Os “Skew” Anéis de Polinômios Tipo Automorfismo e a Fatoração Única

Skew Polynomials Rings of Automorphism Type and Unique Factorisation

Marlon Soares
Universidade Estadual do Centro-Oeste - UNICENTRO
Departamento de Matemática, Guarapuava, PR
marlonsoares@unicentro.br

Resumo: Este artigo apresenta alguns resultados da teoria dos “skew” anéis de polinômios tipo automorfismo e algumas condições necessárias para que o “skew” anel de polinômios tipo automorfismo, de um anel de fatoração única Noetheriano, apresente fatoração única.

Palavras-chave: anéis não-comutativos; fatoração única; “skew” anéis de polinômios.

Abstract: This paper presents some results of the theory of skew polynomials rings of automorphism type and some necessary conditions so that the skew polynomials ring of automorphism type, of a Noetherian unique factorization ring, presents unique factorisation.

Key words: non-commutative rings; unique factorization; skew polynomial rings.

1 Introdução

Em [1], Kaplansky mostra, no Teorema 5, que a noção clássica de fatoração única para domínios comutativos é equivalente à condição que todo ideal primo não-nulo contenha um ideal primo principal não-nulo. Tal noção foi estendida por Chatters, em [2] a domínios Noetherianos *R*, não necessariamente comutativos, mediante a condição que todo ideal primo não-nulo contenha um elemento completamente primo, ou seja, mediante a condição que todo ideal primo não-nulo contenha um elemento normal p tal que R/pR seja um domínio. Do ponto de vista da teoria dos anéis não-comutativos, essa é uma condição bem forte e faz com que seja relativamente fácil provar a maior parte dos resultados básicos que são sugeridos, por analogia, com o caso comutativo. No entanto, a classe dos domínios de fatoração única Notherianos não é fechada sob extensões polinomiais, como mostra o exemplo 2.11 do referido trabalho.

Por sua vez, em [3], Chatters e Jordan estendem o conceito de fatoração única para anéis primos Noetherianos não necessariamente comutativos mediante a condição que todo ideal primo não-nulo contenha um elemento primo. Tal definição torna a classe dos anéis de fatoração única Notherianos fechada sob extensões polinomiais usuais, porém o fato de ser um anel de fatoração única, Noetheriano não é condição suficiente para que o mesmo aconteça com suas extensões polinomiais não-usuais, em particular com o "skew" anel de polinômios tipo automorfismo.

Embora Chatters e Jordan tenham demonstrado que, num anel primo Noetheriano, todo ideal α-primo não-nulo conter um ideal α-primo não-nulo principal é uma condição necessária e suficiente para que o "skew" anel de polinômios tipo automorfismo seja um anel de fatoração única Noetheriano, eles não provam algumas condições necessárias para que o "skew" anel de polinômios tipo automorfismo, de um anel de fatoração única Noetheriano, apresente tal propriedade. Além disso, a teoria dos "skew" anéis de polinômios tipo automorfismo, necessária ao estudo da fatoração única em anéis Noetherianos não necessariamente comutativos, não é encontrada na literatura disponível, sejam em livros-texto, seja em periódicos.

No que segue, além de uma introdução a essa teoria, a partir da qual serão provados alguns resultados imprescindíveis ao estudo da fatoração única, demonstraremos duas condições necessárias, não demonstradas por Chatters e Jordan, para que o "skew" anel de polinômios tipo automorfismo, de um anel de fatoração única Noetheriano, apresente tal propriedade. Ressaltamos que, embora a condição necessária e suficiente, citada no parágrafo anterior, já tenha sido demonstrada por Chatters e Jordan, como sua demonstração possui várias implicações não evidentes e os resultados que provaremos são uma conseqüência desta, faremos uma releitura deste resultado. Por sua vez, resultados, já provados em outros trabalhos, serão apenas referenciados.

A próxima seção destina-se às noções básicas indispensáveis ao desenvolvimento dos resultados que serão apresentados. Na Seção 3, introduzimos a teoria dos "skew" anéis de polinômios tipo automorfismo enquanto, a Seção 4, se destina à fatoração única.

2 Pré-requisitos

Ao desenvolvermos este trabalho consideramos conhecidas as noções básicas da Teoria de Anéis. Caso seja necessária alguma consulta com relação a esta teoria recomendamos [4] e [5]. Nesta seção, recordamos apenas alguns conceitos e fixamos a terminologia.

Consideraremos um anel R sempre associativo com unidade, mas não necessariamente comutativo. Quando um ideal I de R for bilateral, diremos que I é um ideal de R. Além disso, denotaremos a inclusão estrita por $\subset$ ou $\supset$.

Um elemento $a \in R$ é dito *normalizante* se $aR=Ra$. Um elemento $a \in R$ é dito *regular à direita,* se dado um elemento $b \in R$ tal que $ab=0$, temos que $b=0$. Analogamente, define-se elemento regular à esquerda e quando um elemento é regular à direita e à esquerda diz-se que ele é um elemento regular de R. Dado um ideal I de R, $C_R(I)$, denota-se que o conjunto dos elementos de R são regulares módulo I, ou seja, $C_R(I)=\{r \in R;\ r+I$ é regular em $R/I\}$. Quando não houver dúvida com relação ao anel em questão, denotaremos este conjunto por $C(I)$.

