

ISSN 1518-0352

Revista Ciências Exatas e Naturais

Volume 19 - Número 1

Janeiro/Junho 2017

Universidade Estadual do Centro-Oeste - UNICENTRO
Rua Simeão Camargo Varela de Sá,3
85040-080 - Guarapuava,Paraná
Brasil

Revista Ciências Exatas e Naturais

Publicação do
Setor de Ciências Exatas e de Tecnologia - UNICENTRO Campus
CEDETEG

Rua Simeão Camargo Varela de Sá, 3
85040-080 - Guarapuava, Paraná
Brasil
Fone: (42)3629-8116
Fax: (42)3629-8100
E-mail: recen.unicentro@gmail.com

FICHA CATALOGRÁFICA (Catalogação na publicação - Biblioteca da UNICENTRO)

Revista Ciências Exatas e Naturais/Setor de
Ciências Exatas e de Tecnologia da Universidade Estadual do Centro-Oeste
-PR.-v.1,n.1 (1999) - Guarapuava: UNICENTRO, 2017-

Semestral

Até o n.1: Revista de Ciências Exatas e Naturais.
ISSN 1518-0352
1. Universidade Estadual do Centro-Oeste.
Setor de Ciências Exatas e de Tecnologia.

**Indexada no Latindex, Sumários.org e PKP Harvester
e-ISSN 2175-5620**

Nota: O conteúdo dos artigos desta revista é de exclusiva responsabilidade dos autores, não refletindo, necessariamente, a opinião dos editores.

Revista Ciências Exatas e Naturais

Reitor

Aldo Nelson Bona

Vice-Reitor

Osmar Ambrósio de Souza

Diretora da Editora UNICENTRO

Denise Gabriel Witzel

Diretora do Setor de Ciências Exatas e de Tecnologia

Karina Worm Beckmann

Publicação aprovada pelo Conselho Editorial da UNICENTRO

Revista Ciências Exatas e Naturais

Editores

Eduardo Vicentini
Gisane Aparecida Michelon
Karina Czaikoski

Márcio André Martins
Paulo Rogério Pinto Rodrigues
Sandro Rodrigues

Comissão Editorial

Adriane Beatriz de Souza Serapião
Adressa Galli
Antonio José da Costa Filho
Bogdan Demczuk Júnior
David Lira Ninez
Fábio Luiz Malquiádes
Giuliano Gadioli La Guardia
Inali Wisniewski Soares
Jesuí Vergílio Visentainer
Karine Feverzani Magnano
Lucimar Maria Fossatti
Luiz Fernando Cótica

Márcio André Martins
Marcio Augusto Villela Pinto
Marcos Eduardo Valle
Marcos Lúcio Corazza
Mauro de Paula Moreira
Mauro Henrique Mulati
Michele Cristiane Mesomo
Oleg Katchatourian
Ricardo Coêlho Silva
Romildo Martins Sampaio
Sílvia Amélia Bim
Valtencir Zucolotto

Edição

Editora UNICENTRO

Impressão

Gráfica da UNICENTRO

Diagramação

Thiago Kfourir De Angelis

Capa

Fernanda Pacheco de Moraes

Editorial

Visando disponibilizar gratuitamente o conhecimento científico ao público e proporcionar maior democratização mundial do conhecimento, eis que apresentamos o primeiro volume do ano de 2017 da Revista Ciências Exatas e Naturais. Este volume foi elaborado com grande empenho e satisfação da equipe de editores da revista, sempre visando contribuir com o cenário atual de desenvolvimento científico e tecnológico de diversas áreas dentro da Ciência e Tecnologia de Alimentos, Ciência da Computação e Informática, Engenharias, Física, Matemática, Química e Educação.

Conforme o significado genuíno da palavra, pesquisa é o conjunto de atividades que têm por finalidade a descoberta de novos conhecimentos do domínio científico. Dessa forma, de nada vale uma pesquisa sem disseminação para a comunidade científica, bem como para o desenvolvimento do interesse social. Além disso, levando em consideração que a crise econômica que afeta nosso país tem afetado diretamente pesquisas e projetos de inovação é importantíssimo valorizar o trabalho árduo dos pesquisadores, sejam eles estudantes ou profissionais.

Nesse contexto, no Volume 19 - Número 1 da Revista Ciências Exatas e Naturais são apresentados 8 trabalhos dos mais variados temas com grande valia para a comunidade científica, o que mostra o comprometimento e trabalho do Conselho Editorial e Editores com o desenvolvimento científico e social.

