

# Representações de funções especiais

**Maria Cecília K. Aguilera-Navarro**

Departamento de Matemática - UNICENTRO  
85010-990 Guarapuava, PR - Brasil

**Valdir C. Aguilera-Navarro**

Departamento de Química e Física - UNICENTRO  
85010-990 Guarapuava, PR - Brasil

**Ricardo C. Ferreira e Neuza Teramon**

Departamento de Matemática - UEL  
86051-990 Londrina, PR - Brasil

*(Recebido em 15 de maio de 2000)*

**Resumo:** *No contexto da Matemática Experimental, estudam-se a convergência e a eficiência dos aproximantes de Padé de algumas funções especiais.*

**Palavras-chave:** *funções especiais, aproximantes de Padé*

**Abstract:** *The convergence property and representation efficiency of the Padé approximant to some special functions are studied in the context of Experimental Mathematics.*

**Key word:** *special functions, Padé approximants*

## 1 Introdução

Neste trabalho, estudamos a eficiência dos aproximantes de Padé na representação de algumas funções especiais, definidas na reta, de interesse em áreas como Física, Matemática e Química, entre outras. Por eficiência queremos entender a rapidez de convergência e a possibilidade de aumentar o raio de convergência da série que representa cada uma dessas funções e que serviu de base para a construção do aproximante de Padé.

Esse estudo reveste-se de importância, também, nas pesquisas visando à construção de algoritmos eficientes para cálculos computacionais. Um resumo da teoria dos aproximantes de Padé é oferecido na próxima seção. Na seção 3, estudamos a função gama de Euler-Stieltjes  $\Gamma(x)$ . A seção 4 trata da função de Bessel de primeira espécie  $J_n(x)$ . A função de Airy  $Ai(x)$  é estudada na seção 5. Na seção 6 estudamos a função hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1(a, b, x)$ , também conhecida como função de Kummer  $M(a, b, x)$ . Nessa mesma seção, dois casos particulares da função hipergeométrica confluyente são considerados, a saber, a função erro  $\text{erf}(x)$  e a função gama incompleta  $\Gamma(a, x)$ .

Acreditamos que este repertório de funções e a sistemática usada para estudá-las, possam servir de paradigma e motivação para estudos posteriores de outras funções de interesses mais particulares.

## 2 Os aproximantes de Padé

Com o propósito de dar uma autonomia relativa a este trabalho, apresentamos nesta seção um resumo da teoria dos aproximantes de Padé. O leitor interessado em se aprofundar no tema pode consultar, por exemplo, uma das referências [1-3].

Dada a expansão

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots \quad (1)$$

o aproximante de Padé associado a  $f(x)$ , e indicado por  $[L/M]$ , é definido pela condição

$$[L/M] = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = f(x) + O(x^{L+M+1}) \quad (2)$$

onde  $P_L(x)$  e  $Q_M(x)$  são polinômios na variável  $x$ , isto é,

$$P_L(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Lx^L \quad (3)$$

e

$$Q_M(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_Mx^M \quad (4)$$

Por conseguinte, um aproximante de Padé é uma função racional. Os  $L + M + 1$  coeficientes  $p_i$  e  $q_j$ , das expressões (3) e (4), são determinados em termos dos coeficientes  $f_n$  de (1) a partir do sistema de  $L + M + 1$  equações algébricas lineares que resultam da condição (2). Os coeficientes  $f_n$  da expansão básica (1) são denominados “peças de informações”.

