Relações entre progressões aritméticas de primeira ordem e sequências de ordem superior

Relations between first-order arithmetic progressions and higher-order sequences

Marcelo Wachter Maroski
Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - UNIJUÍ, Ijuí, RS
marcelomaroski@gmail.com

Resumo: O presente trabalho dá continuidade a uma pesquisa sobre progressões aritméticas que já teve alguns de seus resultados publicados em outras oportunidades. Neste artigo são apresentadas as definições de progressão aritmética geradora e associada, enfatizando a relação existente entre as suas razões e como o triângulo de Pascal pode ser aplicado nessa situação. Adicionalmente, propõe-se uma expressão algébrica para calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão de segunda ordem, cujo desenvolvimento permite discutir um procedimento para obter progressões de ordem k a partir da soma dos termos de uma sequência de ordem k–1. Assim, através dos tópicos contemplados neste artigo, pretende-se demonstrar as relações existentes entre progressões aritméticas de primeira ordem e sequências de ordem superior considerando a razão e a soma dos termos.

Palavras-chave: progressão aritmética; triângulo de Pascal; sequências numéricas; soma de termos.

Abstract: This work continues a research on arithmetic progressions that had some of its results published in other opportunities. In this article are presented the definitions of generator and associated arithmetic progression, emphasizing the connection between his common differences and as Pascal's triangle can be applied in this situation. Additionally, an algebraic expression is proposed to calculate the sum of the first n terms of a second-order progression, which development allows to discuss a procedure to obtain progressions of k order from the sum of terms of a sequence of k − 1 order. Thus, through the topics considered in this article, it is intend to demonstrate the connections between first-order arithmetic progressions and higher-order sequences considering the common difference and the sum of terms.

Key words: arithmetic progression; Pascal's triangle; numerical sequences; sum of terms.

1 Introdução

Em se tratando do estudo de progressões aritméticas, uma das ideias fundamentais é a de números em sequência, afinal, é exatamente esse o conceito de progressão aritmética, ou, simplesmente, P.A.: "[...] uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada."[1]

Recebido em 01/02/2018 - Aceito em 21/02/2019

No Ensino Médio, estudam-se algumas propriedades elementares das progressões aritméticas, como o termo geral, a soma dos n primeiros termos e a interpolação aritmética. Em um nível mais avançado, surgem aplicações de progressões aritméticas em outros campos da Matemática, como, por exemplo, o teorema de Dirichlet sobre números primos.

Através de uma extensão ao conceito de P.A., pode-se dizer que tais sequências são progressões aritméticas de primeira ordem, uma vez que admite-se a existência de sequências de ordem superior, comumente chamadas de progressões aritméticas de k-ésima ordem e definidas como sequências de números tais que, após uma operação de diferença entre os seus termos consecutivos, obtém-se uma P.A. de ordem k–1. [2]

Por exemplo, a sequência $(12, 60, 140, 252)$ é uma P.A. de segunda ordem, pois, calculando-se as diferenças consecutivas entre os seus termos, ou seja, aquelas que são do tipo $a_n - a_{n-1}$, obtém-se a sequência $(48, 80, 112)$, que é uma P.A de primeira ordem, cuja razão é 32.

O termo geral de uma progressão aritmética é, na verdade, um polinômio em n. Assim como para a P.A. de primeira de ordem, é possível determinar um termo geral para progressões de k-ésima ordem, sendo que o valor de k é equivalente ao grau do polinômio.

Seja (1) o conhecido termo geral de uma P.A. de primeira ordem

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \tag{1}$$

Reescrevendo-se o termo geral, obtém-se a expressão abaixo.

$$a_n = rn + (a_1 - r) \tag{2}$$

De fato, (2) é um polinômio de grau 1 em n, em que r é o coeficiente de n e a_1–r é o termo independente, demonstrando-se, assim, que o valor de k e o grau do polinômio são iguais. O mesmo vale para progressões aritméticas de maior ordem: quando $k = 2$, o termo geral é um polinômio de grau 2; quando $k = 3$, têm-se um polinômio do terceiro grau; e assim sucessivamente.

Em relação a bibliografia que trata das progressões aritméticas de ordem superior pode-se dizer que ela é muito reduzida, tendo como obra principal o livro de Lopes (1998), citado pela grande maioria das pesquisas existentes.

