

# **Uma Breve Comparação de Técnicas Baseadas na Memória Associativa Nebulosa Implicativa de Lukasiewicz para a Reconstrução de Imagens Corrompidas com Ruído do Tipo Pimenta**

## **A Brief Comparison of Techniques Based on the Lukasiewicz Implicative Fuzzy Associative Memory for the Reconstruction of Images Corrupted by Pepper Noise**

**Raul Arthur Fernandes Rosa**

Departamento de Engenharia Elétrica  
Universidade Estadual de Londrina – UEL – Londrina, PR  
*rauleng2007@yahoo.com.br*

**Marcos Eduardo Valle**

Departamento de Matemática  
Universidade Estadual de Londrina - UEL – Londrina, PR  
*valle@uel.br*

**Resumo:** Memórias associativas nebulosas implicativas (IFAMs) são redes neurais nebulosas progressivas de camada única cujas conexões sinápticas e valor de limiar são determinados através do aprendizado nebuloso implicativo. No caso autoassociativo, esses modelos apresentam ótima capacidade absoluta de armazenamento e uma excelente tolerância com respeito a padrões incompletos ou erodidos. Conseqüentemente, podem ser efetivamente aplicados para a reconstrução de imagens corrompidas com ruído do tipo pimenta. Esse artigo apresenta três técnicas baseadas em IFAMs para a reconstrução de imagens em tons de cinza. Na primeira técnica, uma única IFAM é usada para armazenar todas as colunas de uma imagem. Na segunda técnica, cada coluna da imagem é armazenada numa IFAM distinta. Ambas as técnicas, entretanto, requerem que a imagem original seja apresentada ao modelo. A terceira técnica, por outro lado, utiliza a própria imagem corrompida para sua recuperação. Para efeitos comparativos, foi

Recebido em 19/08/2010 - Aceito em 01/10/2010

---

RECEN      Guarapuava, Paraná      v. 12      nº 1      p. 9-37      jan/jun 2010

---

considerada, também, a correlação de longo alcance introduzida por Zhang e Wang para a remoção de ruídos impulsivos em imagens em tons de cinza.

**Palavras-chave:** memórias associativas nebulosas; redes neurais; teoria dos conjuntos nebulosos.

**Abstract:** Implicative fuzzy associative memories (IFAMs) are single layer feedforward fuzzy neural networks whose synaptic weights and threshold values are given by the implicative fuzzy learning. In the autoassociative case, these models exhibit optimal absolute storage capacity and an excellent tolerance with respect to incomplete or eroded patterns. As a consequence, they can be effectively used for the reconstruction of gray-scale images corrupted by pepper noise. This paper presents three techniques for the reconstruction of gray-scale images. In the first technique, a unique IFAM is used for the storage of all columns of an image. In the second technique, each column of the image is stored in a separated IFAM. Both techniques, however, require that the original image is introduced to the model. The third technique, in contrast, uses the corrupted image for its own restoration. For comparative purposes, we also considered the long-range correlation technique introduced by Zhang and Wang for the restoration of gray-scale images corrupted by impulsive noise.

**Key words:** fuzzy associative memories; fuzzy sets theory; neural networks.

## 1 Introdução

Memórias associativas (Associative Memories, AMs) são modelos inspirados na habilidade do cérebro humano de recordar por associação [1-5]. Aqui, uma representação parcial ou aproximada de um item memorizado pode ser usada para recordar o item completo. Um exemplo simples seria recordar um poema ouvindo as primeiras palavras como uma dica inicial. Outro exemplo seria lembrar uma pessoa especial sentindo um certo perfume. Devido à motivação biológica, muitos modelos de AM são descritos por redes neurais artificiais. Lembre-se que uma

rede neural artificial é um modelo matemático inspirado no cérebro humano, onde as unidades básicas de processamento são os neurônios [1, 3, 4]. Além da motivação biológica, modelos de AM foram aplicados com sucesso em problemas de otimização, classificação, reconhecimento de padrões e previsão de séries temporais [6-11].

Em termos matemáticos, uma AM corresponde a uma aplicação contínua  $\mathcal{M}:X \rightarrow Y$ , onde  $X$  e  $Y$  representam os conjuntos de todos os possíveis itens memorizados. Por exemplo,  $X$  e  $Y$  poderiam representar, respectivamente, um conjunto de perfumes e um conjunto de pessoas. Nesse caso, um certo perfume estaria associado a uma pessoa especial por meio da aplicação  $\mathcal{M}$ . Um caso particular surge quando um item é associado a ele mesmo. Nesse caso, tem-se uma memória autoassociativa. Recordar um poema ouvindo as primeiras palavras como dica inicial é um exemplo autoassociativo. Memórias autoassociativas são também referidas como memórias endereçadas por conteúdo [3, 5, 12].

Uma memória associativa nebulosa (Fuzzy Associative Memory, FAM) é um modelo de AM que é usado para criar associações entre conjuntos nebulosos [13, 14]. As FAMs max-min e max-produto de Kosko [14-17], as FAMs generalizadas (Generalized Fuzzy Associative Memories, GFAMs) de Chung e Lee [19], e as memórias associativas nebulosas implicativas (Implicative Fuzzy Associative Memories, IFAMs) [8, 18] são exemplos de FAMs. Observa-se, entretanto, que tanto as FAMs de Kosko como as GFAMs, geralmente, não conseguem recordar corretamente um item memorizado devido à interferência cruzada entre os padrões memorizados [14, 19]. Portanto, apesar de aplicações bem sucedidas em diversos problemas [14, 15, 19, 20], as FAMs de Kosko e as GFAMs não são recomendadas para a reconstrução de imagens em tons de cinza [8, 18].

Em contraste, as IFAMs apresentam ótima capacidade absoluta de armazenamento no caso autoassociativo [18]. Em outras palavras, pode-se armazenar quantos padrões forem desejados numa IFAM autoassociativa. Além disso, esses modelos apresentam convergência numa única iteração e uma excelente tolerância com respeito a padrões incompletos ou erodidos [8, 18]. Consequentemente, as IFAMs autoassociativas podem ser efetivamente usadas para a reconstrução de imagens em tons de cinza [8, 20].

Este artigo apresenta uma breve comparação entre técnicas baseadas em IFAMs autoassociativas para a reconstrução de imagens em tons de cinza. Especificamente, considera-se primeiro uma técnica, referida como armazenamento íntegro, no qual os padrões memorizados correspondem às colunas de uma imagem em tons de cinza. Uma outra técnica considerada, chamada armazenamento isolado, consiste em armazenar cada coluna de uma imagem em uma IFAM autoassociativa distinta. Contudo, ambas as técnicas supõem que a imagem original (sem ruídos) é memorizada antes do modelo ser usado para a reconstrução de imagens corrompidas. Em vista disso, é também proposta uma técnica, referida como auto-recuperação, no qual a própria imagem corrompida é usada para sua restauração. Finalmente, para efeitos comparativos, foi considerada, também, a correlação de longo alcance introduzida por Zhang e Wang [37].

O artigo está organizado da seguinte forma. A próxima seção revisa a teoria e as propriedades fundamentais das IFAMs. A seção 3 apresenta as técnicas baseadas em IFAMs autoassociativas e a correlação de longo alcance para a reconstrução de imagens corrompidas com ruído impulsivo do tipo pimenta. Experimentos computacionais são apresentados na seção 4. O artigo termina com a conclusão na seção 5.

## 2 Teoria e propriedades das memórias associativas nebulosas implicativas

Uma memória associativa é um modelo projetado para armazenar pares de entrada e saída. Teoricamente, a formulação do problema para uma memória associativa é: Dado um conjunto de pares de entrada e saída  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ , chamado conjunto das memórias fundamentais, determine uma aplicação  $\mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, k$  [3, 5, 21]. Além disso, a aplicação  $\mathcal{M}$  deve possuir uma certa tolerância com respeito à ruído, i.e.,  $\mathcal{M}(\tilde{\mathbf{x}}^\xi) = \mathbf{y}^\xi$  para versões corrompidas ou incompletas  $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$  de  $\mathbf{x}^\xi$ .

Uma memória autoassociativa tem o mesmo papel, porém, entrada e saída são iguais, isto é,  $\mathbf{x}^\xi = \mathbf{y}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, k$ . Uma memória autoassociativa pode

ser usada para recordar a saída correta mesmo quando um padrão corrompido é apresentado como entrada [2].

Este trabalho está focado nas IFAMs, que são modelos de memórias associativas usadas para armazenar e recordar padrões (ou conjuntos) nebulosos [18, 22]. Para tornar o artigo autossuficiente, as próximas subseções apresentam uma breve revisão da teoria dos conjuntos nebulosos e redes neurais nebulosas.