Um anel R é dito *simples* quando seus únicos ideais bilaterais são os triviais, ou seja, 0 e R. Por sua vez, um anel R é dito *Noetheriano à direita* se satisfaz à condição de cadeia ascendente sobre ideais à direita, isto é, se dada uma cadeia qualquer de ideais à direita $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$, existe um inteiro positivo k tal que $I_k=I_k+1=\cdots$. Analogamente, define-se um anel Noetheriano à esquerda e quando R é Noetheriano à direita e à esquerda diz-se que R é um anel Noetheriano.

Definição 2.1 Um ideal P de um anel R é dito *ideal primo* se, para quaisquer ideais I e J de R, temos que $IJ \subseteq P$ implica $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$. Um anel R é dito um *anel primo* se o ideal 0 é um ideal primo de R. Um anel R é dito *anel semiprimo* se, para qualquer ideal I de R e $n \geq 1$, $I^n=0$ implica $I=0$.

Definição 2.2 Sejam R um anel e P um ideal primo de R. A *altura* de P, que denotaremos por alt$P$, é o número de inclusões estritas da maior cadeia de ideais primos contidos em P. Um ideal primo P de R é dito um *ideal primo minimal* de R se P não contém propriamente qualquer outro ideal primo.

Teorema 2.3 ([5], Teorema 4.1.11) Sejam R um anel Noetheriano à direita, $a \in R$ um elemento normalizante não invertível e P um ideal primo de R minimal sobre aR. Então P tem altura no máximo 1.

Teorema 2.4 ([6], Teorema 2.4) Se R é um anel Noetheriano à direita, então existe somente um número finito de ideais primos minimais em R.

Definição 2.5 Seja S um sistema multiplicativo formado por elementos regulares em um anel R. Um anel R_S é chamado um *anel de quocientes à direita de* R se satisfaz as seguintes condições:

i) $R \subseteq R_S$;

ii) todo elemento de S é invertível em R_S;

iii) todo elemento de R_S é da forma rs^{-1}, para algum $r \in R$ e para algum $s \in S$.

Definição 2.6 Um sistema multiplicativo S, de um anel R, satisfaz a *condição de Ore à direita* se, para todo $r \in R$ e para todo $s \in S$, existem $r' \in R$ e $s' \in S$ tais que $rs'=sr'$.

Teorema 2.7 ([7], Teorema 1.3) Seja S um sistema multiplicativo de elementos regulares em um anel R. O anel de quocientes à direita R_S com relação a S existe se, e somente se, S satisfaz a condição de Ore à direita.

Teorema 2.8 ([5], Proposição 1.16) Seja R_S o anel de quocientes à direita de um anel R, com respeito a um sistema multiplicativo S. Se R é um anel Noetheriano, então existe uma correspondência biunívoca entre $\{P \in \mathrm{Spec}R; P \cap S = \emptyset\}$ e $\{P' \in \mathrm{Spec}R_S\}$ via $P \mapsto PR_S$ e $P' \mapsto P' \cap R$.

Definição 2.9 Um anel R é chamado um *anel de fatoração única Noetheriano* se R é um anel primo Noetheriano tal que todo ideal primo não-nulo de R contém um ideal primo principal não-nulo.

Teorema 2.10 Sejam R um anel de fatoração única Noetheriano e P um ideal primo não-nulo de R. Então P tem altura 1 se, e somente se, P é principal.

Demonstração. Suponhamos que P é principal, como R é primo Noetheriano segue, por 2.3, que alt(P) = 1. Reciprocamente, suponhamos, por absurdo, que existe em R um ideal primo Q, de altura 1, que não é principal. Como R é um anel de fatoração única Noetheriano, Q contém um ideal primo principal P não nulo e, portanto, de altura 1. Daí temos $0 \subset P \subset Q$, com alt$Q$ = alt$P$ = 1, o que é uma contradição.

Teorema 2.11 ([8], Lema 3.1) Sejam p e q elementos primos de uma anel primo R. Se $pR \neq qR$ então $pqR = pR \cap qR = qpR$.

Observação. O lema acima pode ser estendido a um número finito qualquer de elementos primos.

3 "Skew" anéis de polinômios tipo automorfismo

Nesta seção faremos uma introdução à teoria dos "skew" anéis de polinômios tipo automorfismo, necessária ao estudo da fatoração única. Reiteramos que os resultados já provados em outros trabalhos serão apenas referenciados.

Sejam R um anel e α um automorfismo de R. O *"skew" anel de polinômios tipo automorfismo* $R[x;\alpha]$ é definido como o anel cujos elementos são os polinômios $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, com $a_i \in R$. A adição é definida da forma usual e a multiplicação pela propriedade $xa=\alpha(a)x$, para todo $a \in R$, estendida por distributividade. Assim, a multiplicação é dada por:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_i x^i\right) = \sum_{i,j=0}^{n,m} a_i \alpha^i (b_j) x^{i+j}$$

Um ideal I de R é dito um α*-ideal* se $\alpha(I) \subseteq I$. Um anel R é dito α*-simples* quando seus únicos α*-ideais* são os triviais, ou seja, 0 e R.