Karina Czaikoski
Editora da Revista

Sumário

Derivações sobre Anéis Polinomiais e os Polinômios de Darboux	8
<i>Wálmisson Régis de Almeida</i>	
<i>Marcelo Oliveira Veloso</i>	
Esquema de Diferenças Finitas de Alta Ordem para Resolver a Equação de Reação Subdifusão Bidimensional	28
<i>Aurelio José Parreira</i>	
<i>Marcelle Flavia Carvalho</i>	
<i>Rolfgan Canavez Raposo</i>	
A função φ de Euler e a Expansão Periódica de Frações na Base b	38
<i>Martinho da Costa Araujo</i>	
<i>Marcionei Rech</i>	
Viabilidade Mecânica da Substituição de Areia por Vidro Moído no Concreto	46
<i>Fernando Ernesto Ucker</i>	
<i>Felipe Corrêa Veloso dos Santos</i>	
Uma Visão Geral Sobre <i>Antifeedants</i> em Insetos	56
<i>Edjane Vieira Pires</i>	
<i>Cenira Monteiro de Carvalho</i>	
Validação de método espectrofotométrico para detecção de compostos fenólicos de <i>Spirulina sp.</i> LEB-18	68
<i>Anelise Christ-Ribeiro</i>	
<i>Pâmela Goularte</i>	
<i>Leonor Almeida de Souza-Soares</i>	
Existence and Approximation of Solutions to Dynamic Inclusions in Time Scales	80
<i>Iguer Luis Domini dos Santos</i>	
A Utilização de Equações Diferenciais Ordinárias na Determinação do Teor de Sólidos e Teor de Umidade de uma Composteira	98
<i>Camila Nicola Boeri Di Domenico</i>	
<i>Daniela da Silva</i>	
<i>João Henrique Alves Cerqueira</i>	
<i>Maiquiel Schmidt de Oliveira</i>	

Derivações sobre Anéis Polinomiais e os Polinômios de Darboux

Derivations on Polynomial Rings and the Darboux Polynomials

Wálmisson Régis de Almeida

UNIFEMM - Centro Universitário de Sete Lagoas, Sete Lagoas, MG
walmisson@unifemm.edu.br

Marcelo Oliveira Veloso

UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei, São João del-Rei, MG
veloso@ufsj.edu.br

Resumo: Este trabalho é um breve estudo sobre as derivações em anéis polinomiais e os polinômios de Darboux. Os dois resultados mais relevantes são a caracterização dos polinômios de Darboux lineares de qualquer derivação linear em n variáveis e o resultado de que toda derivação homogênea em duas variáveis tem polinômio de Darboux.

Palavras-chave: derivações; derivações homogêneas; polinômio de Darboux.

Abstract: This work is a brief study about derivations in polynomial rings and Darboux polynomials. The two most relevant results are the characterization of the linear Darboux polynomials of any linear derivation in n variables and the result that all homogeneous derivation in two variables have Darboux polynomial.

Key words: derivations; homogeneous derivation; Darboux polynomial.

1 Introdução

Ao ouvir a palavra derivação somos imediatamente remetidos às ideias de Newton e Leibniz relativas ao estudo de tangentes e taxas de variação instantânea de funções. Porém, o conceito de derivação abordado neste texto é mais amplo, uma extensão do operador derivação para qualquer estrutura de anel. Contudo, coincide com a derivada ordinária sobre o anel de polinômios em uma variável.

Em um trabalho sobre Equações Diferenciais, em 1878, no artigo “*Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré*”, o matemático Jean Gaston Darboux introduziu uma nova abordagem algorítmica para solução de algumas dessas ED's, na qual surgem os polinômios de Darboux. Esses polinômios apareceram como “pedaços” ou partes dos fatores integrantes para a solução de algumas ED's, como mostrado em [1]:

“Paralelamente, Darboux, em 1878, deu os primeiros passos para determinar algoritmicamente integrais primeiras, baseando o seu método em uma ligação entre a geometria algébrica e a busca dessas integrais. Ele mostrou como construir

as integrais primeiras de um campo vetorial polinomial que possui um número suficiente de curvas algébricas invariantes. Essas curvas são definidas por polinômios: os assim chamados polinômios de Darboux. Em geral, a tarefa mais complexa envolvendo os métodos darbourianos é a determinação dos próprios polinômios de Darboux.”

O principal objetivo desse trabalho é estudar as derivações polinomiais e os polinômios de Darboux, em especial as derivações homogêneas em duas variáveis e as lineares em várias variáveis. Além disso, servir como texto suplementar para estudantes que desejam dar os primeiros passos no estudo sobre derivações. As derivações de um anel estão relacionadas a vários problemas, como a Conjectura do Jacobiano e o Decimo Quarto Problema de Hilbert, em diversas áreas da Matemática, como Geometria Algébrica e Equações Diferenciais (veja [1], [2], [3] e [4]), o que justifica o nosso interesse pelo tema.