## 2.1 Conceitos básicos e operações com conjunto nebulosos

A teoria dos conjuntos nebulosos foi introduzida em 1965 por Zadeh com objetivo de dar um tratamento matemático para conceitos subjetivos como a noção de “pessoal jovem”, “erro pequeno”, dentre outros [23-26]. Formalmente, um conjunto nebuloso é definido como uma função  $\mathbf{x}$  de um universo  $U$  para o intervalo  $[0,1]$ , onde 0 representa a total exclusão e 1 a total inclusão. A função  $\mathbf{x}$  é referida como função de pertinência e o valor  $\mathbf{x}(u)$  representa o grau de pertinência de  $u$  no conjunto nebuloso  $\mathbf{x}$ .

As definições apresentadas a seguir tratam dos conceitos de norma triangular e implicação nebulosa. Esses conceitos podem ser interpretados como generalizações do conectivo “e” e da implicação da lógica clássica.

**Definição 1 (Norma Triangular ou t-norma)** Uma norma triangular, ou simplesmente t-norma, é um operador crescente, comutativo e associativo que satisfaz  $T(x, 1) = x$  para todo  $x \in [0, 1]$ .

**Exemplo 1 (Mínimo, Produto, T-norma de Lukasiewicz)** O mínimo e o produto, denotados por  $T_M$  e  $T_P$ , são exemplos de t-normas. Outra t-norma importante, denotada por  $T_L$ , foi introduzida por Lukasiewicz no contexto da lógica multi-valores [25, 26]:

$$T_M(x, y) = \min\{x, y\}, \quad (1)$$

$$T_P(x, y) = x \cdot y, \quad (2)$$

$$T_L(x, y) = \max\{0, x + y - 1\}, \quad (3)$$

**Definição 2 (Implicação Nebulosa)** Um operador  $I: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  decrescente no primeiro argumento e crescente no segundo argumento é chamado

implicação nebulosa se  $I$  estende a implicação clássica usual em  $\{0,1\} \times \{0,1\}$ , i.e.,  $I(0,0)=I(0,1)=I(1,1)=1$  e  $I(1,0)=0$ .

**Exemplo 2 (Implicações de Gödel, Goguen, e Lukasiewicz)** Exemplos de implicações nebulosas foram introduzidos por Gödel, Goguen e Lukasiewicz, e são dadas pelas seguintes equações, respectivamente [27].

$$I_M(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ y, & x > y, \end{cases} \quad (4)$$

$$I_P(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ \frac{y}{x}, & x > y, \end{cases} \quad (5)$$

$$I_L(x, y) = \min\{1, y - x + 1\}. \quad (6)$$

Uma t-norma pode estar relacionada com uma implicação nebulosa por meio de uma relação de adjunção [27]. Diz-se que uma t-norma  $T$  e uma implicação nebulosa  $I$  formam uma adjunção se, e somente se, a seguinte relação valer para  $x, y, z \in [0,1]$ :

$$T(x, y) \leq z \Leftrightarrow x \leq I(y, z). \quad (7)$$

Nesse caso,  $T$  e  $I$  são ditos operadores adjuntos. Os pares  $(I_M, T_M)$ ,  $(I_P, T_P)$  e  $(I_L, T_L)$  são exemplos de adjunção.

É importante observar que, para toda implicação nebulosa  $I$ , existe no máximo uma t-norma  $T$  tal que  $I$  e  $T$  formam uma adjunção, e vice-versa. Se o par  $(I, T)$  formar uma adjunção, então

$$I(x, y) = \sup\{z \in [0,1] : T(z, x) \leq y\}, \quad (8)$$

para todo  $x, y \in [0,1]$ . A implicação  $I$  que satisfaz (8) é referida como a R-implicação associada a t-norma  $T$  [25, 26]. Em particular, uma R-implicação sempre está bem definida se a t-norma em (8) for contínua. Em outras palavras, dada uma t-norma contínua, obtém-se a implicação adjunta através de (8).

## 2.2 Redes neurais nebulosas

Uma rede neural artificial (Artificial Neural Network, ANN), ou simplesmente rede neural, é um modelo matemático inspirado nas redes de neurônios do sistema nervoso central (humano ou animal) por sua grande capacidade de adquirir, armazenar e recordar conhecimento para realizar uma determinada tarefa [1, 4, 21]. Os elementos básicos de uma rede neural são chamados de nós, ou neurônios artificiais.

Uma rede neural nebulosa (Fuzzy Neural Network, FNN), ou simplesmente rede nebulosa, é uma rede neural cujos padrões de entrada, padrões de saída e/ou conexões sinápticas representam conjuntos nebulosos [8, 29]. O elemento básico do processamento de uma rede nebulosa é referido como neurônio nebuloso.

A próxima subseção apresenta um dos principais modelos de neurônio nebuloso. Para facilitar a apresentação, emprega-se a seguinte notação: O símbolo  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$  corresponde ao vetor com as entradas nebulosas e  $y$  denota a saída nebulosa do neurônio. O peso sináptico  $w_i \in [0, 1]$  será agrupado em um vetor  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]^T$ . A letra grega  $\theta$  será usada para representar o limiar.

## 2.3 Neurônios max- $T$ e as IFAMs

Um neurônio max- $T$  é definido da seguinte forma:

$$y = \max \{T(w_1, x_1), T(w_2, x_2), \dots, T(w_n, x_n), \theta\}, \quad (9)$$

onde  $T$  é uma t-norma. Diferentes t-normas geram diferentes neurônios max- $T$ . A diferenciação dos tipos de neurônio max- $T$  se dá pelo uso de um subíndice na letra  $T$ .

Os neurônios max- $T$  são empregados em diversos modelos de memórias associativas nebulosas. As GFAMs de Chung e Lee [19], bem como as IFAMs introduzidas por Sussner e Valle [18], são modelos baseadas nos neurônios max- $T$ .

Um neurônio max- $T$  pode ser expresso em termos de um produto matricial [22]. Precisamente, sejam  $A \in [0, 1]^{m \times k}$  e  $B \in [0, 1]^{k \times n}$  matrizes nebulosas, o produto max- $T$  de  $A$  por  $B$ , denotado por  $C = A \circ B$ , é definido através da seguinte equação para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ :

$$c_{ij} = \max_{l=1:k} \{T(a_{il}, b_{lj})\}. \quad (10)$$

Assim, um neurônio max- $T$  também pode ser descrito pela equação

$$y = \max \{\mathbf{w}^T \circ \mathbf{x}, \theta\}, \quad (11)$$

onde  $\mathbf{w}^T$  representa a transposta do vetor  $\mathbf{w}$ .

Um modelo de memória associativa descrito por uma rede neural nebulosa progressiva de camada única com neurônios max- $T$  é chamada memória associativa nebulosa max- $T$ , ou simplesmente, FAM max- $T$  (Fuzzy Associative Memory, FAM). Matematicamente, uma FAM max- $T$  com  $m$  neurônios é descrita pela equação.

$$\mathbf{y} = \max (W \circ \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}), \quad (12)$$

onde  $\max(\cdot, \cdot)$  denota o máximo componente-a-componente de vetores,  $\mathbf{x} \in [0,1]^n$  é o padrão de entrada,  $W \in [0,1]^{m \times n}$  é a matriz dos pesos sinápticos,  $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^m$  é o vetor limiar e  $\mathbf{y} \in [0,1]^m$  é a resposta da FAM.

A GFAM de Chung e Lee e as IFAMs são exemplos de FAMs max- $T$ . A diferença entre as FAMs max- $T$  está na forma como a matriz dos pesos sinápticos e o vetor limiar são determinados. Por exemplo, a matriz dos pesos sinápticos  $W$  de uma GFAM é determinada usando o armazenamento por correlação e o vetor limiar  $\boldsymbol{\theta}$  é definido como sendo o vetor de zeros [19]. Em contraste, uma IFAM é uma FAM max- $T$  onde a matriz dos pesos sinápticos e vetor de limiar são determinados pelo armazenamento nebuloso implicativo discutido na próxima seção. É importante observar, entretanto, que os neurônios de uma IFAM são baseados em uma t-norma contínua [18, 22].

## 2.4 Aprendizado nebuloso implicativo

O postulado de Hebb afirma que a variação de uma conexão sináptica depende de ambas ativações pré-sináptica (entrada) e pós-sináptica (saída)[13]. Em [4], Haykin apresenta a seguinte formulação matemática para o postulado

de Hebb: O valor do peso sináptico  $w_{ij}$ , com ativação pré-sináptica  $x_j$  e ativação pós-sináptica  $y_i$ , é dado pela seguinte equação após o processo de armazenamento

$$w_{ij} = F(x_j, y_i) \text{ para todo } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n. \quad (13)$$

onde  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in [0,1]^n$ ,  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^T \in [0,1]^m$  e  $F$  é uma função de dois argumentos.