Definição 3.1 Um α-ideal P de R é dito um *ideal* α*-primo* se para quaisquer α-ideais I e J de R tem-se que $IJ \subseteq P$ implica $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$. Um anel R é dito um *anel* α*-primo* se o ideal 0 é um ideal α*-primo* de R.

Lema 3.2 ([5], Lema 10.6.5) Se R é Noetheriano à direita e α-*primo*, então R é semiprimo.

Seja I é um α-*ideal* de R; como $\alpha(I) \subseteq I$, temos que $I[x;\alpha]$ é um ideal de $R[x;\alpha]$. Sejam I e J α-*ideais* de R; como $\alpha(J) \subseteq J$, temos que $(IJ)[x;\alpha] = I[x;\alpha]J[x;\alpha]$. Além disso, dado um ideal K de $R[x;\alpha]$ é fácil ver que o subconjunto de R formado pelos coeficientes líderes dos elementos de K, que denotaremos por $\tau(K)$, é um α-*ideal* de R.

Teorema 3.3 Se P é um ideal α-*primo* de R, então $P[x;\alpha]$ é um ideal primo de $R[x;\alpha]$.

Demonstração. Sejam I e J ideais de $R[x;\alpha]$ tais que $IJ \subseteq P[x;\alpha]$, $P[x;\alpha] \subseteq I$ e $P[x;\alpha] \subseteq J$. Então, $\tau(I)\tau(J) \subseteq \tau(IJ) \subseteq P$. Como P é α-*primo* e $\tau(I)$ e $\tau(J)$ são α-*ideais* de R temos que $\tau(I) \subseteq P$ ou $\tau(J) \subseteq P$. Suponhamos que $\tau(I) \subseteq P$ e seja $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in I$. Então, $a_n \in \tau(I) \subseteq P$ e $a_n x^n \in P[x;\alpha] \subseteq I$.

Como $f \in I$ temos que $f - a_n x^n = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in I$. Daí, $a_{n-1} \in \tau(I) \subseteq P$. Repetindo o processo obtemos $a_i \in P$, $0 \leq i \leq n$. Assim, $I \subseteq P[x;\alpha]$ e, portanto, $P[x;\alpha]$ é um ideal primo de $R[x;\alpha]$.

Teorema 3.4 Seja P um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Se $x \in P$ então $P = (P \cap R) + R[x;\alpha]x$. Caso contrário $\alpha(P) \subseteq P$.

Demonstração. Suponhamos que $x \in P$ e seja $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ um elemento de P. Como $x \in P$ obtemos que $(a_1 + \cdots + a_n x^{n-1})x \in P$ e então, $a_0 \in P$. Assim, $f = a_0 + (a_1 + \cdots + a_n x^{n-1})x \in (P \cap R) + R[x;\alpha]x$ e, portanto, $P \subseteq (P \cap R) + R[x;\alpha]x$. Considere agora um elemento $g \in (P \cap R) + R[x;\alpha]x$, então $g = b_0 + h_x$, com $b_0 \in (P \cap R)$ e $h \in R[x;\alpha]$. Como $x \in P$ temos que $hx \in P$, logo $g \in P$ e daí, $(P \cap R) + R[x;\alpha]x \subseteq P$.

Por sua vez, se $x \notin P$ então $x \in C(P)$. Além disso, temos que $xP = \alpha(P)x \in P$, logo $\alpha(P)R[x;\alpha]x = \alpha(P)xR[x;a] \subseteq P$. Como P é um ideal primo de $R[x;\alpha]$ e $x \notin P$, segue que $\alpha(P) \subseteq P$.

Teorema 3.5 Se P é um ideal primo de $R[x;\alpha]$ tal que $\alpha(P) \subseteq P$, então $P \cap R$ é um ideal α-primo de R.

Demonstração. É claro que $P \cap R$ é um ideal de R e, sendo $\alpha(P) \subseteq P$, temos que $\alpha(P \cap R) \subseteq P \cap R$. Além disso, se I e J são α-ideais de R tais que $IJ \subseteq P \cap R$, temos $IJ \subseteq P$ e daí, $IR[x;\alpha]JR[x;\alpha] = (IJ)R[x;\alpha] \subseteq P$. Como P é primo segue que $I \subseteq I[x;\alpha] \subseteq P$ ou $J \subseteq J[x;\alpha] \subseteq P$, e assim, $I \subseteq P \cap R$ ou $J \subseteq P \cap \mathrm{R}$. Portanto, $P \cap R$ é um ideal α-primo de R.

Corolário 3.6 Se $R[x;\alpha]$ é um anel primo então R é um anel α-primo.

