicos, esta estrutura é a base para formação de outras taxas de juros do mercado. Geralmente a ETTJ relativa a um determinado dia é representada graficamente por uma curva, por isso também é chamada de curva de juros.

Estudar a dinâmica de formação da curva de juros é extremamente relevante para os formuladores da política monetária de um país e também para os investidores em geral. Os investidores têm interesse especial na alocação de seu capital de forma a obter o melhor rendimento possível ante suas expectativas para a economia e as expectativas do mercado.

A curva de juros é uma aproximação teórica dos dados reais, obtida a partir das taxas e vencimentos negociados diariamente. Contudo, o mercado oferece um número relativamente escasso de ativos, tornando complicado modelar uma curva que projete adequadamente as perspectivas para a economia.

Diversos modelos matemáticos foram desenvolvidos a fim de modelar a curva de juros. Dentre eles, os modelos estatísticos têm se destacado por sua eficiência na aproximação da curva com os dados reais. Nesse trabalho vamos analisar o modelo paramétrico ou estatístico proposto por Nelson e Siegel [3] em 1987 e estendido por Svensson [2] em 1994.

Esse modelo tem sido amplamente utilizado por diversos bancos centrais como por exemplo, os de Brasil, Itália, Espanha, Bélgica, França e Alemanha, [4]. Isso se deve a sua eficiência nos ajustes da curva, tais como nível, inclinação e curvatura, e também pela sua fácil aplicação [5].

Vamos demonstrar as relações entre as taxas à vista e a taxa futura. Esta é uma contribuição original deste trabalho, uma vez que no caso de capitalização contínua estes cálculos não estão disponíveis na literatura.

Nas Seções 3 e 4 estudaremos os modelos citados e para o modelo de Svensson determinaremos os parâmetros usando o método de mínimos quadrados. Além disso, exemplificaremos em uma aplicação para títulos pré-fixados do Tesouro Direto.

Utilizaremos durante todo o trabalho o regime de **capitalização contínua**.

Desta forma, o período de tempo compreendido entre um tempo inicial t, estritamente menor que um tempo final T, é o intervalo real da forma $[t, T]$.

Aplicado um capital inicial $C_0(t, T)$ a uma taxa de juros $i = i(t, T)$, o capital produzido neste intervalo de tempo é dado por

$$C(t, T) = C_0(t, T)e^{i(T-t)}. \tag{1}$$

A operação inversa da capitalização é o desconto.

O valor no tempo t de uma unidade monetária no tempo T é definido como a **função desconto** $d(t, T)$ neste intervalo de tempo. Assim, de (1), temos

$$d(t, T) = e^{-i(T-t)}. \tag{2}$$

2 A Estrutura a Termo das Taxas de Juros (ETTJ)

Uma das principais modalidades de títulos públicos no Brasil é o **Tesouro Prefixado** (antiga LTN - Letras do Tesouro Nacional). O fluxo de pagamento é bastante simples.Contrata-se uma determinada rentabilidade anual

xada no momento do investimento (taxa à vista) e os rendimentos são pagos juntamente com o montante investido, de uma só vez, na data de vencimento do título. É um caso particular de um título zero cupom, isto é, sem pagamento antecipado de juros.

Considere um título zero cupom com valor de face F e com vencimento (maturidade) no tempo T. O preço deste título no instante t, $t < T$, é denotado por $P_F(t, T)$ e pode ser calculado aplicando ao seu valor de face o desconto correspondente à taxa $i(t, T)$. Portanto,por (2),

$$P_F(t, T) = Fe^{-i(t,T)(T-t)}. \tag{3}$$

Em particular, denotaremos por

$$P(t, T) = e^{-i(t,T)(T-t)}, \tag{4}$$

o preço de uma unidade monetária do título, isto é, valor de face igual a 1. Isto nos será útil no restante do trabalho. Como a taxa de juros $i(t, T)$ é maior que zero, para todo $t < T$, temos $P(t, T) < 1$, para todo $t < T$.