Por outro lado, são muitas as possibilidades de explorar as progressões aritméticas, muitas vezes relacionadas a outros objetos de estudo da Matemática, como pode ser observado em [3], onde são apresentadas expressões algébricas para o cálculo do produto de dois termos consecutivos de progressões aritméticas e geométricas, e em [4], onde utiliza-se a ideia de integral para obter o termo geral de uma progressão aritmética de k-ésima ordem. Cabe destacar que [3] e [4] são trabalhos anteriores a este que deram início à pesquisa aqui apresentada.

Assim, procurando ampliar os conhecimentos relacionados ao estudo de sequências numéricas, na continuidade deste artigo serão definidos dois conceitos que receberão as nomenclaturas de “P.A. geradora”e “P.A. associada”, através dos quais objetiva-se demonstrar a relação existente entre as razões de tais progressões.

2 P.A. geradora e P.A. associada

Uma P.A. de segunda ordem pode ser obtida através da multiplicação dos termos consecutivos, de dois a dois, de uma P.A. de primeira ordem. Sendo o $n-\acute{e}simo$ termo de uma P.A. de ordem 2 indicado por $a_n^{(2)}$, então ele será definido pelo produto $a_n \cdot a_{n+1}$ dos termos de uma P.A. de primeira ordem.

Se isso for verdade, então $a_n \cdot a_{n+1}$ deve resultar em um polinômio de grau 2. Fazendo o produto de a_n por a_{n+1}, obtém-se o desenvolvimento abaixo.

$$a_n \cdot a_{n+1} = [a_1 + (n-1)r] \cdot [a_1 + nr] \tag{3}$$

$$a_n \cdot a_{n+1} = (a_1)^2 + a_1nr + a_1nr - a_1r + n^2r^2 - nr^2 \tag{4}$$

$$a_n \cdot a_{n+1} = (r^2)n^2 + (2a_1r - r^2)n + (a_1)^2 - a_1r \tag{5}$$

Realmente, (5) é um polinômio de grau 2 em n, portanto, fica provado que uma P.A. de ordem 2 pode ser obtida através do produto dos termos consecutivos de uma PA de primeira ordem.

Através do mesmo raciocínio, é possível demonstrar como são obtidas progressões de ordens maiores. Assim, para obter-se uma P.A. de ordem 3 deve-se multiplicar os termos consecutivos de uma P.A. de primeira ordem tomados de três a três, para uma P.A. de ordem 4 deve-se calcular o produto dos termos consecutivos de uma P.A. de primeira ordem tomados de quatro a quatro, enfim, generalizando, para obter-se uma P.A. de ordem k, deve-se calcular o produto dos termos consecutivos de uma P.A. de primeira ordem tomados de k a k.

Essa P.A. de primeira ordem da qual calcula-se o produto dos termos consecutivos será chamada de P.A. geradora. Abrindo parêntesis, cabe destacar que, conhecendo-se o primeiro termo e a razão da P.A. geradora, a expressão (5) pode ser entendida como o termo geral de uma P.A. de ordem 2.

Como destacado na introdução, uma operação de diferença entre os termos consecutivos de uma P.A. de ordem k, resulta em uma P.A. de ordem k–1. Repetindo esse procedimento, após k–1 diferenças obtém-se uma P.A. de primeira ordem, que será chamada de P.A. associada.

3 Constante m

Sendo r a razão da P.A. geradora, a razão da P.A. associada será indicada por m. Para demonstrar como m está relacionada à r, inicialmente, será abordado o caso de uma P.A de segunda ordem. A fim de indicar a ordem da P.A. em questão, será adicionado o índice k à razão m. Desse modo, m_2 representa a razão de uma P.A. associada obtida através das diferenças sucessivas entre os termos de uma P.A. de ordem 2.

Sabendo que m é a razão da P.A. associada, então pode-se escrever a seguinte relação.

$$m = a_2 - a_1 \tag{6}$$

Em (6), a_2 é a diferença entre o terceiro e o segundo termos de uma P.A. de segunda ordem e a_1 é a diferença entre o segundo e o primeiro termos da mesma P.A. Portanto, pode-se fazer as substituições apresentadas em (7) para calcular o valor de m_2.

$$m_2 = (a_3^{(2)} - a_2^{(2)}) - (a_2^{(2)} - a_1^{(2)}) \tag{7}$$

Agrupando os termos semelhantes, obtém-se a expressão abaixo.