Demonstração. Sendo $R[x;\alpha]$ é um anel primo, temos que 0 é um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Como $\alpha(0) \subseteq 0$, segue pelo Lema 3.5, que $0 \cap R = 0$ é um ideal α-primo de R e, por conseguinte, R é um anel α-primo.

Teorema 3.7 ([5], Teorema 1.2.9) Se R é um anel Noetheriano à direita (esquerda), então $R[x;\alpha]$ é um anel Noetheriano à direita (esquerda).

4 Fatoração única em R[x; α]

Observação. Embora o Teorema 4.4, que será apresentado nesta seção, já tenha sido demonstrado por Chatters e Jordan, em [3], faremos uma releitura da sua demonstração. Isso se justifica por questões pedagógicas, haja vista que na demonstração apresentada em [3], há várias implicações não evidentes. Ressaltamos, ainda, que os Lemas 4.1, 4.2 e 4.3, bem como as demonstrações dos Teoremas 4.5 e 4.6 não fazem parte do referido artigo.

Diferentemente do anel de polinômios usual $R[x]$, quando tratamos de “skew” anéis de polinômios tipo automorfismo, o fato que R é um anel de fatoração única Noetheriano não é condição suficiente para que o mesmo aconteça com $R[x;\alpha]$. Um exemplo disto pode ser encontrado em [9], em que é mostrado que se R é o anel dos polinômios em duas indeterminadas, t e y, que comutam com o corpo dos complexos, e α é um automorfismo tal que $\alpha(y)=t+y^2$ e $\alpha(t)=y$, então $R[x;\alpha]$ não é um anel de fatoração única. Veremos, então, algumas condições adicionais para que $R[x;\alpha]$ seja um anel de fatoração única. Nesta seção chamaremos um elemento $b \in R$ de *normalizante* α*-primo* se bR é um ideal α-primo principal não-nulo de R.

É claro que o sistema multiplicativo D, gerado pelos elementos normalizantes α-primos de R, satisfaz a condição de Ore. Além disso, sendo R um anel primo, os elementos de D são regulares. Então, pelo Teorema 2.7, existe um anel de quocientes S de R formado pela inversão dos elementos normalizantes α-primos e podemos estender α para um automorfismo de S que também chamaremos de α. Note que $S[x;\alpha]$ é o anel de quocientes de $S[x;\alpha]$, com respeito a D.

Teorema 4.1 Sejam R um anel α-primo Noetheriano e P um ideal primo minimal de R. Então $P \cap \alpha(P) \cap \cdots \cap \alpha^n(P) = 0$, para algum inteiro positivo n.

Demonstração. Por 2.4, existe um número finito de ideais primos minimais de R. Sejam $P_1,\ldots,P_k$ os ideais primos minimais distintos de R. Suponhamos, por absurdo, que existe um ideal primo minimal, que sem perda de generalidade vamos supor P_1, tal que $\bigcap_{i=0}^{n} \alpha^i(P_1) \neq 0$, para todo inteiro positivo n. Daí, é fácil ver que a interseção $\bigcap_{i\geq 0} \alpha^i(P_1)$ também é não nula. Sendo R Noetheriano e α-primo temos, pelo Lema 3.2, que R é semi-primo, e então, $\bigcap_{j=1}^{k} P_j = 0$. Como $\bigcap_{i\geq 0} \alpha^i(P_1) \subseteq P_1$ temos, $\left(\bigcap_{i\geq 0} \alpha^i(P_1)\right) P_2 \cdots P_k \subseteq P_1 P_2 \cdots P_k \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} P_j = 0$. Mas, $\bigcap_{i\geq 0} \alpha^i(P_1)$ é um α-ideal que estamos supondo não-nulo e R é α-primo, então temos $P_2 \cdots P_k = 0$. Daí, $P_2 \cdots P_k \subseteq P_1$ e $P_1 = P_t$, para algum $t \in \{2,\ldots,k\}$, o que contradiz o fato que os P_i's são todos distintos. Portanto, segue a tese.

Lema 4.2 Se $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano, então R é um anel primo Noetheriano.

Demonstração. Tomando a aplicação $\phi : R[x;\alpha] \to R$, definida por $\phi(h) = c_0$, onde $h = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, temos que R é uma imagem homomórfica de $R[x;\alpha]$, logo R é um anel Noetheriano. Além disso, por 3.6, R é um anel α-primo. Por conseguinte, dado um ideal primo minimal P de R temos, por 4.1, que $\bigcap_{i=0}^{n} \alpha^i(P) = 0$, para algum inteiro positivo n.

Considere o ideal $xR[x;\alpha]+P$ de $R[x;\alpha]$. Como $R[x;\alpha]/(xR[x;\alpha]+P)\simeq R/P$, temos que $xR[x;\alpha]+P$ é um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Seja Q um ideal primo de $R[x;\alpha]$ tal que $xR[x;\alpha]\subseteq Q\subseteq xR[x;\alpha]+P$ Mostraremos que $Q=xR[x;\alpha]$ ou $Q=xR[x;\alpha]=P$. Temos que $x\in Q$; então, por 3.4, $Q=(Q\cap R)+R[x;\alpha]x$. Assim $R[x;\alpha]/Q\simeq R/(Q\cap R)$ e, daí, $Q\cap R$ é um ideal primo de *R*, contido em *P*. Como *P* é um primo minimal segue que $Q\cap R=0$ ou $Q\cap R=P$. Por conseguinte, $Q=xR[x;\alpha]$ *ou* $Q=xR[x;\alpha]+P$.