## 2.1 O Padé [1/2] como exemplo

Consideremos o aproximante de Padé [1/2]

$$[1/2] = \frac{p_0 + p_1x}{1 + q_1x + q_2x^2}$$

associado à expansão

$$f(x) = 1 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots \quad (5)$$

Esse aproximante se expressa em termos de quatro coeficientes  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $q_1$  e  $q_2$  que são determinados pelo sistema de quatro equações resultantes da condição (2). Explicitamente, obtém-se para o Padé [1/2] a função

$$[1/2] = \frac{f_1^3 - f_1f_2 + (f_1^4 - 2f_1^2f_2 + f_1f_3)x}{f_1^3 - f_1f_2 + (f_1f_3 - f_1^2f_2)x + (f_1f_2^2 - f_1^3f_3)x^2} \quad (6)$$

Um fato importante a ser observado desse exemplo, e que é uma característica de todos os aproximantes de Padé, com exceção da classe particular de aproximantes  $[L/0]$ , é que os coeficientes originais  $f_n$  aparecem em combinações algébricas, muito mais ricas em informações do que as simples combinações lineares. Esse fato de certa forma explica por que os aproximantes de Padé podem, em geral, fornecer muito mais informações da série básica do que a própria série, como veremos nas próximas seções.

## 3 Função gama de Euler-Stieltjes $\Gamma(x)$

Como uma primeira aplicação dos aproximantes de Padé na representação de funções especiais, consideremos a função gama de Euler-Stieltjes, ou simplesmente função gama, indicada por  $\Gamma(x)$ . Esta função é uma generalização do fatorial e está definida na reta por [4, 5]

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0 \quad (7)$$

Uma forma alternativa de se definir a função gama para todos os valores de  $x$  é através de uma integral curvilínea, a saber

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^t dt}{t^x} \quad (8)$$

onde  $C$  é um caminho apropriado de integração [6].

Por outro lado, a função  $\ln \Gamma(x+1)$  admite a seguinte expansão em torno de  $x=0$  [7]

$$\ln \Gamma(x+1) = x(1-\gamma) - \ln(1+x) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)-1}{n} x^n, \quad |x| < 2 \quad (9)$$

onde  $\zeta(n)$  é a função zeta de Riemann [8, 9].

Como estamos interessados numa expansão em série de potências, vamos usar o fato de que a função logaritmo pode ser expressa como [10]

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| \leq 1, x \neq -1 \quad (10)$$

Usando esta expressão em (9), após algum cálculo algébrico elementar obtemos a seguinte expansão em série de potências

$$\ln \Gamma(x+1) = -\gamma x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n} x^n, \quad (11)$$

onde  $\gamma = 0.5772156649\dots$  é a constante de Euler. Usaremos a expansão (11) para padeizar a função gama, isto é,

$$\ln \Gamma(x+1) \simeq [L/M] \quad (12)$$

Usando o procedimento descrito no início deste trabalho, o aproximante de Padé [3/3] para a função  $\ln \Gamma(x+1)$  é dado por

$$[3/3] = \frac{-0.577216x + 0.184034x^2 + 0.393719x^3}{1 + 1.10606x + 0.199736x^2 - 0.0144211x^3} \quad (13)$$

A figura 1 mostra os gráficos da série de Taylor (11), com onze termos (linha pontilhada), da expressão exata (linha contínua) e do aproximante de Padé [3/3] (linha tracejada) que coincide com a exata, portanto não se distingue na figura. Vemos o quanto é ruim a série de Taylor, que diverge para  $x > 1$ , e como o aproximante de Padé, utilizando apenas sete termos da expansão de Taylor (11), descreve apropriadamente a função exata.

Notemos que o aproximante de Padé foi capaz de descrever a função representada pela série (11), usando apenas sete termos da série, melhor do que a própria série com onze de seus termos!

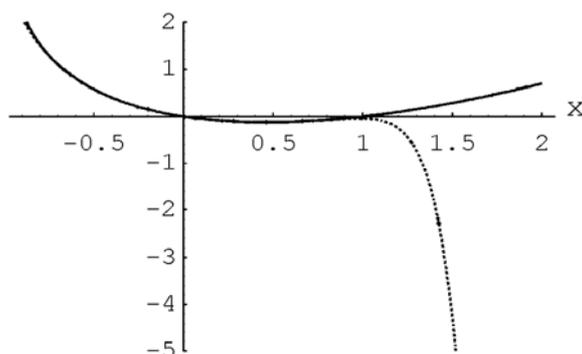


Figura 1. Representações da função gama de Euler-Stieltjes. Linha pontilhada (série de Taylor com 11 termos); linha contínua (expressão exata); e, linha tracejada (aproximante de Padé [3/3]). A linha tracejada não se distingue da contínua, indicando que os valores obtidos com o aproximante de Padé coincidem com os obtidos da expressão exata, dentro da escala e intervalo mostrados na figura.