Podemos considerar como o valor presente (ou preço atual) de uma unidade monetária do título, o preço em $t = 0$, isto é,

$$P(0, T) = e^{-Ti(0,T)}. \tag{5}$$

As taxas $i(0, T)$ determinadas pelo preço atual dos títulos são chamadas de **taxas à vista** (ou spot rates). A família destas taxas define uma função na variável T. O mesmo pode ser feito para cada tempo t, normalmente um determinado dia do ano. Para t fixado, a representação gráfica de $i(t, T)$ é denominada de **curva de juros** da data t.

Definição 1 *A função de duas variáveis $i(t, T), t < T$, é denominada **estrutura a termo das taxas de juros (ETTJ)**.*

Assim, há uma curva de juros para cada dia de negociação (t) de títulos no mercado.Sendo esta curva observada dia após dia, sua dinâmica reflete a expectativa do mercado para a economia como um todo.

Conforme [6], a ETTJ não é determinada pela estrutura inicial ($t = 0$) pois em geral não vale que $P(0,T) = P(0,t)P(t,T)$. Desta forma, para a construção da ETTJ, há a necessidade de se considerar taxas futuras (ou *forward rates*), conforme a definição abaixo.
Definição 2 *A **taxa futura** (ou taxa a termo) no intervalo $[s,T]$ e determinada no tempo t, com $t < s < T$, é definida como a taxa de juros $f(t,s,T)$ tal que*

$$P(t,T) = P(t,s)e^{-(T-s)f(t,s,T)}.$$

A partir desta definição, a taxa futura pode ser diretamente determinada em função das taxas à vista, conforme o seguinte resultado.
Proposição 1 *A taxa futura no intervalo $[s,T]$ e determinada no tempo t, com $t < s < T$, é dada por*

$$f(t,s,T) = \frac{i(t,T)(T-t) - i(t,s)(s-t)}{T-s}. \tag{6}$$

Demonstração De (4) temos $P(t,T) = e^{-i(t,T)(T-t)}$ e $P(t,s) = e^{-i(t,s)(s-t)}$. Da Definição 2 temos $e^{-i(t,T)(T-t)} = e^{-i(t,s)(s-t)}e^{-f(t,s,T)(T-s)}$. Aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade, obtemos o resultado desejado.

Note que a taxa futura $f(t,s,T)$ quando aplicada a um título comprado em t e liquidado em s com preço $P(t,s)$, deve produzir o mesmo retorno de um título com preço P(t, T) comprado no tempo t com maturidade T. Mais especificamente, as taxas à vista $i(t,T)$ e $i(t,s)$ implícitas em $P(t,T)$ e $P(t,s)$ respectivamente, determinam a taxa futura $f(t,s,T)$ de modo que, ao investir em um título com tempo de maturidade $s-t$ e ao final de sua maturidade no tempo s reinvesti-lo no título de maturidade $T-s$,tenha-se o mesmo retorno do título de maturidade $T-t$, conforme ilustra a Figura 1.

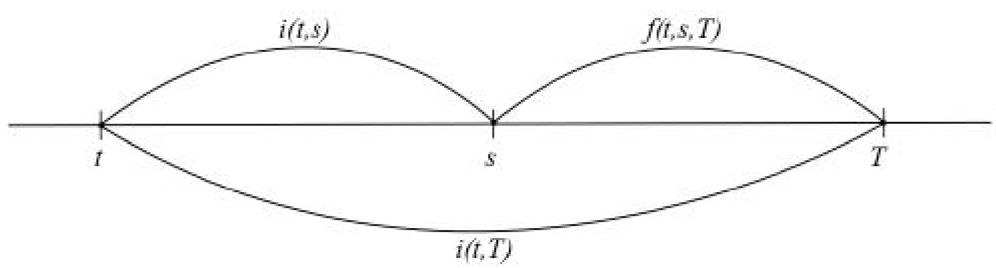

Figura 1. Ilustração da relação entre as taxas $i(t,s)$, $i(t,T)$ e $f(t,s,T)$.