O armazenamento nebuloso implicativo considera uma implicação nebulosa  $I$  como função das ativações pré e pós-sinápticas. Se  $x_j$  é a entrada e  $y_i$  é a saída, então a conexão sináptica  $w_{ij}$  é dada pela equação

$$w_{ij} = I(x_j, y_i). \quad (14)$$

O armazenamento nebuloso implicativo pode ser interpretado do seguinte modo. A variação de um peso sináptico é o grau de veracidade da afirmação: “Se estímulo, então resposta”.

Para determinar a matriz dos pesos sinápticos de uma IFAM capaz de armazenar um par  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in [0,1]^n \times [0,1]^m$  deve-se aplicar (14) para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ . O limiar  $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^n$  é determinado através de (14), lembrando que  $\theta_i$  pode ser interpretado como uma conexão sináptica  $w_{i0}$  conectada à uma entrada constante  $x_0 = 1$ . Consequentemente, tem-se  $\theta_i = w_{i0} = I(x_0, y_i) = I(1, y_i)$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ . Contudo, nas IFAMs são consideradas apenas implicações nebulosas  $I$  que formam uma adjunção com uma  $T$  norma e, nesse caso, pode-se mostrar que  $I(1, y) = y$  para todo  $y \in [0,1]$ . Assim, os coeficientes do vetor limiar  $\boldsymbol{\theta}$  satisfazem a equação  $\theta_i = y_i$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Na grande maioria dos problemas, entretanto, a matriz de pesos sinápticos  $W \in [0,1]^{m \times n}$  e o vetor  $\boldsymbol{\theta} \in [0,1]^m$  devem ser tais que os pares  $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$  e  $(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2)$  e ... e  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$  sejam todos armazenados numa IFAM descrita por (12). Lembrando que a conjunção lógica “e” pode ser descrita, em particular, pela operação de mínimo, tem-se que  $W$  e  $\boldsymbol{\theta}$  são simplesmente o mínimo das matrizes dos pesos sinápticos e dos vetores limiar obtidos para cada par  $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$  através da equação (14). Em termos matemáticos, as entradas de  $W$  e  $\boldsymbol{\theta}$  são dadas pelas seguintes equações para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ :

$$w_{ij} = \min_{\xi=i:k} \{I(x_j^\xi, y_i^\xi)\} \quad \text{e} \quad \theta_i = \min_{\xi=1:k} \{y_i^\xi\}, \quad (15)$$

Alternativamente, a matriz dos pesos sinápticos  $W$  e o vetor  $\theta$  são determinados através das seguintes equações:

$$W = Y \triangleleft X^T \quad \text{e} \quad \theta = \min_{\xi=1:k} (\mathbf{y}_i^\xi), \quad (16)$$

onde  $X = [\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k] \in [0,1]^{n \times k}$  e  $Y = [\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k] \in [0,1]^{m \times k}$  representam as matrizes com os padrões  $\mathbf{x}^\xi$  e  $\mathbf{y}^\xi$  como coluna. A operação  $\min_{\xi=1:k} (\mathbf{y}^\xi)$  denota o mínimo componente-a-componente dos vetores  $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k$  e o símbolo " $\triangleleft$ " representa o produto matricial definido como segue: Sejam  $A \in [0,1]^{m \times k}$  e  $B \in [0,1]^{k \times n}$ , o produto min-I de  $A$  por  $B$ , denotado por  $E = A \triangleleft B$ , é definido em termos da seguinte equação para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ :

$$e_{ij} = \min_{l=1:k} \{I(b_{lj}, a_{il})\} \quad (17)$$

As IFAMs empregam a R-implicação  $I$  associada a t-norma contínua  $T$  do modelo neural. Lembre-se que uma R-implicação  $I$  forma uma adjunção com a t-norma  $T$  e pode ser obtida através de (8). A estratégia definida em (15) é chamada armazenamento nebuloso implicativo. Quando uma R-implicação é empregada em (16), tem-se um armazenamento nebuloso R-implicativo.

A matriz dos pesos sinápticos e o vetor limiar obtidos através do armazenamento nebuloso R-implicativo satisfazem o seguinte teorema [18, 22]:

**Teorema 1 (Teorema Principal do Aprendizado Nebuloso R-Implicativo)**

Considere um conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ . A matriz dos pesos sinápticos  $W$  e o vetor limiar  $\theta$  dados pelo armazenamento nebuloso R-implicativo são tais que  $[W, \theta]$  representa o supremo do conjunto

$$\{[A, \beta] \in [0,1]^{m \times (n+1)} : \max(A \circ_{\mathbf{x}^\xi} \beta) \leq \mathbf{y}^\xi, \forall \xi\}, \quad (18)$$

onde  $[W, \theta]$  (resp.  $[A, \beta]$ ) é a matriz  $m \times (n+1)$  obtida concatenando  $W \in [0,1]^{m \times n}$  e  $\theta \in [0,1]^m$  (resp.  $A$  e  $\beta$ ).

O seguinte corolário, que é uma consequência direta da propriedade do supremo do conjunto em (18), refere-se ao armazenamento de padrões numa IFAM.

**Corolário 1 (Otimidade do Aprendizado Nebuloso R-Implicativo)**

Dado um conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ . Se existe uma matriz de pesos sinápticos  $A$  e um vetor limiar  $\boldsymbol{\beta}$  tais que  $\mathbf{y}^\xi = \max(A \circ \mathbf{x}^\xi, \boldsymbol{\beta})$ , para todo  $\xi = 1, \dots, k$ , então valem as seguintes inequações

$$A \leq W = Y \circ X^T \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\beta} \leq \boldsymbol{\theta} = \min_{\xi=1:k} (\mathbf{y}^\xi). \quad (19)$$

Além disso, a seguinte equação vale para todo  $\xi = 1, \dots, k$ .

$$\mathbf{y}^\xi = \max(W \circ \mathbf{x}^\xi, \boldsymbol{\theta}). \quad (20)$$

Em termos gerais, o Corolário 1 diz que uma IFAM é a melhor FAM max- $T$  no seguinte sentido: Se existe uma max- $T$  FAM capaz de armazenar todos os pares  $(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi)$ , para  $\xi = 1, \dots, k$ , então a IFAM também consegue armazenar corretamente todos esses pares. Além disso, a matrizes dos pesos sináticos  $A$  e  $W$ , bem como os vetores limiar  $\boldsymbol{\beta}$  e  $\boldsymbol{\theta}$ , da max- $T$  FAM e da IFAM, respectivamente, satisfazem as inequações apresentadas em (19).

Finalmente, é importante lembrar que o modelo descrito pelas equações (11) e (15) com a t-norma e R-implicação de Lukasiewicz dadas em (3) e (6), respectivamente, é chamado IFAM de Lukasiewicz. A IFAM de Lukasiewicz apresentou resultados melhores que muitos outros modelos de AM, incluindo a FAM max-min de Kosko [14] e a memória associativa linear ótima (Optimal Linear Associative Memory, OLAM) de Kohonen [5], em experimentos usando imagens de faces do banco de dados da AT&T Laboratories, Cambridge [18]. Sobretudo, a IFAM de Lukasiewicz foi aplicada com sucesso em diversos problemas de previsão, onde apresentou resultados melhores que modelos estatísticos e algumas redes neurais artificiais [8, 18, 30, 31]. A IFAM de Lukasiewicz também está intimamente relacionada com as memórias associativas morfológicas em tons de cinza desenvolvidas por Sussner and Ritter [32, 33]. Em vista dessas observações, esse artigo considera apenas a IFAM de Lukasiewicz.