Se $Q=xR[x;\alpha]$, então $xR[x;\alpha]$ é um ideal primo e, como $R[x;\alpha]/xR[x;\alpha]\simeq R$, temos que R é um anel primo. Suponhamos então que $Q=xR[x;\alpha]+P$; daí, o ideal $xR[x;\alpha]+P$ é minimal sobre $xR[x;\alpha]$ e, pelos Teoremas 2.3 e 2.10, deve ser da forma $fR[x;\alpha]=R[x;\alpha]f$, para algum $f=\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ em $R[x;\alpha]$. Como $x\in xR[x;\alpha]\subseteq xR[x;\alpha]+P=fR[x;\alpha]$ temos que $x=fg$, para algum $g=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ em $R[x;\alpha]$. Note que, sendo $xR[x;\alpha]+P=fR[x;\alpha]=R[x;\alpha]f$ e $xR[x;\alpha]\cap R=0$, temos $P=a_0R=Ra_0$ e, daí, $\alpha^i(P)=\alpha^i(a_0)R=R\alpha^i(a_0)$, para todo inteiro positivo *i*. Além disso, de $x=fg$, temos que $a_0b_0=0$ donde, $\alpha(a_0)R\alpha(b_0)=0$. Novamente de $x=fg$ temos que $a_1\alpha(b_0)+a_0b_1=1$. Multiplicando esta última equação por $\alpha(a_0)$ e considerando que $\alpha(a_0)R\alpha(b_0)=0$, obtemos $\alpha(a_0)a_0b_1=\alpha(a_0)$. Multiplicando esta equação por $(\alpha^n(a_0)\cdots\alpha^2)(\alpha_0)$ e considerando o fato que $\alpha^n(a_0)\cdots\alpha(\alpha_0)a_0\in P\bigcap\alpha(P)\bigcap\cdots\bigcap\alpha^n(P)=0$ obtemos que $\alpha(\alpha^{n-1}(a_0)\cdots a_0)=0$. Da injetividade de α temos $\alpha^{n-1}(a_0)\cdots\alpha(\alpha_0)a_0=0$. Repetindo este processo, obtemos $a_0=0$. Assim, $P=0$ e, portanto, *R* é um anel primo.

Lema 4.3 Sejam *R* um anel de fatoração única Noetheriano e *S* o anel de quocientes de *R* com respeito ao sistema multiplicativo gerado pelos elementos normalizantes α-primos de *R*. Então, todo ideal primo não-nulo *P* de $S[x;\alpha]$ tal que $x\notin P$ é principal e gerado por um elemento normalizante de $S[x;\alpha]$.

Demonstração. Sejam *P* um ideal primo não-nulo de $S[x;\alpha]$, tal que $x\notin P$, e *f* um elemento não-nulo de *P* de grau mínimo, digamos $\partial(f)=n$. É claro que o subconjunto τ_0 de *S*, formado pelo 0 e pelos coeficientes líderes dos elementos de *P* de grau *n*, é um ideal não-nulo de *S*. Considere um elemento $c_n\in\tau_0$, então existe $h\in P$ tal que $\partial(h)=n$ e seu coeficiente líder é c_n. Temos $xh=\alpha(h)x\in P$, então

$\alpha(h)S[x;\alpha]x = \alpha(h)xS[x;\alpha] \subseteq P$. Como $x \notin P$, segue que $\alpha(h) \in P$. Além disso, temos $\partial(\alpha(h)) = n$ e assim, $\alpha(c_n) \in \tau_0$. Portanto, τ_0 é um α-ideal não nulo de S e como S é, claramente, um anel α-simples temos que $\tau_0 = S$.

Assim, podemos supor que f é mônico e, pelo algoritmo da divisão, temos que para todo $g \in P$ existem $q, r \in S[x;\alpha]$ tais que $g=fq+r$, com $r=0$ ou $\partial(r) < \partial(f)$. Logo $r \in P$ e, da minimalidade de n, segue que $r=0$. Daí, para todo $g \in P$, temos $g=fq$, com $q \in S[x;\alpha]$ e, portanto, $P=fS[x;\alpha]$. Além disso, dado $s \in S$, temos $\alpha^n(s)f - fs \in P$ e, como $x \in C(P)$, temos $xf - fx = hx$, para algum $h \in P$. Como os elementos $\alpha^n(s)f - fs$ e h têm grau menor que n, eles são nulos. Logo $fS=Sf$ e $fx=xf$ e, por conseguinte, $P= fS[x;\alpha] = S[x;\alpha]f$.