Exemplo 1 Considere dois títulos zero cupom, ambos com o mesmo valor de face. O título A tem maturidade de um ano e o título B tem maturidade de dois anos. Seja $i_A(0,1) = 9\%$ ao ano a taxa de juros do título A, e $i_B(0,2) = 12\%$ ao ano a taxa de juros do título B. Suponha que um investidor queira aplicar seu dinheiro por dois anos. Ele precisa então analisar qual é a melhor estratégia, comprar o título A com vencimento de um ano e reinvestir por mais um ano em um título de mesma maturidade ou comprar o título B de maturidade de 2 anos e mantê-lo até o final. Supondo a escolha pelo título A com maturidade de 1 ano, a taxa futura $f(0,1,2)$ para o contrato de um título no ano posterior que resulte no mesmo rendimento do título B de maturidade de 2 anos tem que ser

$$f(0,1,2) = \frac{2(0.12) - 1(0.09)}{2-1} = 0.1508(15,08\%).$$

Para que a estratégia de investir no título A por um ano e reinvestir por mais um ano seja vantajosa, em comparação com o investimento no título B por dois anos, é preciso que a taxa no reinvestimento seja maior que $15,08\%$. Portanto, se o reinvestimento da primeira estratégia for a uma taxa menor do que $15,08\%$, a segunda estratégia é mais vantajosa.

Se o intervalo de tempo entre o tempo s e o tempo T tende a zero, então é conveniente usar T como o instante s mais um acréscimo de tempo infinitesimal h, ou seja $T = s + h$. Faz sentido então considerar a definição a seguir.

Definição 3 *A taxa futura instantânea em s determinada no tempo t é dada por*

$$f(t,s) = \lim_{h\to 0} f(t,s,s+h).$$

Para finalmente termos todos os elementos necessários para determinar a ETTJ precisamos da relação da taxa futura instantânea com a taxa à vista. Isto é feito no seguinte teorema. Dele decorre que se temos o preço de um título zero cupom, podemos conhecer todas as taxas futuras instantâneas para todos os pontos no intervalo $[t,T]$. De igual modo, se temos as taxas futuras instantâneas do intervalo de tempo $[t,T]$, podemos obter as taxas à vista ao integrarmos a função das taxas futuras, isto é, podemos interpretar a taxa à vista como uma média das taxas futuras instantâneas.

Teorema 1 *Mantidas as notações anteriores e assumindo $i(t,T)$ diferenciável, temos*

(i) $f(t,s) = i(t,s) + (s-t)\dfrac{\partial i(t,s)}{\partial s}$,

(ii) $i(t,T) = \dfrac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds.$

Demonstração

(i) Substituindo T por $s+h$ em (6) temos

$$f(t,s,T) = \frac{i(t,T)(T-t) - i(t,s)(s-t)}{T-s} = \frac{i(t,s+h)(s+h-t) - i(t,s)(s-t)}{h}$$

Aplicando ao limite quando h tende a zero, temos

$$\begin{aligned} f(t,s,T) = \lim_{h\to 0} f(t,s,s+h) &= \lim_{h\to 0}\frac{hi(t,s+h) + i(t,s+h)(s-t) - i(t,s)(s-t)}{h} \\ &= i(t,s) + (s-t)\lim_{h\to 0}\frac{i(t,s+h) - i(t,s)}{h} \\ &= i(t,s) + (s-t)\frac{\partial i(t,s)}{\partial s} \end{aligned}$$

Note que na penúltima igualdade utilizamos a continuidade da função $i(t,s)$.

(ii) De (i), temos que

$$\int_t^T f(t,s)ds = (s-t)i(t,s)|_t^T = (T-t)i(t,T).$$

Também podemos calcular o preço $P(t,T)$ em função do acúmulo das taxas futuras instantâneas $f(t,T)$ no intervalo de tempo entre t e T. De fato, de (4), temos

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}.$$

3 Modelos de Nelson-Siegel e de Svensson para a ETTJ

A estrutura a termo pode ser construída a partir das taxas à vista, taxas futuras ou pela função desconto, porém todas estão relacionadas entre si, conforme demonstramos na seção anterior, de modo que através de uma podemos encontrar ou estimar as outras [2].A inclinação, a forma e o nível das curvas de juros podem variar ao longo do tempo, de acordo com as mudanças nas taxas de juros. O formato da curva dá uma ideia de como serão as alterações futuras nas atividades financeiras. Existem quatro formas principais de curvas:

- **normal** ou **ascendente**, Figura 2, indica que os rendimentos dos títulos de prazos mais longos tendem a continuar aumentando.
- **corcunda**, Figura 3, indica transição na economia, visto que as taxas para prazos mais longos diminuem.
- **invertida** ou **inclinada para baixo**, Figura 4 sugere que os rendimentos das obrigações de mais longo prazo podem continuar a cair, correspondendo a períodos de recessão econômica.
- **horizontal**, Figura 5, quando as taxas de curto e longo prazo são parecidas.