$$m_2 = a_3^{(2)} - 2a_2^{(2)} + a_1^{(2)} \tag{8}$$

Porém, cada termo da P.A. de ordem 2 é obtido a partir do produto de dois termos consecutivos da P.A. geradora, resultando, assim, na expressão (9).

$$m_2 = (a_4 \cdot a_3) - 2(a_3 \cdot a_2) + (a_2 \cdot a_1) \tag{9}$$

Analogamente, pode-se obter uma expressão para m_3 . Para isso, deve-se utilizar (8) como ponto de partida e fazer as substituições apresentadas a seguir.

$$m_3 = (a_4^{(3)} - a_3^{(3)}) - 2(a_3^{(3)} - a_2^{(3)}) + (a_2^{(3)} - a_1^{(3)}) \tag{10}$$

$$m_3 = a_4^{(3)} - 3a_3^{(3)} + 3a_2^{(3)} - a_1^{(3)} \tag{11}$$

$$m_3 = (a_4 \cdot a_5 \cdot a_6) - 3(a_3 \cdot a_4 \cdot a_5) + 3(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4) - (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) \tag{12}$$

Da mesma forma, é possível escrever expressões semelhantes a (8) e (11) para qualquer valor de k. Abaixo, apresentam-se os casos em que $k = 4$ e $k = 5$.

$$m_4 = a_5^{(4)} - 4a_4^{(4)} + 6a_3^{(4)} - 4a_2^{(4)} + a_1^{(4)} \tag{13}$$

$$m_5 = a_6^{(5)} - 5a_5^{(5)} + 10a_4^{(5)} - 10a_3^{(5)} + 5a_2^{(5)} - a_1^{(5)} \tag{14}$$

Na perspectiva de uma generalização para uma P.A. de k-ésima ordem, o primeiro passo é observar os coeficientes de (6), (8), (11), (13) e (14) e perceber que eles correspondem às linhas de 2 a 6 do triângulo de Pascal (Figura 1).

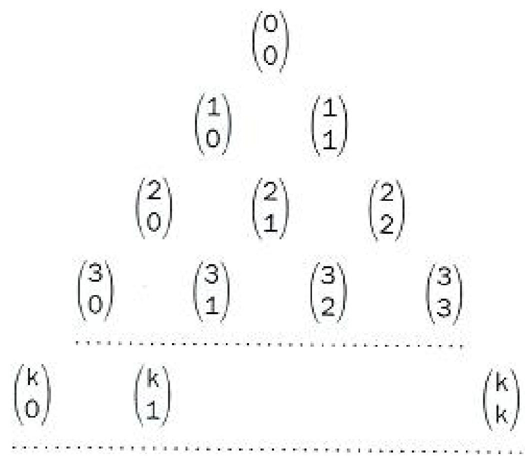

Figura 1. Triângulo de Pascal

De acordo com [5] o triângulo de Pascal (Figura 1) "é uma tabela onde podemos dispor ordenadamente os coeficientes binomiais", lembrando que um coeficiente binomial é calculado conforme (15).

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{15}$$

Desse modo, observa-se que os coeficientes da expressão que fornece o valor de m_k correspondem aos números binomiais da linha $k+1$ do triângulo de Pascal.

A segunda etapa da generalização consiste em substituir cada termo do tipo $a_n^{(k)}$ por um produto de k termos consecutivos da P.A. geradora. Para isso, será utilizada a notação de produtório, como apresentada a seguir, com α decrescendo de 1 à $(-k+1)$ e β decrescendo de k à 0.

$$\prod_{b=\alpha}^{\beta} a_{k+b} \tag{16}$$

Por fim, é importante destacar que os sinais dos coeficientes de m_k intercalam-se, iniciando sempre pelo positivo. Caso k seja par, o último coeficiente terá sinal positivo; se k for ímpar, o sinal será negativo.