Teorema 4.4 Seja R um anel com um automorfismo α. Então $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano se, e somente se, R é um anel primo Noetheriano e todo ideal α-primo não-nulo de R contém um ideal α-primo não-nulo que é principal.

Demonstração. Se $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano então, por 4.2, R é um anel primo Noetheriano. Falta mostrar que todo ideal α-primo não-nulo de R contém um ideal α-primo principal não-nulo. Seja P um ideal α-primo não nulo de R. Por 3.3, $P[x;\alpha]$ é um ideal primo não-nulo de $R[x;\alpha]$. Como $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano, existe um elemento não-nulo $f \in P[x;\alpha]$ tal que $fR[x;\alpha] = R[x;\alpha]f$ é um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Suponhamos $f = r_n x^n + \cdots + r_1 x + r_0$, com $r_i \in R$; daí obtemos que $r_0 \neq 0$, pois se $r_0=0$ então teríamos $f \in xR[x;\alpha]$. Note, também, que $x \notin fR[x;\alpha]$ pois, caso contrário, teríamos $x=r_1 x b_0 = r_1 \alpha(b_0) x$, sendo b_0 o termo constante de algum elemento $g \in R[x;\alpha]$, tal que $x = fg$. Então, $1 = r_1 \alpha(b_0)$ e, por conseguinte, temos $P=R$. Além disso, x é normalizante em $R[x;\alpha]$. Assim, teríamos $fR[x;\alpha] = (r_n x^{n-1} + \cdots + r_1)xR[x;\alpha] = (r_n x^{n-1} + \cdots + r_1)R[x;\alpha]x$. Como $fR[x;\alpha]$ é um ideal primo e $x \notin fR[x;\alpha]$, segue que $r_n x^{n-1} + \cdots + r_1 \in fR[x;\alpha] \subseteq xR[x;\alpha]$ e, portanto, $r_1=0$. Repetindo este argumento, obtemos $r_1=r_2=\cdots r_n=0$, o que contradiz o fato que f é não-nulo.

Observe que, como R é primo e f é normalizante, r_0 é regular. Além disso, $xf = \alpha(f)x \in R[x;\alpha]f = fR[x;\alpha]$, logo

$\alpha(f)R[x;\alpha]x = \alpha(f)xR[x;\alpha] \subseteq fR[x;\alpha]$. Como $fR[x;\alpha]$ é primo e $x \notin fR[x;\alpha]$, temos que $\alpha(f) \in fR[x;\alpha]$, ou seja, $\alpha(f) = fg$, onde $g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\alpha]$. Assim, $\alpha(r_0) = r_0 b_0 \in r_0 R$ e, daí, $\alpha(r_0)R = \alpha(r_0 R) \subseteq r_0 R$ e, portanto, $r_0 R$ é um α-ideal de R. Além disso, é claro que $r_0 R[x;\alpha] = R[x;\alpha]r_0$ e $r_0 \in P[x;\alpha]$. Então, por 2.3, existe um ideal primo de altura 1 em $R[x;\alpha]$ que, por 2.10, é da forma $gR[x;\alpha] = R[x;\alpha]g$, tal que $r_0 \in gR[x;\alpha] \subseteq P[x;\alpha]$. Seja $s \in P$ o termo constante de g. Assim como r_0, s é um elemento normalizante para ambos, R e $R[x;\alpha]$. Note que, $xg = \alpha(g)x \in R[x;\alpha]g = gR[x;\alpha]$ logo, $\alpha(g)R[x;\alpha]x = \alpha(g)xR[x;\alpha] \subseteq gR[x;\alpha]$. Como $gR[x;\alpha]$ é primo e, além disso, $x \notin gR[x;\alpha]$, obtemos que $\alpha(g) \in gR[x;\alpha]$ e, daí, $\alpha(g)R[x;\alpha] = \alpha(gR[x;\alpha]) \subseteq gR[x;\alpha]$. Então, por 3.5, $gR[x;\alpha] \cap R$ é um ideal α-primo de R e, por 3.3, $(gR[x;\alpha] \cap R)R[x;\alpha]$ é um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Como $gR[x;\alpha]$ tem altura 1 e $(gR[x;\alpha] \cap R)R[x;\alpha]$ possui um elemento não-nulo r_0, segue que $(gR[x;\alpha] \cap R)R[x;\alpha] = gR[x;\alpha]$. É claro que $(gR[x;\alpha] \cap R) \subseteq sR$. Reciprocamente, se $r \in R$ então sr é o termo constante de $gr \in (gR[x;\alpha] \cap R)R[x;\alpha]$. Donde $sR \subseteq gR[x;\alpha] \cap R$. Assim, $sR[x;\alpha]$ é primo em $R[x;\alpha]$ e, por 3.5, $sR = sR[x;\alpha] \cap R$ é um ideal α-primo principal não-nulo de R, contido em P.