## 2.5 Memórias nebulosas implicativas autoassociativas

As IFAMs apresentam diversas propriedades interessantes no caso autoassociativo, no qual  $\mathbf{y}^\xi = \mathbf{x}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, k$ . De fato, suponha que o conjunto das memórias fundamentais é da forma  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{x}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ , com  $\mathbf{x}^\xi \in [0, 1]^n$  para  $\xi = 1, \dots, k$ , e seja  $X = [\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k] \in [0, 1]^{n \times k}$  a matriz cujas colunas são as memórias fundamentais. A matriz dos pesos sinápticos e o vetor limiar de uma IFAM autoassociativa são dados respectivamente pelas equações

$$W = X \circ X^T \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\theta} = \min_{\xi=1:k} (\mathbf{x}^\xi). \quad (21)$$

Após a apresentação de um padrão de entrada  $\mathbf{x} \in [0, 1]^n$ , a IFAM autoassociativa produz como saída o seguinte padrão:

$$\mathbf{y} = \mathcal{W}(\mathbf{x}) = \max(W \circ \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}). \quad (22)$$

É importante observar que o Corolário 1 continua válido no caso autoassociativo. Em outras palavras, se existem  $A \in [0, 1]^{n \times n}$  e  $\boldsymbol{\beta} \in [0, 1]^n$  tais que  $\max(A \circ \mathbf{x}^\xi, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{x}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, k$ , então  $W$  e  $\boldsymbol{\theta}$  dados por (21) também satisfazem  $\max(W \circ \mathbf{x}^\xi, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, k$ . Em particular, observe que a matriz identidade  $I \in [0, 1]^{n \times n}$  e o vetor de zeros  $\mathbf{0} = [0, \dots, 0]^T \in [0, 1]^n$  são tais que  $\max(I \circ \mathbf{x}^\xi, \mathbf{0}) = \mathbf{x}^\xi$  para qualquer padrão original  $\mathbf{x}^\xi$ . Portanto, a matriz dos pesos sinápticos  $W$  e o vetor  $\boldsymbol{\theta}$  dados em (21) são tais que  $\max(W \circ \mathbf{x}^\xi, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{x}^\xi$  para todo  $\xi = 1, \dots, k$ . Em outras palavras, vale o seguinte corolário para as IFAMs autoassociativas:

### Corolário 2 (Ótima Capacidade Absoluta de Armazenamento)

Para qualquer conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{y}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ , vale  $\mathbf{x}^\xi = \max(W \circ \mathbf{x}^\xi, \boldsymbol{\theta})$ , para todo  $\xi = 1, \dots, k$ .

Note que o Corolário 2 não impõe nenhuma restrição no conjunto das memórias fundamentais. Logo, podem-se armazenar quantos padrões foram desejados numa IFAM autoassociativa. Em outras palavras, essas memórias apresentam ótima capacidade absoluta de armazenamento. Lembre-se que

um modelo de memória autoassociativa  $\mathcal{M}$  exibe ótima capacidade absoluta de armazenamento se, para qualquer conjunto de memórias fundamentais  $\{(\mathbf{x}^\xi, \mathbf{x}^\xi) : \xi = 1, \dots, k\}$ , tem-se  $\mathcal{M}(\mathbf{x}^\xi) = \mathbf{x}^\xi$ , para todo  $\xi = 1, \dots, k$ . O Corolário 2, entretanto, não fornece nenhuma informação sobre a tolerância a ruído das IFAMs autoassociativas. De fato, a tolerância a ruído desses modelos geralmente decresce com o número  $k$  de padrões no conjunto das memórias fundamentais [18].

O seguinte teorema estabelece uma relação entre a saída de uma IFAM autoassociativa e os pontos fixos da matriz dos pesos sinápticos  $W$  [8, 18, 34]. Precisamente, lembre-se que  $\mathbf{z} \in [0,1]^n$  é um ponto fixo de  $W \in [0,1]^{n \times n}$  se, e somente se,  $W \circ \mathbf{z} = \mathbf{z}$ . O conjunto de todos os pontos fixos de  $W$  será denotado por  $F$ , ou seja,  $F = \{\mathbf{z} \in [0,1]^n : W \circ \mathbf{z} = \mathbf{z}\}$ .

**Teorema 2** Dado um vetor  $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ , o padrão  $\mathcal{W}(\mathbf{x}) = \max(W \circ \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$  recordado por uma IFAM autoassociativa é o menor ponto fixo  $\mathbf{z}$  de  $W$  tal que  $\mathbf{z} \geq \mathbf{x}$  e  $\mathbf{z} \geq \boldsymbol{\theta}$ . Em termos matemáticos, tem-se

$$\mathcal{W}(\mathbf{x}) = \inf\{\mathbf{z} \in F : \mathbf{z} \geq \max(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})\}. \quad (23)$$

O Teorema 2 mostra que as IFAMs autoassociativas exibem convergência numa única iteração se forem empregadas recursivamente como a rede de Hopfield e outros modelos de memórias associativas [3, 4, 12]. Em outras palavras, a sequência definida como  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathcal{W}(\mathbf{x}^{(k)})$ , para  $k = 0, 1, \dots$ , converge com uma única iteração, pois  $\mathbf{x}^{(1)}$  é sempre um ponto fixo da IFAM autoassociativa.

O Teorema 2 também fornece informações sobre a tolerância a ruído das IFAMs autoassociativas. Por exemplo, esse teorema garante que uma IFAM autoassociativa recordará um padrão original  $\mathbf{x}^\xi$  somente se a entrada  $\mathbf{x}$  for menor que  $\mathbf{x}^\xi$ . Em outras palavras, IFAMs autoassociativas são indicadas para a reconstrução de padrões corrompidos com ruído negativo, mas não são eficientes para remover ruídos aditivos. Outras informações sobre a tolerância a ruído das IFAMs autoassociativas podem ser obtidas investigando o conjunto  $F$ . Uma caracterização completa do conjunto dos pontos fixos de uma classe geral de memórias associativas nebulosas pode ser encontrado em [35].

### 3 Técnicas para a reconstrução de imagens

Essa seção apresenta quatro técnicas para a reconstrução de imagens em tons de cinza corrompidas com ruído impulsivo do tipo pimenta, que é um exemplo de ruído negativo. O ruído pimenta surge, por exemplo, em falhas no dispositivo de captura da imagem ou perda de informação num canal de transmissão [36, 38].

#### 3.1 Técnicas baseadas nas IFAMs autoassociativas

Três técnicas diferentes baseadas nas IFAMs autoassociativas são apresentadas nesta subseção. Para facilitar a exposição, seja  $X \in [0,1]^{m \times n}$  uma imagem em tons de cinza com  $m \times n$  elementos. Uma versão corrompida da imagem  $X$  será denotada por  $\tilde{X} \in [0,1]^{m \times n}$  e a letra  $Y$  será usada para representar a imagem recuperada por uma certa técnica de reconstrução. Em termos matriciais, tem-se  $X = [\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n]$ ,  $\tilde{X} = [\tilde{\mathbf{x}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^n]$  e  $Y = [\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n]$ , onde  $\mathbf{x}^\xi, \tilde{\mathbf{x}}^\xi$  e  $\mathbf{y}^\xi$ , para  $\xi = 1, \dots, n$ , são os vetores em  $[0,1]^m$  que correspondem à  $\xi$ -ésima coluna das matrizes  $X$ ,  $\tilde{X}$  e  $Y$ , respectivamente.

##### 3.1.1 Técnica 1 - Armazenamento íntegro

Nessa técnica, o conjunto  $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n\}$  formado por todas as colunas da imagem original é armazenado numa IFAM autoassociativa. A matriz dos pesos sinápticos  $W$  e o vetor  $\theta$  da IFAM autoassociativa são obtidos através das equações

$$W = X \cdot X^T \quad \text{e} \quad \theta = \min_{\xi=1:n} (\mathbf{x}^\xi). \quad (24)$$

Posteriormente, dada uma imagem corrompida  $\tilde{X} = [\tilde{\mathbf{x}}^1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}^n]$ , a imagem restaurada  $Y = [\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n]$  é obtida organizando, numa matriz, os vetores recordados pela IFAM autoassociativa quando as colunas  $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$  são apresentadas como entrada da memória. Matematicamente, define-se  $\mathbf{y}^\xi$  como segue para  $\xi = 1, \dots, n$ :

$$\mathbf{y}^\xi = \max(W \circ \tilde{\mathbf{x}}^\xi, \theta). \quad (25)$$

Em termos computacionais, esse modelo requer o armazenamento da matriz de pesos sinápticos  $W$  de dimensão  $m \times m$  e do vetor  $\theta$  de dimensão  $m$ . A matriz

dos pesos sinápticos  $W$  e o vetor  $\theta$  podem ser computados efetuando da ordem de  $nm^2$  operações ou avaliações.

Note que, como as IFAMs autoassociativas apresentam ótima capacidade absoluta de armazenamento, essa técnica sempre recupera a imagem original se uma imagem sem ruído for apresentada como entrada. Na prática, entretanto, essa técnica não é muito eficiente, pois a tolerância a ruído de uma IFAM autoassociativa decresce consideravelmente quando muitos padrões são armazenados na memória [18]. De fato, essa técnica não se mostrou muito eficiente para a reconstrução de imagens corrompidas com ruído do tipo pimenta, como será mostrado na Seção 4.