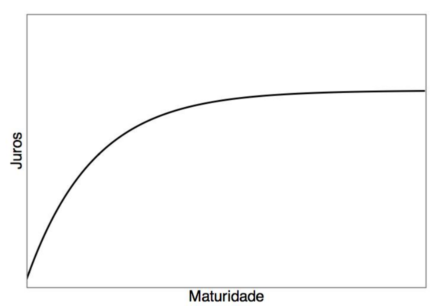

Figura 2. Curva de juros normal

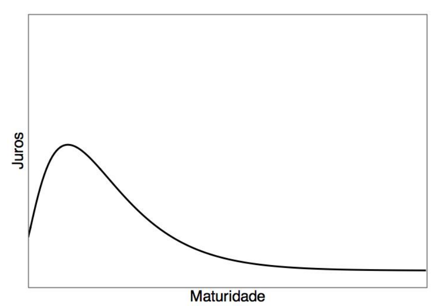

Figura 3. Curva de juros corcunda

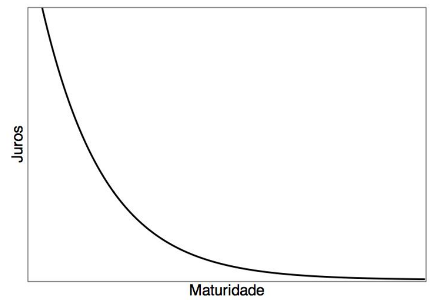

Figura 4. Curva de juros invertida

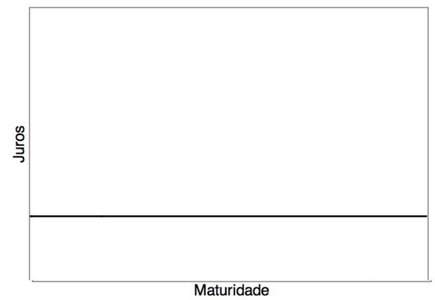

Figura 5. Curva de juros horizontal

Nas últimas décadas diversos modelos de construção da curva de juros foram desenvolvidos. Podemos citar como exemplo, McCulloch [7], Vasicek[8], Dobbie-Wilkie[9] e Nelson e Siegel[3] e sua versão estendida por Svensson[2].

Esses modelos são baseados em fórmulas paramétricas que se ajustam às curvas de juros com um número pequeno de parâmetros.

Nesse trabalho vamos estudar o modelo desenvolvido por Charle R. Nelson e Andrew F. Sielgel[2] e estendido por Lars E. O. Svensson[2]. Atualmente esse modelo é bastante usado por diversos bancos centrais, incluindo o Banco Central do Brasil [4].

A grande utilização desse modelo também por mercados financeiros em muitos países se dá justamente pela eficiência do ajuste aos diversos formatos que as curvas de juros podem assumir. O modelo é muitas vezes chamado de parcimonioso, pois a função exponencial utilizada com de poucos parâmetros se ajusta as diversas formas que as curvas de juros podem assumir.

Nelson e Siegel[3] iniciaram sua pesquisa procurando um modelo mais simples e flexível para a previsão das curvas de juros através de dados do passado. Perceberam de forma empírica que as soluções das equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem, com raízes reais e distintas para a equação característica, tinham formatos de curvas semelhantes aos formatos observados pela curva de juros. Desta forma, propuseram inicialmente que a função fosse composta pelos termos presentes nas soluções destas equações diferenciais, conforme segue.

Para simplificar as notações, denotaremos a partir de agora

$$f(m) = f(t,T) \text{ e } i(m) = i(t,T) \text{ com } m = T - t,$$

o período de tempo entre t e T. Assim,

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda m} + \beta_2 \lambda m e^{-\lambda m}.$$

onde λ_1 e λ_2 são constantes de tempo associados à equação e β_0,β_1 e β_2 são determinados pelas condições iniciais.