Assim, reunindo-se essas informações, obtém-se o termo geral para a razão de uma P.A. de primeira ordem associada à uma P.A. de ordem k.

$$m_k = \binom{k}{0} \cdot \prod_{b=1}^{k} a_{k+b} - \binom{k}{1} \cdot \prod_{b=0}^{k-1} a_{k+b} + \ldots \pm \binom{k}{k-1} \cdot \prod_{b=-k+2}^{1} a_{k+b} \pm \binom{k}{k} \cdot \prod_{b=-k+1}^{0} a_{k+b} \tag{17}$$

Porém, é possível obter uma expressão bem mais simples para m_k . Sendo r a razão da P.A. geradora, então a razão da P.A. associada será dada por:

$$m_k = k! \cdot r^k \tag{18}$$

Para demonstrar que a afirmação acima é verdadeira quando $k = 2$, deve-se utilizar a expressão (9), escrevendo cada um dos termos em função de a_1 e r.

$$m_2 = (a_1 + 3r)(a_1 + 2r) - 2(a_1 + 2r)(a_1 + r) + (a_1 + r)a_1 \tag{19}$$

$$m_2 = (a_1)^2 + 5a_1r + 6r^2 - 2(a_1)^2 - 6a_1r - 4r^2 + (a_1)^2 + a_1r \tag{20}$$

$$m_2 = 2r^2 \tag{21}$$

Assim, sendo (18) exatamente igual a (21) para $k = 2$, verifica-se a veracidade da relação entre as razões da P.A. geradora e da P.A. associada para o caso de uma progressão de segunda ordem. Para outros valores de k, a demonstração pode ser feita de modo semelhante. Como aprofundamento do presente estudo, espera-se, em breve, poder apresentar uma prova matemática consistente para (18).

4 Soma dos n primeiros termos de uma P.A. de segunda ordem

Uma outra relação muito interessante entre progressões de diferentes ordens está associada à soma dos n primeiros termos. Substituindo-se n pelos primeiros números naturais em (5), obtém-se as seguintes expressões em função do primeiro termo e da razão apresentadas no quadro da Figura 2, abaixo.

n	$a_n^{(2)}$
1	$r^2 + 2a_1r - r^2 + (a_1)^2 - a_1r$
2	$4r^2 + 4a_1r - 2r^2 + (a_1)^2 - a_1r$
3	$9r^2 + 6a_1r - 3r^2 + (a_1)^2 - a_1r$
4	$16r^2 + 8a_1r - 4r^2 + (a_1)^2 - a_1r$
5	$25r^2 + 10a_1r - 5r^2 + (a_1)^2 - a_1r$

Figura 2. Expressões algébricas para os primeiros termos de uma P.A. de ordem 2

Após a soma de n termos, o coeficiente do termo r^2 que aparece à frente de cada expressão será dado pela soma dos quadrados dos n primeiros números naturais: $(1+4+9+16+25+ ... + n^2)$. De acordo com [6], tal soma é equivalente à (22); e isso pode ser provado através do método de indução finita.

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{22}$$

Em relação aos coeficientes de a_1r, eles serão representados como a soma dos dobros dos n primeiros números naturais: $(2+4+6+8+10+...+2n)$. Quanto ao coeficiente do termo r^2 que aparece sempre com o sinal negativo, ele será dado pela soma dos n primeiros números naturais: $(1+2+3+4+5+...+n)$. Ambos os casos podem ser tratados como a soma dos n primeiros termos de uma P.A. de primeira ordem, resultando, assim, nas expressões (23) e (24), relativas à primeira e a segunda somas supracitadas, respectivamente.

$$n^2+n \tag{23}$$

$$\frac{n^2+n}{2} \tag{24}$$

Neste ponto, pode-se, finalmente, escrever uma expressão para a soma dos n primeiros termos de uma P.A. de ordem 2.

$$S_n^{(2)} = \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] r^2 + (n^2+n)a_1r - \left(\frac{n^2+n}{2}\right) r^2 + n\left[(a_1)^2 - a_1r\right] \tag{25}$$

$$S_n^{(2)} = \frac{r^2n^3}{3} + \frac{r^2n^2}{2} + \frac{r^2n}{6} + a_1rn^2 + a_1rn - \frac{r^2n^2}{2} - \frac{r^2n}{2} + (a_1)^2n - a_1rn \tag{26}$$

$$S_n^{(2)} = \left(\frac{r^2}{3}\right) n^3 + (a_1r)n^2 + \left(\frac{3(a_1)^2 - r^2}{3}\right) n \tag{27}$$

É evidente que (27) trata-se de um polinômio de grau 3 em n, concordando, assim, com o teorema apresentado em [2]: a soma dos n primeiros termos de uma P.A. de ordem k é um polinômio de grau $k+1$ em n.