## 4 Função de Bessel

A função de Bessel  $J_n(x)$  é uma solução da seguinte equação diferencial [11]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \quad (n \text{ inteiro}) \quad (14)$$

Desta equação podemos deduzir várias propriedades da função  $J_n(x)$  entre as quais a seguinte representação em série de potências [12]

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k k! \Gamma(n+k+1)} \quad (15)$$

onde  $k!$  representa o fatorial de  $k$ , e  $\Gamma$  é a função gama definida na seção anterior.

Vamos reescrever (15) da seguinte forma

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n F(x) \quad (16)$$

onde

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k k! \Gamma(n+k+1)} \quad (17)$$

Em seguida vamos padéizar a função  $F(x)$  de maneira que a função de Bessel  $J_n(x)$  seja representada em termos de aproximantes de Padé pela expressão

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n [L/M] \quad (18)$$

A figura 2 mostra a função de Bessel  $J_1(x)$ , sua representação de Taylor até a potência  $x^{23}$ , e o aproximante de Padé [10/10]. No intervalo e escala da figura, os três gráficos praticamente coincidem. Os pequenos ramos nas duas extremidades do eixo dos  $x$  são do aproximante de Padé.

Neste caso, a vantagem do aproximante de Padé não é tão espetacular, pois ele utilizou vinte e uma das vinte e três peças de informação usadas pela série de Taylor.

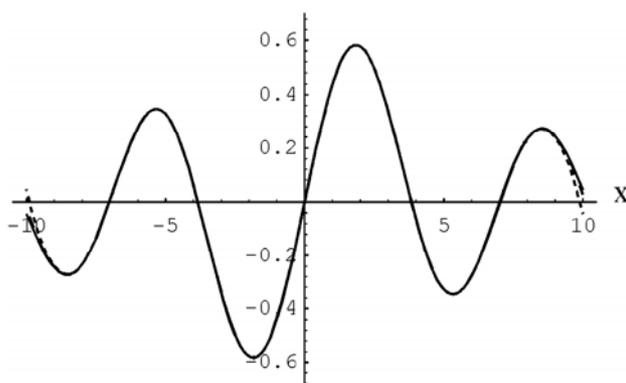


Figura 2. A função de Bessel  $J_1(x)$ . No intervalo e escala da figura, o aproximante de Padé [10/10], a série de Taylor truncada em  $x^{23}$  e a função exata praticamente coincidem.

## 5 Funções de Airy

As funções de Airy representadas por  $Ai(x)$  e  $Bi(x)$  são as duas soluções linearmente independentes da seguinte equação diferencial [13]

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0 \quad (19)$$

Estas funções admitem representações em séries de potência, a saber [13]

$$Ai(x) = c_1f(x) - c_2g(x) \quad (20)$$

$$Bi(x) = \sqrt{3}[c_1f(x) + c_2g(x)] \quad (21)$$

onde

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{x^{3k}}{(3k)!} \quad (22)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{x^{3k+1}}{(3k+1)!} \quad (23)$$

e as constantes  $c_1$  e  $c_2$  valem

$$c_1 = 0,355028053887817 \text{ e } c_2 = 0,258819403792807 \quad (24)$$

As expressões  $(\alpha)_k$  que aparecem em (22) e (23) são símbolos de Pochhammer definidos por [14]

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1), \quad (\alpha)_0 = 1 \quad (25)$$

Neste trabalho, vamos nos limitar à função  $Ai(x)$ ; a função  $Bi(x)$  pode ser analisada com o mesmo procedimento. A figura 3 mostra o aproximante de Padé [10/10] (linha tracejada) comparado com a função de Airy  $Ai(x)$  (linha contínua) e a série de Taylor truncada em  $x^{22}$  (linha pontilhada). Notemos que a série de Taylor não tem bom comportamento para  $|x| > 4$ , ao passo que o aproximante de Padé [10/10] coincide com a função exata para todo  $x > -4$ .