Posteriormente notaram que a curva se ajustava melhor se forem considerados os termos das soluções das equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem com raízes da equação característica reais e iguais. Desse modo, a função do modelo passou a ser

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda m} + \beta_2 \lambda m e^{-\lambda m}.$$

O modelo possui três termos que podem ser interpretados como de curto, médio e longo prazos. Os parâmetros β_0,β_1 e β_2 podem ser classificados como parâmetros de regressão e λ como parâmetro do tempo.

Analisando cada um dos parâmetros, podemos observar que:

- β_0 é uma constante que representa o nível de juros de longo prazo, pois quando o tempo de maturidade tende ao infinito as taxas futuras convergem para β_0, isto é

$$\lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{m\to\infty}[\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda m} + \beta_2 \lambda m e^{-\lambda m}] = \beta_0.$$

- β_1 determina o declive da curva decrescendo exponencialmente para zero com o decorrer da maturidade. Geralmente é associado às taxas de juros de curto prazo. O sinal desse coeficiente determina se a curva está aumentando ou diminuindo. Em geral, se β_1 é negativo a função cresce e se o sinal de β_1 for positivo a curva decresce. Se a maturidade do título tender a zero, teremos que

$$\lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{m\to\infty}[\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda m} + \beta_2 \lambda m e^{-\lambda m}] = \beta_0 + \beta_1.$$

- β_2 inicia com valor zero, cresce para a maturidade de médio prazo e decresce para zero novamente no longo prazo, e então gera a curva.

- λ determina a velocidade que a curva da taxa de juros decai, ou seja, quando λ assume valores pequenos a curva cai de forma mais rápida e se ajusta melhor a títulos de curto prazo e de forma contrária, se λ assume valores maiores a curva decai de forma mais lenta e se ajusta a títulos com maturidades maiores.

Na intenção de melhorar a flexibilidade e o ajuste deste modelo de três parâmetros, Lars Svensson [2] adicionou um quarto termo, sendo ele o segundo termo relacionado às taxas de juros de médio prazo com decaimento próprio que se ajusta com mais facilidade ao formato das estruturas a termo com mais de um ponto de máximo e mínimo local.

Dessa forma esse modelo agora incorpora mais dois parâmetros, um parâmetro de regressão β_3 e um parâmetro de tempo λ_2. Assim, a função estendida passa a ter seis parâmetros e é dada por

$$f(m) = \beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda_1 m} + \beta_2 \lambda_1 m e^{-\lambda_1 m} + \beta_3 \lambda_2 m e^{-\lambda_2 m}. \tag{7}$$

Os parâmetros β_0,β_1 e β_2 tem as mesmas características do modelo anterior, isto é, β_0 determina o nível da curva e está relacionado ao longo prazo, β_1 determina a inclinação da curva e reflete as taxas de curto prazo, e β_2 juntamente com β_3 determinam o movimento da curva e estão relacionados ao médio prazo. Os parâmetros de decaimento λ_1 e λ_2 por serem diferentes, fazem com que os termos associados aos parâmetros β_2 e β_3 assumam máximos e/ou mínimos diferentes, como podemos ver na Figura 6, possibilitando novos formatos de curvas.