A referência principal deste texto é o livro de Andrzej Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, [4], onde encontram-se a maioria dos resultados aqui enunciados. Neste texto procuramos utilizar conceitos algébricos elementares, e apresentar diversos exemplos com o propósito de facilitar a assimilação do conteúdo pelo leitor.

Na seção 2 relembramos alguns conceitos básicos sobre o anel polinomial em várias variáveis. Na seção 3, definimos a aplicação derivação sobre um anel comutativo com unidade e listamos os resultados básicos que são utilizados direta ou indiretamente ao longo do texto. Em especial, apresentamos uma caracterização das derivações sobre um anel polinomial com coeficientes complexos, Teorema 3.1. Na subseção 3.1 explicitamos a relação entre derivações lineares e matrizes quadradas.

Na seção 4, é definido o polinômio de Darboux de uma derivação polinomial, os resultados básicos sobre polinômios de Darboux e alguns exemplos. Logo à seguir, iniciamos a procura por polinômios de Darboux em certas derivações. Na seção 5 estudamos os polinômios de Darboux lineares de uma derivação linear. E verificamos um interessante resultado (Teorema 5.1) que relaciona as derivações polinomiais e os polinômios de Darboux aos autovetores de certa matriz. A discussão se encerra na seção 6, onde verificamos que toda derivação homogênea do anel polinomial com duas variáveis tem polinômio de Darboux, Teorema 6.1

2 Anéis Polinomiais

O objeto central deste trabalho são as derivações sobre anéis polinomiais. Então, nessa seção, serão apresentadas as notações, definições e resultados relativos ao anel polinomial necessários ao longo do texto.

O conjunto dos polinômios em n -variáveis com coeficientes complexos é denotado por $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Quando o número de variáveis for pequeno (menor que 5) vamos denotar as variáveis por x, y, z, t e s . Por exemplo, $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ é o anel polinomial em 4 variáveis.

Um *monômio* em n variáveis x_1, \dots, x_n é uma expressão algébrica

$$ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

onde a é um número complexo, chamado de coeficiente, e os inteiros não-negativos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são chamados de expoentes da respectiva variável.

Para facilitar a leitura, usamos a notação $m = ax^\alpha$ para denotar um monômio, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. O grau de um monômio (denotado por $gr(m)$) é a soma de todos os expoentes, ou seja,

$$gr(x^\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Quando $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ temos o monômio constante $ax^\alpha = a$. Logo, todo número complexo é um monômio. E tem grau zero se for não nulo e grau $-\infty$ se for zero, o monômio nulo.

Lembre que um polinômio p é uma soma de monômios $p = \sum a_\alpha x^\alpha$. O **grau de um polinômio** p , ($gr(p)$), é o maior grau de seus monômios. Ou seja,

$$gr(p) = \max\{\alpha\} = \max\{\alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_n\}.$$

É fácil verificar que a função grau satisfaz

$$gr(fg) = gr(f) + gr(g) \text{ e } gr(f + g) \leq \max\{gr(f), gr(g)\}.$$

para todos $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Um polinômio f é chamado **homogêneo** se todos os seus monômios tem o mesmo grau. É dito **invertível** se existe um polinômio g tal que $fg = 1$. Caso contrário, dizemos que f é **não invertível**. É fácil ver que no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ o conjunto dos elementos invertíveis é igual ao corpo dos números complexos exceto o zero, ou seja, \mathbb{C}^* .

De forma análoga ao conceito de número primo, dizemos que um polinômio não nulo p em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é um **polinômio irredutível** se p não é invertível e não tem fatoração trivial, ou seja, para quaisquer $q, r \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tais que $p = q \cdot r$ temos q ou r invertível ($q \in \mathbb{C}^*$ ou $r \in \mathbb{C}^*$). Caso contrário dizemos que p é **composto** ou **redutível**.

A irredutibilidade depende do corpo dos coeficientes. Um polinômio pode ser redutível em um dado corpo e ser irredutível em outro. Por exemplo, $p(x) = x^2 + 4$ é um polinômio irredutível em $\mathbb{R}[x]$, mas é composto, em $\mathbb{C}[x]$, visto que $p(x) = (x + 2i)(x - 2i)$.

Dois polinômios f e g em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ são **co-primos** quando f e g não possuem fator comum em suas decomposições. É usual indicar que f e g são co-primos com a notação $mdc(f, g) = 1$.