Como (27) é um polinômio de grau 3 em n e o termo geral de uma P.A. de ordem 3 também o é, então (27) é o termo geral de uma P.A. de terceira ordem. Ou seja, a soma dos n primeiros termos de uma P.A. de ordem k corresponde a uma P.A. de ordem $k+1$.

Substituindo-se, em (27), r pela razão e $a_1$pelo primeiro termo de uma P.A. de primeira ordem e n por 1, 2, 3, 4, etc., obtém-se os primeiros termos de uma P.A. de ordem 3. Para progressões obtidas dessa maneira, a relação entre as razões da P.A. geradora e da P.A. associada deixa de ser (18) e passa a ser (28).

$$m_k = (k-1)! \cdot r^{k-1} \tag{28}$$

A partir da discussão sobre a soma de termos é possível desenvolver um método alternativo para obter progressões de ordem superior: o $n-ésimo$ termo de uma P.A. de ordem $k+1$ é calculado através da soma dos n primeiros termos de uma P.A. de ordem k. Matematicamente, isso pode ser escrito como apresentado abaixo.

$$a_n^{(k)} = a_1^{(k-1)} + a_2^{(k-1)} + a_3^{(k-1)} + ... + a_n^{(k-1)} \tag{29}$$

$$a_n^{(k)} = S_n^{(k-1)} \tag{30}$$

Tal propriedade referente à soma dos termos está diretamente relacionada ao próprio conceito de progressão aritmética, visto que o procedimento para se obter os termos de uma P.A. de primeira ordem pode ser compreendido como uma soma de uma sequência de números em que o primeiro deles é igual ao primeiro termo da P.A. a ser obtida e os outros números são todos idênticos entre si e iguais à razão.

Por exemplo, seja dada a sequência $a = (2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, ...)$. O seu primeiro termo é igual a 2, portanto, o primeiro termo da P.A. também será igual a 2. O segundo termo será dado pela soma dos dois primeiros números de a, $2 + 3 = 5$. Para calcular o terceiro termo da P.A., deve-se adicionar o terceiro termo de a à soma dos dois primeiros, $5 + 3 = 8$. Seguindo esse procedimento, obtém-se a P.A. $(2, 5, 8, 11, 14, 17, ...)$.

Sobre as progressões de ordem superior obtidas a partir desse processo é importante fazer duas considerações. Uma delas diz respeito ao primeiro termo, que será sempre o mesmo, pois, para $n = 1$, (29) resulta em $a_1^{(k)} = a_1^{(k-1)}$, indicando que o primeiro termo não será somado a nenhum outro valor.

A segunda consideração refere-se à relação que envolve a razão das progressões. Nesse caso, as razões da P.A. geradora e da P.A. associada serão iguais, ou seja, $m = r$.

5 Conclusões

Com base nas considerações apresentadas, conclui-se que a partir de uma mesma P.A. geradora pode-se obter duas progressões aritméticas distintas, mas de mesma ordem k: uma delas através do produto dos termos da P.A. geradora e a outra a partir da soma dos termos de uma P.A. de ordem uma unidade menor. Ainda, é possível obter uma progressão de ordem 3 através da expressão para a soma dos n primeiros termos de uma P.A de segunda ordem.

Assim, esses três procedimentos para obter sequências de ordem superior a partir de progressões aritméticas de primeira ordem implicam em também três possibilidades de relacionar as razões da P.A. geradora e da P.A. associada.

Enfim, a aplicação dos coeficientes binomiais por meio do triângulo de Pascal demonstra como as progressões aritméticas estão relacionadas a conceitos de outros campos da Matemática, reforçando o interesse em estudá-las e ampliando as pesquisas sobre progressões aritméticas de ordem superior.

Referências

[1] IEZZI, Gelson. HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática elementar**: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. 282 p.

[2] LOPES, Luís. **Manual de progressões**. Rio de Janeiro: Interciência, 1998. 126 p.

[3] MAROSKI, Marcelo Wachter. Termo geral de uma progressão de k-ésima ordem. **REMAT**, Bento Gonçalves, v. 3, n. 2, dez. 2017. p. 116-123.

[4] MAROSKI, Marcelo Wachter. Desenvolvimento de expressões algébricas para calcular o produto de dois termos consecutivos de progressões aritméticas e geométricas. **C.Q.D**: Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Edição Iniciação Científica, Bauru, v. 11, dez. 2017, p. 62-71.

[5] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática elementar**: combinatória e probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. 204 p.

[6] DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003. 368 p.