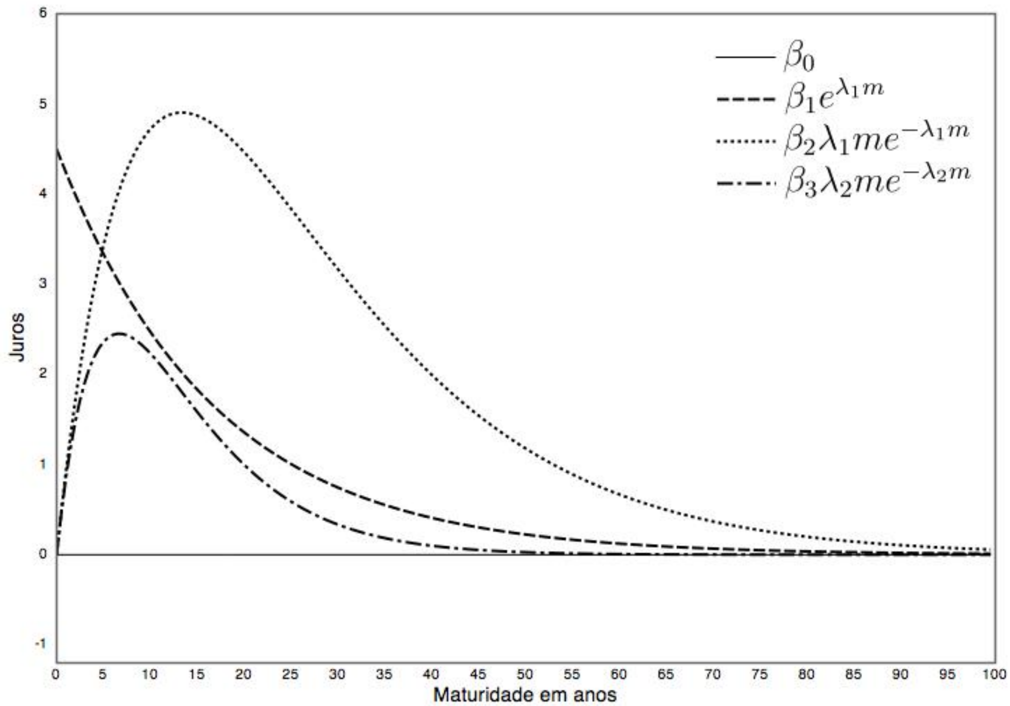

Figura 6. Comportamento dos termos do modelo de Svensson[2].

Já vimos no Teorema 1 que a taxa à vista pode ser obtida ao integrarmos as taxas futuras. Na nova notação com a variável m, sendo $i(m)$ a taxa à vista que expressa $i(t, t+m)$ com maturidade m e negociada no tempo t, temos

$$i(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f(x)dx. \tag{8}$$

Combinando as equações (7) e (8) temos que

$$i(m) = \frac{1}{m} \int_0^m (\beta_0 + \beta_1 e^{-\lambda_1 x} + \beta_2 \lambda_1 x e^{-\lambda_1 x} \beta_3 \lambda_2 x e^{-\lambda_2 x})dx.$$

Utilizando a regra da integração por partes obtemos a equação que expressa a taxa à vista segundo o modelo de Svensson. Assim

$$i(m) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\lambda_1 m}}{\lambda_1 m} + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 m}}{\lambda_1 m} - e^{-\lambda_1 m} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_2 m}}{\lambda_2 m} - e^{-\lambda_2 m} \right). \tag{9}$$

4 Determinação dos parâmetros do modelo de Svensson

Estimar os parâmetros do modelo de Svensson é uma tarefa difícil devido a natureza não-linear da curva de juros. De fato, podem existir múltiplos mínimos (ou máximos) locais, além de um mínimo global (ou máximo global).

A estimativa dos parâmetros β_0, β_1, β_2, β_3, λ_1 e λ_2 pode ser feita através do método de mínimos quadrados, podendo ser o objeto de estimação o preço do título, a taxa à vista ou a taxa futura.

O método de mínimos quadrados (MMQ) é uma importante ferramenta que permite encontrar uma função $f(x)$ que melhor se ajusta a um conjunto de N pontos (x_i, y_i) predefinidos.

O método consiste em minimizar a soma dos quadrados das distâncias entre as coordenadas y_i e a função desejada em $f(x_i)$.

Suponha que temos um palpite inicial para valores de β_0, β_1, β_2, β_3, λ_1 e λ_2. Então temos que o erro em m_0 é dado por $|d(m_0) - d(m_0)|$, onde $d(m_0)$ é o valor da função aproximada $d(x)$ em $x = m_0$ e $d(m_0)$ é o valor real conhecido. Assim, definimos um critério de otimalidade por

$$E(\beta_0,\, \beta_1,\, \beta_2,\, \beta_3,\, \lambda_1 \text{ e } \lambda_2) = \sum_{i=1}^{N} |d(m_i) - d(m_i)|^2,$$

ou seja, a soma dos erros quadráticos dos pontos conhecidos.