Proposição 2.1 *Sejam f, g e $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Se f divide gh e $mdc(f, g) = 1$, então f divide h .*

Demonstração. A demonstração pode ser vista em [5] para anéis polinomiais em duas variáveis. O resultado pode ser estendido, visto que $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é um domínio de fatoração única. ■

3 Derivações

Nesta seção introduzimos o conceito de derivação sobre anéis, contudo o foco principal são as derivações em um anel polinomial de n -variáveis com coeficientes nos números complexos, \mathbb{C} . Em seguida, apresentamos alguns resultados sobre as derivações localmente nilpotentes (LND's) e sobre as derivações lineares. Dois teoremas finalizam a seção, relativos às derivações triangulares e as lineares.

Uma aplicação D sobre um anel A , $D : A \rightarrow A$, é dita uma **derivação** em A se

- $D(a+b) = D(a) + D(b)$
- $D(ab) = aD(b) + bD(a)$,

para todos a e $b \in A$.

A regra referente ao produto de dois elementos do anel é conhecida como a **Regra de Leibniz**. Portanto o operador derivação D respeita a soma e satisfaz a Regra de Leibniz. Chamaremos $Der(A)$ o conjunto de todas as derivações no anel A . Denotamos por D^n a n -ésima composição da derivação D , sendo $D^0(a) = a$ a aplicação identidade do anel.

Exemplo 3.1 No anel das matrizes quadradas de ordem n , $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, fixada uma matriz $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, definimos a aplicação em $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ por

$$D(A) = MA - AM.$$

Vejamos que D é uma derivação. De fato, para quaisquer matrizes quadradas A e B , temos

$$\begin{aligned} D(A+B) &= M(A+B) - (A+B)M \\ &= MA + MB - AM - BM \\ &= (MA - AM) + (MB - BM) \\ &= D(A) + D(B) \end{aligned}$$

E vale a regra de Leibniz

$$\begin{aligned} D(AB) &= M(AB) - (AB)M \\ &= MAB - AMB + AMB - ABM \\ &= (MA - AM)B + A(MB - BM) \\ &= D(A)B + AD(B). \end{aligned}$$

Vejamos alguns resultados básicos para o operador D .

Lema 3.1 Seja A um anel e $D \in Der(A)$. Se $D(a) = 0$, então teremos $D(ab) = aD(b)$.

Demonstração. De fato, pela regra de Leibniz temos

$$D(ab) = aD(b) + bD(a) = aD(b) + b(0) = aD(b).$$

Seja $D \in Der(A)$. Se $D(B) = 0$ para um subanel B do anel A dizemos que D é uma **B -derivação** do anel A . O conjunto das B -derivações do anel A é denotado por $Der_B(A)$. Neste texto, toda derivação sobre o anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é uma \mathbb{C} -derivação. ■

Lema 3.2 Seja $D_{\mathbb{Q}}$ uma derivação sobre o anel A . Dados a e $b \in A$ temos que

$$D^k(ab) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D^{k-i}(a)D^i(b).$$

Demonstração. Vamos provar a afirmativa acima por indução em k . Para $k = 1$ temos

$$\begin{aligned} D^1(ab) &= \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} D^{1-i}(a)D^i(b) \\ &= \binom{1}{0} D^{1-0}(a)D^0(b) + \binom{1}{1} D^{1-1}(a)D^1(b) \\ &= bD(a) + aD(b). \end{aligned}$$

Agora suponha a afirmação válida para todo $n < k$. Então

$$\begin{aligned} D^k(ab) &= D(D^{k-1}(ab)) \\ &= D\left(\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} D^{k-1-i}(a)D^i(b)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} D(D^{k-1-i}(a)D^i(b)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b) + D^{k-1-i}(a)D^{i+1}(b)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-1-i}(a)D^{i+1}(b)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} (D^{k-i}(a)D^i(b)) \\ &= D^k(a)b + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k-1}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} (D^{k-i}(a)D^i(b)) \\ &= D^k(a)b + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} \right) (D^{k-i}(a)D^i(b)) + aD^k(b) \\ &= D^k(a)b + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} (D^{k-i}(a)D^i(b)) + aD^k(b) \\ &= \sum_{i=0}^k D^{k-i}(a)D^i(b). \end{aligned}$$

Na segunda igualdade utilizamos a hipótese de indução e na penúltima a relação de Stiffel $\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} = \binom{k}{i}$. ■

Lema 3.3 *Seja A um anel comutativo. Se D e $E \in \text{Der}(A)$, então*

1. $aD \in \text{Der}(A)$ para todo $a \in A$;

2. $D + E \in \text{Der}(A)$.

Demonstração. Sejam $b, c \in A$. Observe que

$$aD(b + c) = a[D(b + c)] = a[D(b) + D(c)] = aD(b) + aD(c).$$

e

$$(aD)(bc) = a[D(bc)] = a[bD(c) + cD(b)] = baD(c) + caD(b) = b(aD)(c) + c(aD)(b).$$

Assim aD preserva a soma e a regra de Leibniz. Portanto aD é uma derivação em A . O item (2) é verificado de forma análoga. ■

O Lema 3.3 mostra que a soma de duas derivações e o múltiplo de uma derivação por um elemento do anel também são derivações.