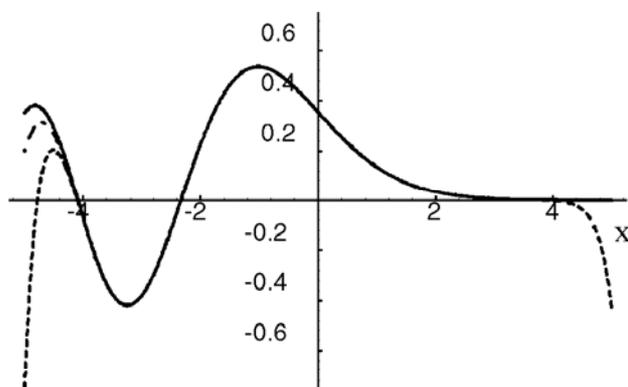


Figura 3. Função de Airy  $Ai(x)$  exata (linha contínua), Padé [10/10] (linha tracejada) e série de Taylor truncada em  $x^{22}$  (linha pontilhada). O aproximante de Padé descreve notavelmente bem a função exata para  $x > -4$  enquanto que a expansão de Taylor não é adequada para  $|x| > 4$ .

## 6 Função hipergeométrica confluyente

A função hipergeométrica confluyente  ${}_1F_1(a, b, x)$ , ou  $M(a, b, x)$ , também conhecida como função de Kummer, é uma solução da equação diferencial ordinária [15]

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (b - x) \frac{dy}{dx} - ay = 0 \quad (26)$$

e admite a seguinte representação em série de potências [15]

$$y = M(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{(b)_n n!} \quad (27)$$

onde  $(a)_n$  e  $(b)_n$  são os símbolos de Pochhammer definidos em (25).

A equação (26) admite outra solução linearmente independente de  $M(a, b, x)$  e que se indica por  $U(a, b, x)$ . Neste trabalho não estaremos interessados nesta solução.

Dando valores particulares aos parâmetros  $a$  e  $b$  em (27), muitas funções conhecidas podem ser expressas em termos da função hipergeométrica confluyente  $M(a, b, x)$ . Por exemplo, tomando  $a = b$ , a expansão (27) se simplifica e toma a forma

$$M(a, a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (28)$$

que é a função exponencial  $e^x$ . Outro exemplo é a função seno hiperbólico que pode ser posta em termos da função hipergeométrica confluyente tomando-se  $a = 1$  e  $b = 2$ , da seguinte forma

$$\sinh(x) = x e^{-x} M(1, 2, x) \quad (29)$$

Representações de funções menos triviais serão estudadas nas próximas subseções.

### 6.1 Função erro

A função erro é definida por [16]

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (30)$$

e pode ser expressa em termos da função hipergeométrica confluyente  $M(a, b, x)$  como [17]

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right) \quad (31)$$

A série de Taylor da função erro pode ser obtida a partir de (31) e (27) com  $a = 1/2$  e  $b = 3/2$ , e é dada por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{10} - \frac{x^6}{42} + \frac{x^8}{216} - \dots\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \quad (32)$$

A figura 4 mostra o aproximante de Padé [6/6] (linha tracejada) comparado com a função erro  $\operatorname{erf}(x)$  (linha contínua) e a série de Taylor (linha pontilhada) truncada em  $x^{20}$ . No intervalo considerado, a linha tracejada (Padé) não se diferencia da linha contínua mostrando que o aproximante de Padé é excelente.