Para estimarmos os parâmetros do modelo de Svensson devemos primeiro definir se o item de estimação é o preço do título, a taxa de juros à vista ou a taxa de juros futura. Os preços dos títulos de curta maturidade são menos suscetíveis a variações nas taxas de juros do que os títulos de maturidades mais longas. Uma pequena alteração nos preços dos títulos de curto prazo resultam em grandes variações nas taxas de juros. Em nosso exemplo usaremos a taxa à vista.

Na Tabela 1 temos os títulos pré-fixados que estavam disponíveis para venda no site do Tesouro Direto no dia 25 de outubro de 2016.

Maturidade em dias	Maturidade em anos	Taxa à vista anual
21	0.0833333	13.8078
42	0.166667	13.7671
63	0.25	13.6802
126	0.5	13.2859
252	1	12.4723
504	2	11.5837
756	3	11.2658
1008	4	11.1451
1260	5	11.0947
2520	10	11.0436

Tabela 1. Maturidade *versus* taxa à vista de títulos pré-fixados em 25/10/2016.

A partir desses dados coletados, vamos estimar os valores de β_0, β_1, β_2, β_3, λ_1 e λ_2 atráves da função desconto,

$$d(m) = e^{-i(0,m)m} = e^{-\int_0^m f(w)dw},$$

de forma que o resultado seja o mais preciso possível, ou seja, queremos encontrar $d(m)$ de maneira que o erro dos dez valores conhecidos de m, Tabela 1, seja mínimo. Assim desejamos minimizar a seguinte função de erro

$$
\begin{aligned}
E &= E(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda_1 e \lambda_2)\\
&= \sum_{n=1}^{10} \left(e^{-im_n} - \bar{d}(m_n)\right)^2\\
&= \sum_{n=1}^{10} \left(e^{-im_n} - e^{\left[-\beta_0 - \beta_1 \frac{1-e^{\lambda_1 m_n}}{\lambda_1 m_n} - \beta_2 \left(\frac{1-e^{-\lambda_1 m_n}}{\lambda_1 m_n} - e^{-\lambda_1 m_n}\right) - \beta_3 \left(\frac{1-e^{-\lambda_2 m_n}}{\lambda_2 m_n} - e^{-\lambda_2 m_n}\right)\right] m_n} \right)^2.
\end{aligned}
$$

Para calcular os valores de β_0, β_1, β_2, β_3, λ_1 e λ_2 minimizamos a função de erro utilizando o comando NMinimize do *software* $MATHEMATICA^{®}$. O comando NMinimize encontra mínimos globais de funções usando rotinas numéricas e por padrão usa o método de Brent. Desse modo, os valores encontrados foram $\beta_0 = 0.1072$, $\beta_1 = 0.0368128$, $\beta_2 = 0.253873$, $\beta_3 = 0.295918$, $\lambda_1 = 0.536189$ e $\lambda_2 = 0.585685$.

Substituindo os parâmetros encontrados na Equação (9), obtemos

$$
i(m) = 0.1072 + 0.0368128 \frac{1-e^{-0.536189m}}{0.536189m} + 0.253873 \left(\frac{1-e^{-0.536189m}}{0.536189m} - e^{-0.536189m}\right) + \\
0.295918 \left(\frac{1-e^{-0.585685m}}{0.585685m} - e^{-0.585685m}\right).
$$

Coletamos a curva divulgada no dia 25 de outubro de 2016 para compararmos com a curva que geramos com nossa estimação.