Lema 3.4 *Seja D uma derivação do anel A . Então para todo $a \in A$ e todo $n \in \mathbb{N}$ temos a igualdade*

$$D(a^n) = na^{n-1}D(a).$$

Demonstração. Vamos verificar a igualdade por indução em n . Para $n = 1$ note que

$$D(a^1) = D(a) = 1D(a) = 1.1D(a) = 1a^{1-1}D(a).$$

Agora suponha a igualdade válida para $n = k > 1$, ou seja, $D(a^k) = ka^{k-1}D(a)$. Assim

$$\begin{aligned} D(a^{k+1}) &= D(aa^k) \\ &= aD(a^k) + a^kD(a) \\ &= aka^{k-1}D(a) + a^kD(a) \\ &= ka^kD(a) + a^kD(a) \\ &= (k+1)a^kD(a). \end{aligned}$$

Portanto $D(a^{k+1}) = (k+1)a^kD(a)$ e a afirmação é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Com os resultados anteriores, temos todos elementos necessários para enunciar o teorema que caracteriza as derivações do anel $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Teorema 3.1 *Se D é uma \mathbb{C} -derivação em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, então D é da forma*

$$D = D(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + D(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é a derivada parcial em relação a variável x_i .

Demonstração. Vamos verificar o resultado em duas variáveis. O caso com $n \geq 3$ variáveis é análogo. Seja $p \in \mathbb{C}[x, y]$, então $p = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$, onde $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Assim

$$\begin{aligned}
 D(p) &= D\left(\sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j\right) \\
 &= \sum_{i,j} a_{ij}D(x^i y^j) \\
 &= \sum_{i,j} a_{ij}[D(x^i)y^j + x^i D(y^j)] \\
 &= \sum_{i,j} a_{ij}[ix^{i-1}D(x)y^j + x^i jy^{j-1}D(y)] \\
 &= D(x)\sum_{i,j} ia_{ij}x^{i-1}y^j + D(y)\sum_{i,j} ja_{ij}x^i y^{j-1} \\
 &= D(x)\frac{\partial}{\partial x}(p) + D(y)\frac{\partial}{\partial y}(p).
 \end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos que D é uma \mathbb{C} -derivação, na terceira a regra de Leibniz, e na quarta o Lema 3.4. ■

Corolário 3.1 *Dados f_1, \dots, f_n polinômios em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ existe uma única derivação tal que $D(x_i) = f_i$.*

Demonstração. Considere $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ e note que $D(x_i) = f_i$. ■

Observe que para definir uma derivação em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ basta escolher n polinômios f_1, \dots, f_n tais que $D(x_i) = f_i$.

Exemplo 3.2 *Considere uma derivação $D \in \mathbb{C}[x, y, z]$ definida por $D(x) = 2x^3yz^2 + ix^2y^5$, $D(y) = x^4y^3z^3 - 2xy^2z^2$ e $D(z) = 2x^2yz + (3 + 2i)x^2z^3 + 5y^3z^4$. Ou seja,*

$$D = (2x^3yz^2 + ix^2y^5)\frac{\partial}{\partial x} + (x^4y^3z^3 - 2xy^2z^2)\frac{\partial}{\partial y} + [2x^2yz + (3 + 2i)x^2z^3 + 5y^3z^4]\frac{\partial}{\partial z}.$$

3.1 Derivações Lineares

Uma derivação D no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é dita **linear** se

$$D(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

para todo $i = 1, \dots, n$, onde a_{ij} são números complexos. A matriz $[D] = [a_{ij}]$ é dita **matriz associada** à derivação D .

Assim para obter uma derivação linear basta escolher para cada $D(x_i)$ uma combinação linear das variáveis x_1, \dots, x_n .

Exemplo 3.3 A derivação D do anel polinomial $\mathbb{C}[x, y, z]$ definida por

$$D(x) = x + y + z, D(y) = 2x - iz \text{ e } D(z) = 3iy.$$

é linear. Utilizando a notação matricial temos

$$\begin{bmatrix} D(x) \\ D(y) \\ D(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -i \\ 0 & 3i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -i \\ 0 & 3i & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz associada à derivação linear D .

Lema 3.5 Seja D uma derivação linear do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. A k -ésima composição $D^k(x_i)$ pode ser dada, na forma matricial, por

$$\begin{bmatrix} D^k(x_1) \\ D^k(x_2) \\ \vdots \\ D^k(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

em que $[a_{ij}]$ é a matriz da derivação D .