Reciprocamente, se R é um anel primo Noetheriano e todo ideal α-primo não nulo de R contém um ideal α-primo principal não nulo, então, pelo Lema 3.5 e pelo Teorema 3.7, $R[x;\alpha]$ é um anel primo Noetheriano. Falta mostrar que todo ideal primo não-nulo de $R[x;\alpha]$ contém um ideal primo principal não-nulo. Seja S o anel de quocientes de R formado pela inversão dos elementos normalizantes α-primos de R. Como R é primo, 0 é um ideal primo de R então, por 2.8, o ideal 0 é primo em S e daí, S é um anel primo. Além disso, como $S \simeq S[x;\alpha]/xS[x;\alpha]$, temos que $xS[x;\alpha]$ é um ideal primo de $S[x;\alpha]$.

Seja Q um ideal primo não-nulo de $R[x;\alpha]$. Se $x \in Q$, então $xR[x;\alpha] \subseteq Q$ e, como $R \simeq R[x;\alpha]/xR[x;\alpha]$, temos que $xR[x;\alpha]$ é um ideal primo principal não-nulo, contido em Q. Suponhamos agora que $x \notin Q$. Vamos considerar dois casos. Se $Q \cap R \neq 0$ então, por 3.5, $Q \cap R$ é um ideal α-primo não-nulo de R e, por hipótese, contém um ideal α-primo principal não-nulo. Assim, contém um elemento normalizante primo que gera um ideal primo principal não-nulo de $R[x;\alpha]$, contido em *Q*. Finalmente, vamos considerar o caso em que $Q \cap R = 0$, com $x \notin Q$. Denotemos por Q* a extensão de *Q* em $S[x;\alpha]$. Como $Q \cap R = 0$, segue que $Q^* \neq S[x;\alpha]$. Por 2.8, temos que Q* é um ideal primo de $S[x;\alpha]$. Note como os elementos normalizantes α-primos de *R* são regulares módulo *Q*, $x \notin Q^*$. Então, pelo Lema 4.3, $Q^* = fS[x;\alpha] = S[x;\alpha]f$, para algum $f \in S[x;\alpha]$ tal que $xf=fx$ e $Rf=fR$. Escrevamos $f=gd^{-1}$, para algum $g \in Q$ e d um produto de elementos normalizantes α-primos de *R*. Como dR é um α-ideal de *R*, $\alpha(d) = du$, para algum invertível $u \in R$. Então $Rg = Rfd = fRd = fdR = gR$ e $xg = xfd = fxd = fdu^{-1}x = gu^{-1}x$, assim $R[x;\alpha]g = gR[x;\alpha]$ e $Q^* = fS[x;\alpha] = gd^{-1}S[x;\alpha] = gS[x;\alpha]$. Podemos também supor que $gR[x;\alpha]$ é maximal para elementos normalizantes g de *Q* tais que $gS[x;\alpha] = Q^*$.

Suponhamos que $gR[x;\alpha] \neq Q$ e seja $h \in Q \setminus gR[x;\alpha]$. Como $h \in Q^*$ temos $h = gd'^{-1}$, para algum $d' \in D$, logo $h \in Q \setminus gR[x;\alpha]$. Como d' é um produto de elementos normalizantes α-primos de *R*, não existe perda de generalidade em supor que $hb \in gR[x;\alpha]$, para algum elemento normalizante primo $b \in R$. Assim, $hb=gc$, para algum $c \in R[x;\alpha]$. Temos $gR[x;\alpha]c = R[x;\alpha]gc = R[x;\alpha]hb \subseteq R[x;\alpha]b$, com $R[x;\alpha]b$ um ideal primo de $R[x;\alpha]$. Como $hb = gc$ e $h \notin gR[x;\alpha]$, temos que $c \notin R[x;\alpha]b$. Por conseguinte, temos que $g \in R[x;\alpha]b$ e, portanto, $g = g'b$, para algum $g' \in R[x;\alpha]$. Mas $g'R[x;\alpha]b = g'bR[x;\alpha] = gR[x;\alpha] \subseteq Q$ e, sendo $Q \cap R = 0$, temos que $b \notin Q$, logo $g' \in Q$. Além disso, $g'R[x;\alpha]b = g'bR[x;\alpha] = gR[x;\alpha] = R[x;\alpha]g = R[x;\alpha]g'b$ e então, do fato que todo elemento normalizante é regular, temos $g'R[x;\alpha] = R[x;\alpha]g'$. Como b é um elemento invertível em $S[x;\alpha]$, $Q^* = gS[x;\alpha] = g'bS[x;\alpha] = g'S[x;\alpha]$. Pela maximalidade de $gR[x;\alpha]$, temos $g'R[x;\alpha] = gR[x;\alpha]$, o que é impossível, pois b não é invertível em $R[x;\alpha]$. Por conseguinte, $Q = gR[x;\alpha]$.

Assim, em ambos os casos, *Q* contém um ideal primo principal não-nulo e, portanto, $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.

Vamos, agora, demonstrar duas condições suficientes para que o "skew" anel de polinômios, de um anel de fatoração única Noetheriano, seja um anel de fatoração única Noetheriano.

Teorema 4.5 Seja R um anel de fatoração única Noetheriano com um automorfismo α tal que todo ideal α-primo não-nulo contém um α-ideal principal não-nulo. Então $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.