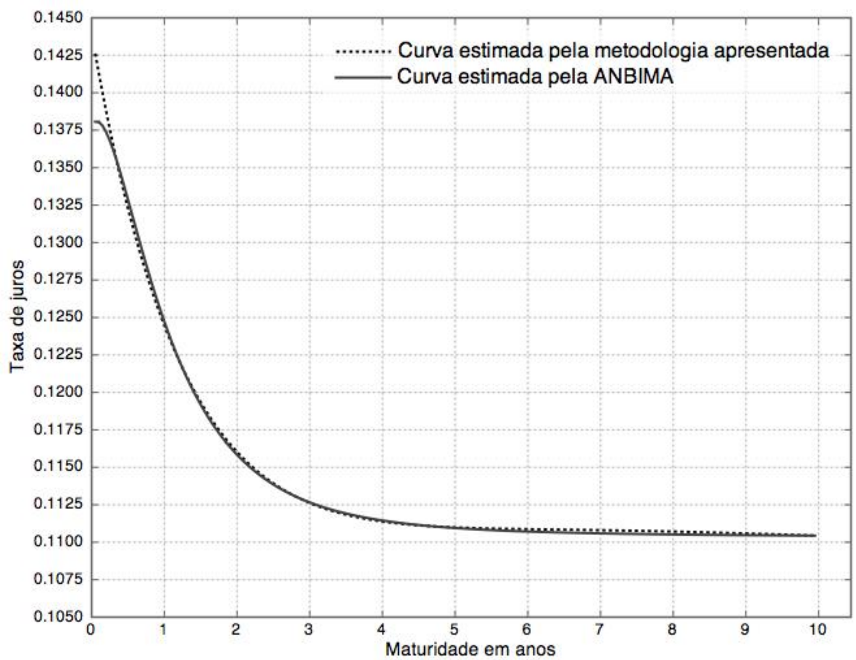

Figura 7. Comparação da ETTJ disponível no site da ANBIMA no dia 25 de outubro de 2016 com a ETTJ estimada a partir dos preços dos títulos zero cupom na mesma data. No eixo horizontal temos a maturidade em anos e no eixo vertical o índice da taxa de juros anual.

A curva que encontramos é uma boa aproximação para a curva que foi estimada pela ANBIMA, como podemos verificar na Figura 7. A diferença entre as curvas se deve ao método de otimização usado. A ANBIMA, segundo a metodologia própria disponível em [10], utiliza um algoritmo genético criado por Holland [11].

5 Conclusões

Neste trabalho estudamos as diferentes taxas de juros (à vista, futura e instantânea) e as relações matemáticas entre elas. Demonstramos no Teorema 1 um resultado que estabelece estas relações, pois tais demonstrações não foram encontradas na literatura no caso de capitalização contínua. Estudamos o modelo proposto Nelson e Siegel [3] e estendido por Svensson [2] para a previsão da curva de juros. Coletamos os preços dos títulos prefixados oferecidos pelo Tesouro Direto em um determinado dia e aplicamos o modelo de Svensson para a construção da curva de juros, utilizando o método de mínimos quadrados para o cálculo dos parâmetros. Comparamos com a curva gerada pela ANBIMA e verificamos que houve uma boa aproximação.

Referências

[1] FROTA, S.F. Um estudo da estrutura a termo de taxas de juros de títulos públicos prefixados e o modelo de Svensson. Dissertação de Mestrado - PROFMAT, 2017, Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível nos endereços eletrônicos

http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/2576

https://sca.profmat-sbm.org.br/sca$_v$2/$get_t cc3.php?id = 95366$

[2] SVENSSON, L. E. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994. 1994.

[3] NELSON, C. R.; SIEGEL, A. F. Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of business*, pages 473-489, 1987.

[4] BIS, Monetary and Economic department: Zero-coupon yield curves: technical documentation. *BIS papers*, (25), 2005. Disponível em https://www.bis.org/publ/bppdf/bispap25.pdf

[5] VARGA, G. Teste de modelos estatísticos para a estrutura a termo no brasil. *Revista Brasileira de Economia*, 63(4):361-394, 2009.

[6] CAPINSKI, M.; ZASTAWNIAK, T. *Mathematics for finance: an introduction to financial engineering*. Springer, 2006.

[7] MCCULLOCH, J. H. Measuring the term structure of interest rates. *The Journal of Business*, 44(1):19-31, 1971.

[8] VASICEK, O. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, 5(2):177-188, 1977.

[9] DOBBIE, G.M.; WILKIE, A.D. The financial times-actuaries fixed interest indices. *Transactions of the Faculty of Actuaries*, 36:203-213, 1977.

[10] ANBIMA. www.anbima.com.br/est_termo/arqs/est-termo_metodologia.docx. Metodologia, 2016.

[11] HOLLAND, J. H. Adaptation in natural and artificial systems. an introductory analysis with application to biology, control, and artificial intelligence. *Ann Arbor, MI: University of Michigan Press*, 1975.