Demonstração. Provaremos a afirmativa por indução em k no anel $\mathbb{C}[x, y]$. O caso $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é idêntico. Seja

$$D = (ax + by) \frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy) \frac{\partial}{\partial y},$$

em que $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Para $k = 1$, o resultado é trivial, já que $D(x) = ax + by$ e $D(y) = cx + dy$, que na forma matricial produz:

$$\begin{bmatrix} D(x) \\ D(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Suponha a igualdade matricial válida $n = k > 1$. Ou seja, $\begin{bmatrix} D^k(x) \\ D^k(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Para facilitar a notação considere $\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k$. Vejamos o que ocorre para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} D^{k+1}(x) &= D(D^k(x)) \\ &= D(px + qy) \\ &= (ax + by) \frac{\partial}{\partial x}(px + qy) + (cx + dy) \frac{\partial}{\partial y}(px + qy) \\ &= pax + pby + qcx + qdy \\ &= (pa + qc)x + (pb + qd)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^{k+1}(y) &= D(D^k(y)) \\
 &= D(rx + sy) \\
 &= (ax + by)\frac{\partial}{\partial x}(rx + sy) + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial y}(rx + sy) \\
 &= rax + rby + scx + sdy \\
 &= (ra + sc)x + (rb + sd)y
 \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{bmatrix} D^{k+1}(x) \\ D^{k+1}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pa + qc & pb + qd \\ ra + sc & rb + sd \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}.$$

temos

$$\begin{bmatrix} D^{k+1}(x) \\ D^{k+1}(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

■

4 Polinômios de Darboux

Nesta seção estudamos polinômios de Darboux de derivações em anéis polinomiais. Listamos alguns resultados clássicos e mostramos a existência desses polinômios em alguns exemplos e no anel polinomial $\mathbb{C}[x]$.

Seja D uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Dizemos que um polinômio f , não constante, é um **polinômio de Darboux** da derivação D se $D(f) = hf$, para algum $h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. É fácil ver que se o polinômio h existe ele é único. Neste caso o polinômio h é dito um **autovalor polinomial** de f .

Exemplo 4.1 Considere a derivação D em $\mathbb{C}[x, y]$ dada por

$$D = 2xy\frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial}{\partial y}.$$

Seja $f = 3x^3 - 2xy^2$. Teremos

$$\begin{aligned}
D(f) &= D(3x^3 - 2xy^2) \\
&= 3D(x^3) - 2D(xy^2) \\
&= 9x^2D(x) - 2(D(x)y^2 + xD(y^2)) \\
&= 9x^2(2xy) - 2(2xy)y^2 + 4xy(3x^2) \\
&= 18x^3y - 4xy^3 - 12x^3y \\
&= 2y(3x^3 - 2xy^2) \\
&= hf.
\end{aligned}$$

Assim f é um polinômio de Darboux de D e $h = 2y$ é um autovalor polinomial de f .

Vejam as duas proposições básicas sobre os polinômios de Darboux.

Proposição 4.1 *Seja D uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Se f é um polinômio de Darboux de D tal que $f = gh$, com $g, h \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e $\text{mdc}(g, h) = 1$, então g e h também são polinômios de Darboux para D .*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $D(f) = pf$. Então

$$D(g)h + gD(h) = D(gh) = D(f) = pf = pgh,$$

pela regra de Leibniz. Assim $D(g)h + gD(h) = pgh$ e temos

$$D(g)h = pgh - gD(h) = g(ph - D(h)).$$

Logo g divide $D(g)h$. Como g e h são co-primos, pela Proposição 2.1, g divide $D(g)$, ou seja, $D(g) = pg$, com $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e g é um polinômio de Darboux de D . Analogamente prova-se que h é um polinômio de Darboux de D . ■

Proposição 4.2 *Seja f um polinômio de Darboux da derivação D do anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Se $f = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$, com $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ e p_i é irredutível para todo $i = 1, 2, \dots, m$, então cada $p_i^{\alpha_i}$ e cada p_i também são polinômios de Darboux para D .*

Demonstração. Como vimos na proposição 4.1, se $f = gh$ com $\text{mdc}(g, h) = 1$, então g e h são polinômios de Darboux de D . Então, para a primeira prova, basta considerarmos $g = p_i^{\alpha_i}$ e $h = p_1^{\alpha_1} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots p_n^{\alpha_n}$. Como cada um dos p_i 's são coprimos, segue imediatamente.