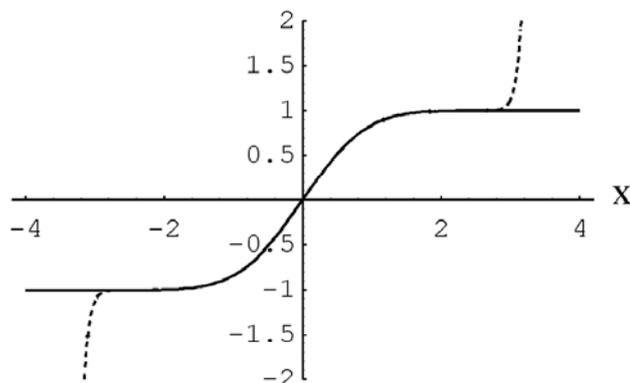


Figura 4. Função erro  $\operatorname{erf}(x)$  (linha contínua), aproximante de Padé [6/6] associado (linha tracejada) e a série de Taylor truncada em  $x^{20}$  (linha pontilhada). A linha tracejada não se diferencia da contínua no intervalo e escala da figura.

## 6.2 Função gama incompleta

A função gama incompleta é definida por [18]

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \quad (33)$$

e sua relação com a função hipergeométrica confluyente é dada por [19]

$$\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \frac{x^a}{a} M(a, a+1, -x) \quad (34)$$

Tendo em conta a expressão (27), com  $b = a + 1$ , podemos reescrever a Eq. (34) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Gamma(a, x) &= \Gamma(a) - \frac{x^a}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a x^n}{(a+n)n!} \\ &= \Gamma(a) - \frac{x^a}{a} \left[ 1 - \frac{ax}{a+1} + \frac{ax^2}{2(a+2)} - \frac{ax^3}{6(a+3)} + \dots \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Vamos estudar dois casos:  $a = 1$  e  $a = 2$ .

### 6.2.1 Caso $a = 1$

Quando o parâmetro  $a$  assume o valor 1, visto que  $\Gamma(1) = 1$ , a expansão (35) se simplifica e toma a forma

$$\begin{aligned}\Gamma(1, x) &= 1 - x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!} \\ &= 1 - x \left[ 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{24} + \dots \right]\end{aligned}\quad (36)$$

A figura 5 mostra o aproximante de Padé [5/5] (linha tracejada) comparado com a função  $\Gamma(1, x)$  (linha contínua) e a série de Taylor truncada em  $x^{12}$  (linha pontilhada). Na escala e intervalo considerados, a linha tracejada (Padé) não se diferencia da linha contínua mostrando a excelência do aproximante de Padé.

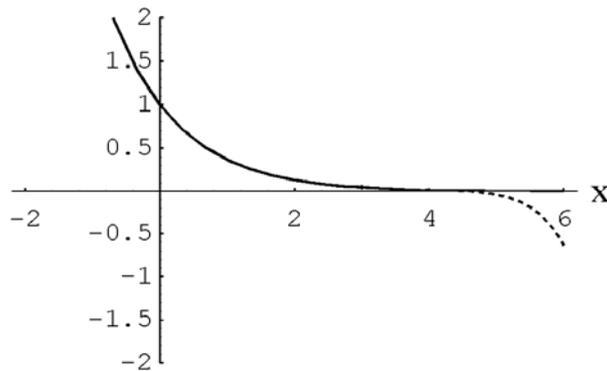


Figura 5. Função gama incompleta  $\Gamma(1, x)$  (linha contínua), aproximante de Padé [5/5] (linha tracejada) e a série de Taylor truncada em  $x^{12}$  (linha pontilhada). Na escala e intervalo considerados, a linha tracejada (Padé) não se diferencia da linha contínua mostrando a excelência do aproximante de Padé.

### 6.2.2 Caso $a = 2$

No caso em que o parâmetro  $a$  assume o valor 2, a expansão (35) se simplifica e toma a forma

$$\begin{aligned}\Gamma(2, x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{30} - \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2x^n}{(2+n)n!}\end{aligned}\quad (37)$$

A figura 6 mostra o aproximante de Padé [4/4] (linha tracejada) comparado com a função  $\Gamma(2, x)$  (linha contínua) e a série de Taylor truncada em  $x^{12}$  (linha pontilhada). No intervalo considerado, a linha tracejada (Padé) não se diferencia da linha contínua mostrando que o aproximante de Padé é excelente.