Demonstração. Consideremos Q um ideal α-primo não-nulo arbitrário de R. Então, por hipótese, Q contém um α-ideal principal não-nulo que denotaremos por R. Considere, agora, um ideal α-primo minimal I tal que $aR \subseteq I$. Note que I é não-nulo, pois $aR \subseteq I$ e aR é não-nulo. Além disso, como I é α-primo, existe um ideal primo P de R, minimal sobre I, tal que $\bigcap_{i\geq 0}\alpha^i(P) = I$. Mostraremos que o ideal primo P é minimal sobre aR.

De fato, suponhamos que L seja um ideal primo de R satisfazendo a condição $aR \subseteq L \subseteq P$. Então $aR \subseteq \bigcap_{i\geq 0}\alpha^i(L) \subseteq \bigcap_{i\geq 0}\alpha^i(P) = I$. É fácil ver que $\bigcap_{i\geq 0}\alpha^i(L)$ é α-primo e assim, $\bigcap_{i\geq 0}\alpha^i(L) = I$. Daí, $L \supseteq I$ e, por conseguinte, temos L=P. Logo, pelo Teorema 2.3, P tem altura 1, sendo da forma $P = pR$. Usando o fato que α é um automorfismo e estendendo o Lema 2.11 para n+1 elementos, obtemos que

$$I = \bigcap_{i=0}^{n}\alpha^i(P) = \bigcap_{i=0}^{n}\alpha^i(p)R = \prod_{i=0}^{n}\alpha^i(p)R\,,$$

ou seja, que I é um ideal α-primo não-nulo principal. Como Q é um ideal α-primo não-nulo arbitrário de R, todo ideal α-primo não-nulo de R contém um ideal α-primo não-nulo que é principal e, pelo Teorema 4.4, concluímos que $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.

Teorema 4.6 Seja R um anel de fatoração única Noetheriano com um automorfismo α de ordem finita. Então, $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.

Demonstração. Por definição, sendo o automorfismo α de ordem finita, existe um número inteiro positivo n tal que $\alpha^n = id$. Mostraremos que todo ideal α-primo não-nulo de R contém um α-ideal principal não-nulo e daí, pelo Teorema 4.5, que $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.

Seja P um ideal α-primo não-nulo arbitrário de R, existem elementos primos $p_1,\cdots,p_S \in R$ tais que $p_1\cdots p_S \in P$. Como P é um ideal de R e $p_1,\cdots,p_S \in R$ segue que $p_1\cdots p_s\mathrm{R} \in P$ e, daí, que

$$\bigcap_{i=1}^{n-1}\alpha^i(p_1)R\cdots\bigcap_{i=1}^{n-1}\alpha^i(p_S)R \subseteq P\,.$$

Como P é α-primo temos $\bigcap_{i=1}^{n-1}\alpha^i(p_j)R \subseteq P$, para algum $j \in \{1,\cdots,s\}$. Usando o fato que α é um automorfismo e estendendo o Lema 2.11 para n-1 elementos, obtemos que

$$\prod_{i=1}^{n-1}\alpha^i(p_j)R = \bigcap_{i=1}^{n-1}\alpha^i(p_j)R \subseteq P$$

ou seja, que o ideal α-primo não nulo P contém o ideal α-primo não nulo principal $I = \prod_{1}^{n-1}\alpha^i(p_j)R$. Como P é um ideal α-primo não-nulo arbitrário de um anel de fatoração única Noetheriano R, a hipótese do Teorema 4.5 está satisfeita e, portanto, $R[x;\alpha]$ é um anel de fatoração única Noetheriano.

Referências

[1] KAPLANSKY, I. Commutative Rings, *The University of Chicago Press*, Chicago, 1974.

[2] CHATTERS, A. W. Non-comuttative unique factorisation domains, *Math. Proc. Cambrige Philos. Soc.*, v. 95, p. 49-54, 1984.

[3] CHATTERS, A. W. e JORDAN, D. A. Non-comuttative unique factorisation rings, *J. London Math. Soc.,* v. 33, n. 2, p. 22-32, 1986.

[4] LAN, T. Y. *A first course in noncommutative rings*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991.

[5] MCCONNELL, J. C. e ROBSON, J. C. Non-comuttative Noetherian rings, *Wiley-Intercience*, New York, 1987.

[6] GOODEARL, K. R. e WARFIELD R. B. Jr. An introduction to noncommutative Noetherian rings, 2nd edn, *London Mathematical Society Students Texts 61*, Cambrigde University Press, New York, 2004.

[7] JATEGAONKAR, A. V. *Left Principal Ideal Rings*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Heidelberg, 1970.

[8] CHATTERS, A. W., GILCHRIST M. P. e WILSON, D., Unique factorisation rings, *Proceedings of the Edinburgh Math. Soc.*, v. 35, p. 255-269, 1992.

[9] SMITH, M. K. Eigenvectors of automorphisms of polynomial rings in two variables, *Houston J. Math.*, v. 10, n. 2, p. 559-573, 1984.