Vejam agora que cada p_i também é um polinômio de Darboux. Como $p_i^{\alpha_i}$ é polinômio de Darboux de D , então existe $q \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $D(p_i^{\alpha_i}) = qp_i^{\alpha_i}$. Segue do Lema 3.4 que

$$qp_i^{\alpha_i} = D(p_i^{\alpha_i}) = \alpha_i p_i^{\alpha_i - 1} D(p_i).$$

Logo $qp_i = \alpha_i D(p_i)$ e portanto $D(p_i) = [(\alpha_i)^{-1} q] p_i$. ■

Teorema 4.1 *Seja $D = f \frac{\partial}{\partial x}$ uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[x]$ e $m = \text{gr}(f)$. Então D tem um polinômio de Darboux se, e somente se, $\text{gr}(f) \geq 1$.*

Demonstração. Suponha que $m = gr(f) \geq 1$. Segue do Teorema Fundamental da Álgebra, que

$$f = b_n(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_m)$$

onde $0 \neq b_n$ é o coeficiente do termo líder de f (coeficiente do termo de maior grau) e $r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{C}$ são as raízes de f . Seja $p = (x - r_{i_1})(x - r_{i_2}) \cdots (x - r_{i_p})$ tal que $r_{i_j} \in \{r_1, \dots, r_m\}$, onde $1 \leq j \leq p$ e $q = \frac{f}{p}$. Então:

$$\begin{aligned} D(p) &= f \frac{\partial}{\partial x}(p) \\ &= (pq) \frac{\partial}{\partial x}(p) \\ &= hp, \end{aligned}$$

e assim p é um polinômio de Darboux de D com autovalor $h = q \frac{\partial}{\partial x}(p)$.

Agora suponha que $gr(f) = 0$ e que a derivação D tem um polinômio de Darboux $p = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, com $a_n \neq 0$ e $n \geq 1$. Assim $gr(p) \geq 1$ e $D(p) = hp$ para algum $h \in \mathbb{C}[x]$. Observe que $D(p) = f \frac{\partial}{\partial x}(p) = f(na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1)$, o que implica $gr(D(p)) = n - 1$, pois f é constante. De outro modo

$$gr(D(p)) = gr(hp) = gr(h) + gr(p) \geq n.$$

Ou seja, $n - 1 = gr(D(p)) \geq n$, que é um absurdo. Portanto a derivação D não tem polinômio de Darboux. ■

Exemplo 4.2 Seja $D = (2x^3 + 4x^2 + 2x + 4) \frac{\partial}{\partial x}$ uma derivação do anel polinomial $\mathbb{C}[x]$. Considere $g = x^2 + 1$. Teremos

$$\begin{aligned} D(g) &= (2x^3 + 4x^2 + 2x + 4) \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 1) \\ &= 2(x + i)(x - i)(x + 2)(2x) \\ &= (4x^2 + 8x)(x^2 + 1) \\ &= (4x^2 + 8x)g \end{aligned}$$

Logo, g é polinômio de Darboux de D . Observe que g é o produto dos fatores $(x + i)$ e $(x - i)$ da decomposição de $(2x^3 + 4x^2 + 2x + 4)$.

Uma derivação D no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é dita **monomial** se $D(x_i)$ é um monômio para todo $i = 1, \dots, n$. Sendo assim $D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ é uma derivação monomial se todo f_i é um monômio em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Exemplo 4.3 Seja D uma derivação no anel $\mathbb{C}[x, y, z, t]$ da forma

$$D = 2xt^2 \frac{\partial}{\partial x} + ix^2yz \frac{\partial}{\partial y} - 3zt \frac{\partial}{\partial z} + (2-i)yt^3 \frac{\partial}{\partial t}.$$

D é uma derivação monomial, pois

$$D(x) = 2xt^2, D(y) = ix^2yz, D(z) = -3zt, D(t) = (2-i)yt^3$$

são todos monômios em $\mathbb{C}[x, y, z, t]$.

Exemplo 4.4 Sejam $D = ax^i y^j \frac{\partial}{\partial x} + bx^k y^l \frac{\partial}{\partial y}$, $E = ax^i \frac{\partial}{\partial x} + bx^k y^l \frac{\partial}{\partial y}$, $F = ax^i y^j \frac{\partial}{\partial x} + by^l \frac{\partial}{\partial y}$ e $G = ax^i \frac{\partial}{\partial x} + by^l \frac{\partial}{\partial y}$ derivações monomiais em $\mathbb{C}[x, y]$, onde i, j, k e l são inteiros positivos e $a, b \in \mathbb{C}$. É fácil verificar que xy é um polinômio de Darboux para D, E, F e G . Vejamos a derivação D :

De fato,

$$\begin{aligned} D(xy) &= ax^i y^j \frac{\partial}{\partial x}(xy) + bx^k y^l \frac{\partial}{\partial y}(xy) \\ &= ax^i y^j (y) + bx^k y^l (x) \\ &= (ax^{i-1} y^j + bx^k y^{l-1})(xy) \\ &= h(xy) \end{aligned}$$

Logo $D(xy) = h(xy)$, onde $h = ax^{i-1} y^j + bx^k y^{l-1}$, e assim xy é um polinômio de Darboux para D . A verificação para as derivações E, F e G são imediatas.