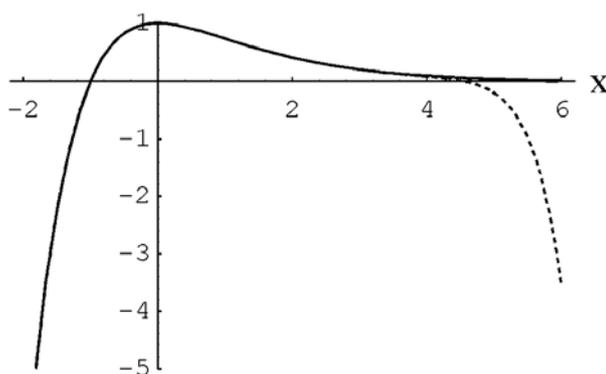


Figura 6. A função gama incompleta  $\Gamma(2, x)$  (linha contínua), o aproximante de Padé [4/4] (linha tracejada) e a série de Taylor truncada em  $x^{12}$  (linha pontilhada). Na escala e intervalo considerados, a linha tracejada (Padé) não se diferencia da linha contínua mostrando a excelência do aproximante de Padé.

## 7 Conclusões

O estudo desenvolvido neste trabalho mostra que os aproximantes de Padé podem representar de forma excelente, e bastante conveniente, diversas funções especiais, familiares a matemáticos, físicos, químicos, biólogos, e outros pesquisadores. Os aproximantes de Taylor (série de Taylor truncada em alguma potência da variável  $x$ ) em geral divergem após um valor relativamente pequeno da variável. Podem, assim, ser inadequados para representar as funções estudadas neste trabalho.

Dissemos, acima, que os aproximantes de Padé são especialmente convenientes no estudo de funções especiais. Isso porque, sendo uma função racional, os aproximantes de Padé se prestam, também, para estudo de possíveis singularidades que algumas funções podem eventualmente apresentar. Esta é uma linha atraente de trabalho que merece ser explorada.

O método desenvolvido neste trabalho pode ser estendido à análise de expansões em potências, como, por exemplo, as obtidas de análises perturbativas de sistemas físicos. Também pode ser estendido para representações de funções de variável complexa. Formalmente, o método a ser utilizado é exatamente o mesmo.

## Referências

- [1] George A. Baker, Jr., *Essentials of Padé Approximants*. New York: Academic Press, 1975.
- [2] Maria Cecília Aguilera-Navarro, Valdir C. Aguilera-Navarro, Ricardo C. Ferreira e Neuza Teramon, *Aproximantes de Padé*, Notas do Departamento de Matemática, UEL. Londrina: UEL, 1997.
- [3] Maria Cecília Aguilera-Navarro, Valdir C. Aguilera-Navarro, Ricardo C. Ferreira e Neuza Teramon, Os aproximantes de Padé, *Rev. Universitária (Soc. Bras. de Matemática)*, v. 26/27, p. 49-66, 1999.

- [4] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover, 1980, p. 255.
- [5] I. S. Sokolnikoff, *Advanced Calculus*. New York: McGraw-Hill, 1939, p. 372.
- [6] P. Dennery e A. Krzywicki, *Mathematics for Physicists*. New York: Harper & Row, 1967, p. 94.
- [7] Referência [4], p. 260.
- [8] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta function*. Oxford: Clarendon, 1967.
- [9] Maria Cecília Aguilera-Navarro, Valdir C. Aguilera-Navarro, Ricardo C. Ferreira e Neuza Teramon, A função zeta de Riemann, *Rev. Ciências Exatas e Naturais*, v. 1, p. 26-47, 1999.
- [10] Referência [4], p. 68.
- [11] I. N. Sneddon, *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*. Edinburgh: Oliver & Boyd, 1961, p. 114.
- [12] Referência [4], p. 360.
- [13] Referência [4], p. 446.
- [14] Referência [4], p. 256.
- [15] Referência [4], p. 504.
- [16] Referência [4], p. 297.
- [17] Referência [4], p. 509.
- [18] Referência [4], p. 260.
- [19] Referência [4], p. 262.