### 3.1.2 Técnica 2 - Armazenamento isolado

Como a tolerância a ruído decresce se muitos padrões forem armazenados numa IFAM autoassociativa, a técnica chamada armazenamento isolado está baseada em modelos de memórias que armazenam um único padrão. Precisamente, nessa técnica, constroem-se  $n$  IFAMs autoassociativas nas quais cada memória armazena uma única coluna da imagem original. Por simplicidade, considera-se o vetor de zeros como o vetor limiar dessas IFAMs. Em termos matemáticos, define-se

$$W^\xi = (\mathbf{x}^\xi \mathbf{x}^{\xi T}) \quad \text{e} \quad \theta^\xi = \mathbf{0} \quad (26)$$

para todo  $\xi = 1, \dots, n$ . Dada uma imagem ruidosa  $\tilde{X}$ , a imagem restaurada  $Y$  é obtida através da seguinte equação para  $\xi = 1, \dots, n$ :

$$\mathbf{y}^\xi = \max(W^\xi \circ \tilde{\mathbf{x}}^\xi, \theta^\xi) = W^\xi \circ \tilde{\mathbf{x}}^\xi. \quad (27)$$

Observe que essa técnica é computacionalmente mais cara que o armazenamento íntegro. De fato, ela requer o armazenamento de  $n$  matrizes de dimensão  $m \times m$ . Como  $\theta^\xi = \mathbf{0}$ , não é necessário armazenar esses vetores. Contudo, essa técnica também requer da ordem de  $nm^2$  operações ou avaliações para determinar as matrizes  $W^\xi$ .

### 3.1.3 Técnica 3 - Auto-recuperação

As duas técnicas discutidas anteriormente requerem que a imagem original seja apresentada à memória antes de esta ser aplicada para a reconstrução de uma imagem corrompida. Em muitos casos, entretanto, tem-se disponível apenas a imagem corrompida e, portanto, deve-se efetuar uma autorrecuperação da imagem  $\tilde{X}$ .

Uma autorrecuperação da imagem  $\tilde{X}$  pode ser efetuada como segue usando IFAMs autoassociativas: Suponha que  $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$  é a coluna de  $\tilde{X}$  que deve ser recuperada. Pode-se construir uma IFAM autoassociativa que armazena as três colunas anteriores e as três colunas posteriores à coluna  $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$ . Em termos matemáticos, define-se a matriz  $\tilde{W}^\xi$  e o vetor  $\tilde{\theta}^\xi$  como segue onde  $X^\xi = [\mathbf{x}^{\xi-3}, \mathbf{x}^{\xi-2}, \mathbf{x}^{\xi-1}, \mathbf{x}^{\xi+1}, \mathbf{x}^{\xi+2}, \mathbf{x}^{\xi+3}]$  é a matriz formada pelas colunas anteriores e posteriores à  $\mathbf{x}^\xi$ :

$$\tilde{W}^\xi = \tilde{X}^\xi \Leftarrow (\tilde{X}^\xi)^T \quad \text{e} \quad \tilde{\theta}^\xi = \min_{i=1:3}(\min(\tilde{\mathbf{x}}^{\xi-i}, \tilde{\mathbf{x}}^{\xi+i})). \quad (28)$$

Uma versão da imagem recuperada  $U = [\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^n]$  é obtida através da seguinte equação para  $\xi = 1, \dots, n$ :

$$\mathbf{u}^\xi = \max(\tilde{W}^\xi \circ \tilde{\mathbf{x}}^\xi, \tilde{\theta}^\xi). \quad (29)$$

Observe que a coluna  $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$  não pode ser armazenada na memória devido à ótima capacidade absoluta de armazenamento do modelo. De fato, tem-se  $\mathbf{u}^\xi = \tilde{\mathbf{x}}^\xi$  se o padrão  $\tilde{\mathbf{x}}^\xi$  for armazenado na memória.

Intuitivamente, a metodologia descrita anteriormente busca restaurar a imagem corrompida utilizando informações corretas nas colunas vizinhas de uma coluna corrompida da imagem  $\tilde{X}$ . De um modo análogo, pode-se desenvolver uma técnica que utiliza as informações corretas nas linhas vizinhas da linha que se deseja recuperar. Precisamente, se  $\tilde{\mathbf{x}}_\zeta$  é uma linha da imagem  $\tilde{X}$ , então define-se

$$\tilde{W}_\zeta = \tilde{X}_\zeta \Leftarrow (\tilde{X}_\zeta)^T \quad \text{e} \quad \tilde{\theta}_\zeta = \min_{i=1:3}(\min(\tilde{\mathbf{x}}_{\zeta-i}, \tilde{\mathbf{x}}_{\zeta+i})), \quad (30)$$

onde  $\tilde{X}_\zeta = [\tilde{\mathbf{x}}_{\zeta-3}^T, \tilde{\mathbf{x}}_{\zeta-2}^T, \tilde{\mathbf{x}}_{\zeta-1}^T, \tilde{\mathbf{x}}_{\zeta+1}^T, \tilde{\mathbf{x}}_{\zeta+2}^T, \tilde{\mathbf{x}}_{\zeta+3}^T]$  é a matriz formada pela transposta das linhas vizinhas acima e abaixo de  $\tilde{\mathbf{x}}_\zeta$ .

Uma versão da imagem recuperada  $V$ , cujas linhas são  $\mathbf{v}_1^T, \dots, \mathbf{v}_m^T$ , é obtida através da seguinte equação para  $\zeta = 1, \dots, m$ :

$$\mathbf{v}_\zeta^T = \max (\tilde{W}_\zeta \circ \tilde{\mathbf{x}}_\zeta^T, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_\zeta^T). \quad (31)$$

Uma imagem melhor pode ser obtida combinando ambas as técnicas de autorrecuperação baseadas em colunas e linhas. Em termos matemáticos, a imagem restaurada  $Y$  é definida como

$$Y = \min (U, V), \quad (32)$$

onde o mínimo é calculado elemento-a-elemento.

Finalmente, se os elementos corrompidos da imagem original estão associados a um rótulo  $f_{ij} \in \{0, 1\}$  tal que  $f_{ij} = 0$  se e somente se  $x_{ij} = \tilde{x}_{ij}$ , então pode-se substituir apenas os elementos danificados. Nesse caso, uma imagem restaurada  $Z$  melhor que  $Y$  será dada pela seguinte equação para todo  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ :

$$z_{ij} = \begin{cases} y_{ij} & \text{se } f_{ij}=1, \\ \tilde{x}_{ij} & \text{se } f_{ij}=0. \end{cases} \quad (33)$$

### 3.2 Técnica de correlação de longo alcance

A técnica de correlação de longo alcance (long-range correlation) foi introduzida por Zhang e Wang para a reconstrução de imagens corrompidas com ruído impulsivo [37] e está baseada nas seguintes considerações: Primeiro, nem todos os elementos da figura podem estar danificados ou ausentes, ou seja, a imagem deve conter elementos inalterados. Segundo, o método requer o conhecimento prévio dos elementos danificados ou ausentes. Em termos matemáticos, os elementos  $x_{ij}$  e  $\tilde{x}_{ij}$  da imagem original  $X$  e da imagem corrompida  $\tilde{X}$  estão associados a um rótulo  $f_{ij} \in \{0, 1\}$  tal que  $f_{ij} = 0$  se e somente se  $x_{ij} = \tilde{x}_{ij}$ . Em outras palavras, tem-se  $f_{ij} = 0$  se o elemento da imagem corrompida está correto e  $f_{ij} = 1$  se o elemento  $x_{ij}$  foi danificado ou está ausente. Evidentemente, a técnica de correlação de longo alcance irá corrigir somente os elementos cujo rótulo  $f_{ij} = 1$ .

Em outras palavras, a imagem restaurada  $Y$  será definida de modo que  $y_{ij} = \tilde{x}_{ij}$  se  $f_{ij} = 0$ . Se  $f_{ij} = 1$ , então os seguintes processos serão efetuados:

1. Selecionar: Primeiramente, escolhe-se uma janela local  $\mathbf{l}$  da imagem, centrada em um elemento danificado ou ausente. Por simplicidade, neste artigo, foram consideradas apenas janelas que formam um quadrado de dimensão  $N \times N$ . Entretanto, qualquer forma geométrica, cujos elementos estejam conectados continuamente, pode ser usada. Note que cada elemento  $l_{ij}$  da janela local está associado a um rótulo  $f_{ij}^l$ .

2. Procura: No segundo estágio, a imagem é vasculhada à procura de uma janela remota  $\mathbf{r}$ , centrada em um elemento bom, com o mesmo formato e o mesmo tamanho da janela local  $\mathbf{l}$ . Neste artigo, a janela remota também corresponde a um quadrado de dimensões  $N \times N$ . Novamente, cada elemento da janela remota  $r_{ij}$  está associado a um rótulo  $f_{ij}^r$ . Além disso, como  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{r}$  possuem o mesmo tamanho e formato, pode-se estabelecer uma correspondência que associa cada elemento  $l_{ij}$  de  $\mathbf{l}$  a um elemento  $r_{ij}$  de  $\mathbf{r}$ , e vice-versa. Para um melhor desempenho do método, restringe-se a área de busca para que a janela remota não se distancie muito da janela local. A procura pela área de busca geralmente fornece várias janelas remotas, porém somente uma é de interesse. Os procedimentos para a escolha da janela remota apropriada são descritos nos dois estágios a seguir.

3. Correspondente: No terceiro estágio, a janela remota  $\mathbf{r}$  é associada à janela local  $\mathbf{l}$ . O método de associação é determinado por uma função de transformação de iluminação  $v$  que transforma cada elemento  $r_{ij}$  de  $\mathbf{r}$  em  $v(r_{ij})$ . Existem diversas possibilidades de métodos de associação. O método sugerido por Zhang e Wang [37], e também adotado nesse artigo, consiste numa função polinomial de primeira ordem

$$v(z) = a_0 + a_1 z, \quad (34)$$

onde  $z$  denota um número real,  $a_0$  e  $a_1$  são os coeficientes polinomiais. O par de elementos correspondentes das duas janelas pode ser classificados em três categorias. A primeira é quando os elementos correspondentes em  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{l}$  são bons.

Na segunda categoria, o elemento de  $\mathbf{r}$  é bom, mas seu correspondente em  $\mathbf{l}$  é ruim. Na terceira categoria, o elemento de  $\mathbf{r}$  é ruim e seu correspondente em  $\mathbf{l}$  pode ser bom ou ruim. Os elementos da primeira categoria compõem a parte correspondente da janela. O número de elementos nessa categoria é

$$n_p = \sum_{i,j=1}^N (1 - f_{ij}^r)(1 - f_{ij}^l) \quad (35)$$

Apenas os elementos dessa categoria serão utilizados no procedimento de associação. O resultado da associação é avaliado pelo erro quadrático médio (EQM) da parte associada entre a janela  $\mathbf{r}$  transformada e a janela local  $\mathbf{l}$ , que é calculado através da equação

$$EQM_p = \frac{1}{n_p} \sum_{i,j=1}^N (1 - f_{ij}^r)(1 - f_{ij}^l)(l_{ij} - v(r_{ij}))^2 \quad (36)$$

Para um melhor resultado, procura-se o menor  $EQM_p$ , ou seja, os parâmetros na transformação de iluminação  $v$  são determinados de modo que  $EQM_p$  seja mínimo. Dessa forma, os coeficientes  $a_0$  e  $a_1$  do polinômio são determinados pelas seguintes equações onde  $\bar{f}_{ij}^r = 1 - f_{ij}^r$  e  $\bar{f}_{ij}^l = 1 - f_{ij}^l$ :

$$a_1 = \frac{n_p (\sum_{i,j=1}^N \bar{f}_{ij}^r \bar{f}_{ij}^l r_{ij} l_{ij}) - (\sum_{i,j=1}^N \bar{f}_{ij}^r \bar{f}_{ij}^l r_{ij}) (\sum_{i,j=1}^N \bar{f}_{ij}^r \bar{f}_{ij}^l l_{ij})}{n_p (\sum_{i,j=1}^N \bar{f}_{ij}^r \bar{f}_{ij}^l r_{ij}^2) - (\sum_{i,j=1}^N \bar{f}_{ij}^r \bar{f}_{ij}^l r_{ij})^2} \quad (37)$$

e

$$a_0 = \frac{1}{n_p} (\sum_{i,j=1}^N \bar{f}_{ij}^r \bar{f}_{ij}^l l_{ij} - a_1 [\sum_{i,j=1}^N \bar{f}_{ij}^r \bar{f}_{ij}^l r_{ij}]) \quad (38)$$

4. Competição: Neste estágio, todas as janelas remotas encontradas são comparadas à janela local. A janela remota com o menor  $EQM_p$  é escolhida como sendo a vencedora.

5. Recuperação: Finalmente, o elemento ruim, na janela local, é substituído pelo elemento bom transformado correspondente, na janela remota. Precisamente, se  $\mathbf{r}$  é a janela remota vencedora e  $v$  é a função de transformação de iluminação obtida através de (34), então o elemento restaurado é definido como  $y_{ij} = v(r_{ij})$  se  $f_{ij}^l = 1$ .

#### 4 Experimentos computacionais

As técnicas descritas na seção anterior foram comparadas usando as imagens “Lena”, “Mandrill” e “Fotógrafo”, de dimensão  $256 \times 256$ , apresentadas na primeira linha da figura 1. Essas imagens podem ser obtidas na página eletrônica do Grupo de Visão Computacional da Universidade de Granada<sup>1</sup>. A segunda linha da figura 1 apresenta o histograma normalizado das imagens “Lena”, “Mandrill” e “Fotógrafo”. Observe que a “Lena” é a imagem que possui uma melhor distribuição dos valores dos elementos, enquanto que a imagem “Mandrill” é a mais rica em detalhes.

As três imagens originais foram corrompidas com ruído do tipo pimenta com diferentes intensidades. A figura 2 apresenta a imagem “Lena” corrompida com ruído do tipo pimenta com probabilidade 5% e as imagens restauradas pelas técnicas apresentadas na seção anterior. Analogamente, as figuras 3 e 4 apresentam as imagens “Mandrill” e “Fotógrafo” corrompidas com o mesmo tipo de ruído mas com probabilidades 20% e 45%, respectivamente. Nesses experimentos, foram utilizadas janelas locais e remota de dimensão  $5 \times 5$ . Observe nas figuras 2, 3 e 4 que a técnica baseada nas IFAMs autoassociativas com o armazenamento isolado apresentou os melhores resultados visuais.

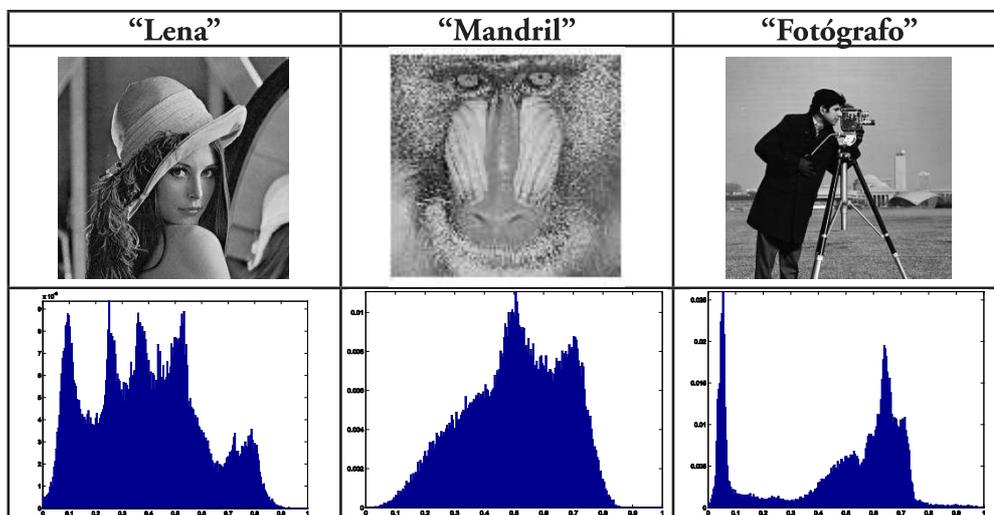


Figura 1. Imagens originais de dimensão  $256 \times 256$  usadas nos experimentos computacionais e seus respectivos histogramas

<sup>1</sup> <http://decsai.ugr.es/cvg/wellcome.html>.



Figura 2. Comparação das técnicas aplicadas na imagem “Lena” corrompida com ruído do tipo pimenta com probabilidade 5%

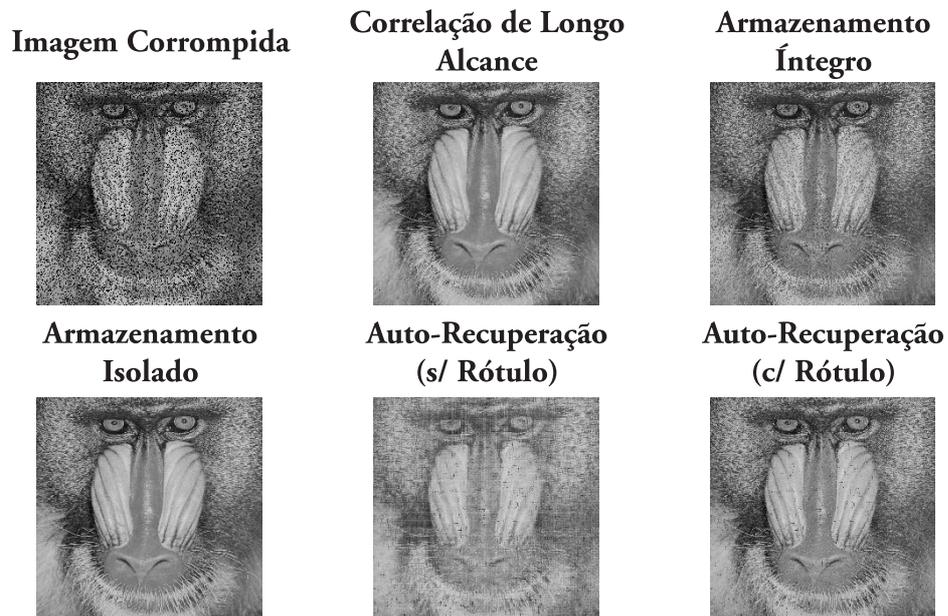


Figura 3. Comparação das técnicas aplicadas na imagem “Mandrill” corrompida com ruído do tipo pimenta com probabilidade 20%



Figura 4. Comparação das técnicas aplicadas na imagem “Fotógrafo” corrompida com ruído do tipo pimenta com probabilidade 45%

Para uma comparação melhor, foram introduzidos ruídos com probabilidades variando de 1% à 50% em cada uma das três imagens originais. O desempenho de cada técnica foi então avaliado utilizando o *Peak Signal-to-Noise Ratio* (PSNR) que é definido através da equação

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{B^2}{\frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - y_{ij})^2} \right), \quad (39)$$

onde  $B$  é o maior valor que um elemento pode assumir,  $x_{ij}$  representa um elemento da imagem original,  $y_{ij}$  representa um elemento da imagem recuperada,  $m$  e  $n$  são os números de linhas e colunas das imagens.

As figuras 5, 6 e 7 apresentam a média do PSNR, calculada em 10 simulações para cada nível de ruído do tipo pimenta, produzido pelas técnicas apresentadas na seção anterior. Para fins de comparação, essas figuras também apresentam a média do PSNR da imagem corrompida.

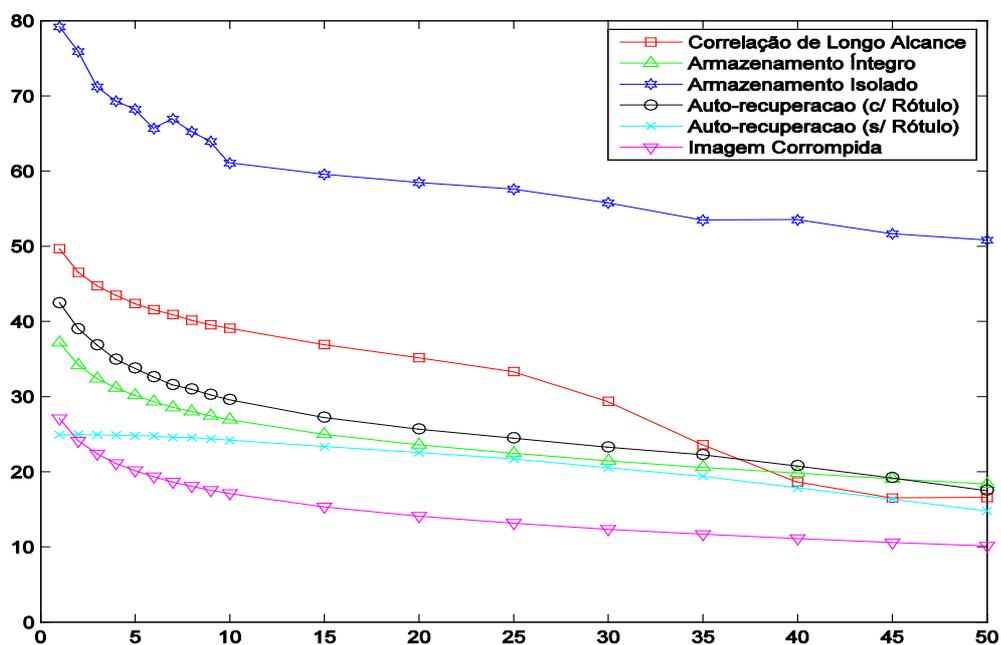


Figura 5. Gráfico da média do PSNR produzido pelas técnicas aplicadas na imagem "Lena"

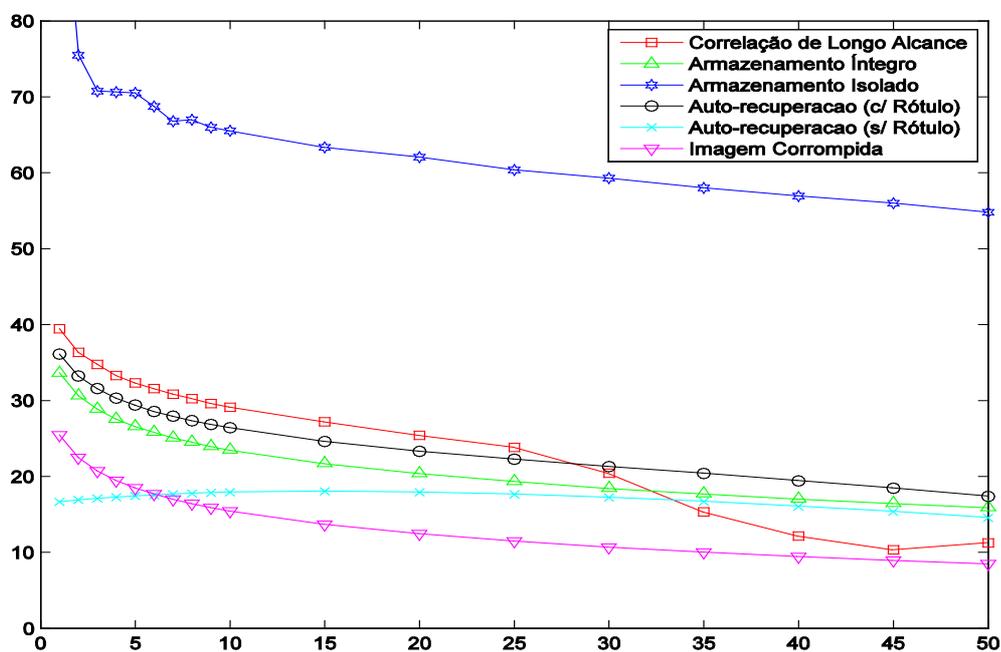


Figura 6. Gráfico da média do PSNR produzido pelas técnicas aplicadas na imagem "Mandrill"

Observe, nas figuras 5, 6 e 7, que a técnica baseada nas IFAMs autoassociativas com armazenamento isolado apresentou os maiores valores de PSNR. A correlação de longo alcance apresentou um PSNR baixo para imagens corrompidas com muito ruído, por exemplo, com probabilidade maior que 40%. Ainda assim, as figuras 2, 3 e 4 mostram que essa técnica produz imagens visualmente boas em comparação com as técnicas baseadas no armazenamento íntegro e a autorrecuperação.

Além do PSNR, deve-se também considerar o tempo de execução da técnica para a reconstrução de uma imagem corrompida. Nesse quesito, as técnicas baseadas em IFAMs autoassociativas foram muito mais rápidas que a correlação de longo alcance. Precisamente, os modelos mais rápidos foram as técnicas com armazenamento íntegro, armazenamento isolado e autorrecuperação. A correlação de longo alcance é a técnica mais lenta pois efetua, para cada elemento danificado da imagem, uma busca pela melhor janela remota. Conseqüentemente, quanto maior o nível de ruído, maior o tempo de execução.

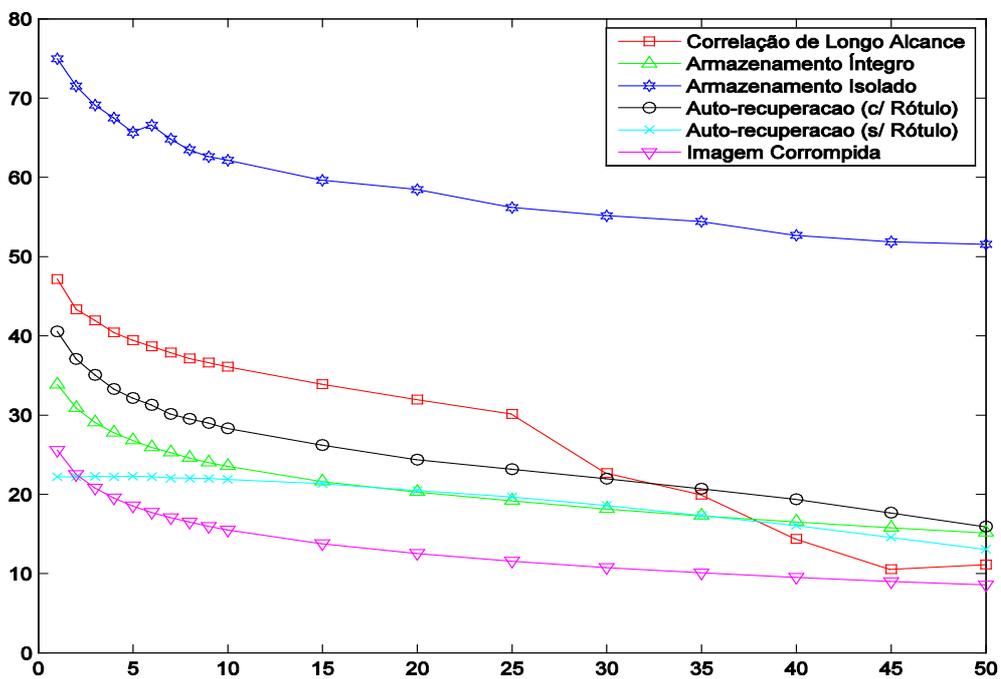


Figura 7. Gráfico da média do PSNR produzido pelas técnicas aplicadas na imagem “Fotógrafo”

Em contraste, o tempo de execução das técnicas baseadas nas IFAMs autoassociativas não dependem do nível de ruído.

## **5 Conclusões**

Esse trabalho apresenta quatro técnicas distintas para a recuperação de imagens em tons de cinza. Cada técnica possui aspectos positivos e negativos que serão discutidos abaixo.

A correlação de longo alcance é um método eficaz para a recuperação de imagens. Uma desvantagem é a necessidade dos rótulos que indicam os elementos corrompidos. Outra desvantagem dessa técnica é o tempo de processamento. De fato, o método se mostra lento para níveis razoáveis de ruído e isso pode limitar as aplicações desse método.

A técnica baseada em IFAMs autoassociativas com armazenamento íntegro e isolado são os modelos mais eficientes em termos computacionais. Além disso, o segundo produziu excelentes PSNRs. Contudo, a imagem original deve ser memorizada pela IFAM autoassociativa antes de a técnica ser aplicada para recuperação de uma imagem corrompida. Portanto, essas técnicas não podem ser aplicadas se possuímos apenas a imagem corrompida. Ainda assim, essas técnicas podem ser usadas, por exemplo, para o reconhecimento facial ou digital.

A técnica baseada em IFAMs autoassociativas com autorrecuperação é a única que não necessita de nenhuma informação da imagem original, ou seja, essa técnica utiliza somente a imagem que queremos restaurar. Todavia, essa técnica se mostrou a menos eficiente para a remoção de ruído. De fato, os experimentos computacionais mostraram que essa técnica retorna uma imagem visualmente degradada mesmo quando corrompida com pouco ruído (cf. Figura 2). Por outro lado, a técnica pode ser melhorada usando rótulos que indicam os elementos corrompidos. Nesse caso, essa técnica é competitiva com a correlação de longo alcance, embora muito mais rápida.

## 6 Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio da Fundação Araucária de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Paraná e do Programa de Iniciação Científica (PROIC) da Universidade Estadual de Londrina.

## 7 Referências

- [1] ANDERSON, J. *An Introduction to Neural Networks*. MIT Press, MA, 1995.
- [2] AUSTIN, J. Associative memory. In *Handbook of Neural Computation*, E. Fiesler and R. Beale, Eds. Oxford University Press, p. F1.4:1--F1.4:7, 1997.
- [3] HASSOUN, M. H., Ed. *Associative Neural Memories: Theory and Implementation*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1993.
- [4] HAYKIN, S. *Neural Networks: A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999.
- [5] KOHONEN, T. *Self-organization and associative memory*, 3rd edition ed. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1989.
- [6] HOPFIELD, J.; TANK, D. Neural computation of decisions in optimization problems. *Biol Cybern* v. 52, p. 141-152, 1985.
- [7] SUSSNER, P.; MIYASAKI, R.; VALLE, M. E. An introduction to parameterized IFAM models with applications in prediction. In *Proceedings of the 2009 IFSA World Congress and 2009 EUSFLAT Conference* (Lisbon, Portugal, July 2009), p. 247-252, 2009.
- [8] SUSSNER, P.; VALLE, M. E. Fuzzy associative memories and their relationship to mathematical morphology. In *Handbook of Granular Computing*, W. Pedrycz, A. Skowron, and V. Kreinovich, Eds. John Wiley and Sons, Inc., New York, ch. 33, p. 733-754, 2008.
- [9] TEDDY, S. D.; QUEK, C.; AND E. M.-K. LAI. PSECMAC: A novel self-organizing multiresolution associative memory architecture. *IEEE T Neural Networ* v. 19, n.4, p. 689-712, 2008.

- [10] ZHANG, B.-L.; ZHANG, H.; GE, S. S. Face recognition by applying wavelet subband representation and kernel associative memory. *IEEE T Neural Networ* v. 15, n. 1 p. 166-177, 2004.
- [11] ZHANG, D.; ZUO, W. Computational intelligence-based biometric technologies. *IEEE Comput Intell M* v.2, n. 2, p. 26-36, 2007.
- [12] HOPFIELD, J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *P Natl Acad Sci* 79, p. 2554-2558, 1982.
- [13] HEBB, D. *The Organization of Behavior*. John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [14] KOSKO, B. *Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [15] KONG, S.-G.; KOSKO, B. Adaptive fuzzy systems for backing up a truck-and-trailer. *IEEE T Neural Networ* v.3, n. 2, p. 211-223, 1992.
- [16] KOSKO, B. Proceedings of the 2nd joint technology workshop on neural networks and fuzzy logic. v. 1, p. 3-58.
- [17] KOSKO, B. Fuzzy associative memory system. In *Fuzzy expert systems*, A. Kandel, Ed. CRC Press, Boca Raton, ch. 10, p. 135-162, 1991.
- [18] SUSSNER, P.; VALLE, M. E. Implicative fuzzy associative memories. *IEEE T Fuzzy Syst.* v. 14, n. 6, p. 793-807, 2006.
- [19] CHUNG, F.; LEE, T. On fuzzy associative memory with multiple-rule storage capacity. *IEEE T Fuzzy Syst.* v. 4, n. 3, p. 375-384, 1996.
- [20] SUSSNER, P.; VALLE, M. E. Grayscale morphological associative memories. *IEEE T Neural Networ* v. 17, n. 3, p. 559-570, 2006.
- [21] HASSOUN, M. H. *Fundamentals of Artificial Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995.
- [22] VALLE, M. E. *Fundamentos e Aplicações de Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, Brasil, Fevereiro 2007.

- [23] BARROS, L.; BASSANEZI, R. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Editora do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC-Unicamp), Campinas, 2006.
- [24] KLIR, G. J.; YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NY, 1995.
- [25] NGUYEN, H. T.; WALKER, E. A. *A First Course in Fuzzy Logic*, 2 ed. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.
- [26] PEDRYCZ, W.; GOMIDE, F. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. Wiley-IEEE Press, New York, 2007.
- [27] DENG, T.; HEIJMANS, H. Grey-scale morphology based on fuzzy logic. *J Math Imaging Vis* n.16, v. 2, p. 155-171, 2002.
- [28] BUCKLEY, J. J.; HAYASHI, Y. Fuzzy neural networks: A survey. *Fuzzy Set Syst.* v. 66, p. 1-13, 1994.
- [29] FULLER, R. *Introduction to Neuro-Fuzzy Systems*. Springer-Verlag New York, Mar. 2000.
- [30] SUSSNER, P.; VALLE, M. E. Morphological and certain fuzzy morphological associative memories for classification and prediction. In *Computational Intelligence Based on Lattice Theory*, V. Kambhampati and G. Ritter, Eds. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, ch. 8, p. 149-172, 2007.
- [31] SUSSNER, P.; VALLE, M. E. Recall of patterns using morphological and certain fuzzy morphological associative memories. In *Proceedings of the IEEE World Conference on Computational Intelligence 2006* (Vancouver, Canada, 2006), p. 209-216, 2006.
- [32] RITTER, G. X.; SUSSNER, P. An introduction to morphological neural networks. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition* (Vienna, Austria, 1996), p. 709-717, 1996.
- [33] RITTER, G. X.; SUSSNER, P.; DE LEON, J. L. D. Morphological associative memories. *IEEE T Neural Networ* v. 9, n. 2, p. 281-293, 1998.
- [34] VALLE, M. E.; SUSSNER, P. A general framework for fuzzy morphological associative memories. *Fuzzy Set Syst.* v. 159, n. 7, p. 747-768, 2008.

- [35] VALLE, M. E.; SUSSNER, P. Storage and recall capabilities of fuzzy morphological associative memories with adjunction-based learning. *Neural Networks* (2010). Aceito para publicação.
- [36] WANG, Z.; ZHANG, D. Restoration of impulse noise corrupted images using long-range correlation. *IEEE Signal Proc Let* v. 5, n. 1, p. 4-7, 1998.
- [37] ZHANG, D.; WANG, Z. Image information restoration based on long-range correlation. *IEEE T Circ Syst Vid* v.12, n. 5, p. 331-341, 2002.