5 Darboux e Derivações Lineares

Nessa seção estudamos os polinômios de Darboux das derivações lineares. Verificamos quando uma derivação D linear no anel $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ possui polinômio de Darboux linear utilizando os autoespaços da transposta da matriz $[D]$.

Exemplo 5.1 Seja D uma derivação linear em um anel polinomial $\mathbb{C}[x, y]$ dada por

$$D = (2x + iy) \frac{\partial}{\partial x} + [(3-i)x + 2y] \frac{\partial}{\partial y}$$

e seja $f = (3-i)x^2 - iy^2$. Temos que f é um polinômio de Darboux da derivação D . De fato,

$$\begin{aligned} D(f) = D((3-i)x^2 - iy^2) &= (2x + iy) \frac{\partial}{\partial x}((3-i)x^2 - iy^2) + [(3-i)x + 2y] \frac{\partial}{\partial y}((3-i)x^2 - iy^2) \\ &= (2x + iy)[(6-2i)x] + [(3-i)x + 2y](-2iy) \\ &= (12-4i)x^2 - 4iy^2 \\ &= 4[(3-i)x^2 - iy^2] \\ &= 4f. \end{aligned}$$

No exemplo anterior o autovalor polinomial da derivação é o polinômio constante $h = 4$. Vejamos que isto sempre ocorre em uma derivação linear.

Lema 5.1 *Seja f um polinômio de Darboux linear de uma derivação linear D . Então o autovalor polinomial de f é um polinômio constante.*

Demonstração. Seja $f = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ um polinômio de Darboux da derivação linear

$$D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

onde $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ são polinômios lineares. E seja h o autovalor polinomial de f . Ou seja, $D(f) = hf$. Assim

$$\begin{aligned} hf &= D(f) \\ &= f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} f + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} f \\ &= f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (a_1x_1 + \dots + a_nx_n) + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} (a_1x_1 + \dots + a_nx_n) \\ &= a_1f_1 + a_2f_2 + \dots + a_nf_n \end{aligned}$$

Logo

$$hf = a_1f_1 + \dots + a_nf_n.$$

Visto que $gr(a_1f_1 + \dots + a_nf_n) = 1$ temos $gr(hf) = 1$. Como $1 = gr(hf) = gr(h) + gr(f)$ e $gr(f) = 1$, temos $gr(h) = 0$. Portanto h é um polinômio constante. ■

Exemplo 5.2 *Considere a derivação linear $D = (-7x - 3y) \frac{\partial}{\partial x} + (6x + 4y) \frac{\partial}{\partial y}$ e $f = 2x + 3y$. Vamos verificar que f é um polinômio de Darboux de D com $h = 2$. De fato:*

$$\begin{aligned} D(f) = D(2x + 3y) &= (-7x - 3y) \frac{\partial}{\partial x} (2x + 3y) + (6x + 4y) \frac{\partial}{\partial y} (2x + 3y) \\ &= 2(-7x - 3y) + 3(6x + 4y) \\ &= 4x + 6y \\ &= 2(2x + 3y) \end{aligned}$$

No exemplo acima, se representarmos a transposta da matriz da transformação D , teremos

$$[D]^T = \begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vamos determinar os autovalores da matriz acima. Sendo $h \in \mathbb{C}$ e $[I]$ a matriz identidade de ordem 2, basta determinarmos as raízes do polinômio característico.

$$\begin{aligned}
\det([D] - h[I]) &= \det\left(\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\begin{bmatrix} -7-h & 6 \\ -3 & 4-h \end{bmatrix} \\
&= (-7-h)(4-h) + 18 \\
&= h^2 + 3h - 10
\end{aligned}$$

cujas raízes são -5 e 2. Observe que o valor de h encontrado no exemplo coincide com um dos autovalores da matriz transposta do operador D , e representando $f = 2x + 3y$ como uma matriz coluna formada por seus coeficientes, $[f] = [2, 3]^T$, é fácil verificar que $[f]$ é um autovetor da matriz $[D]^T$. De fato, isso é sempre verdadeiro para as derivações lineares, como será demonstrado a seguir.

Antes, vamos introduzir a seguinte notação: dado $f = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ um polinômio linear em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, denote por $[f]$ a matriz coluna formada pelos coeficiente de f . Ou seja,

$$[f] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Desse modo, é possível construir uma representação matricial para $D(f)$ quando D é linear. De fato, sendo

$$D = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

teremos

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [X][D]^T[f] = D(f),$$

em que $[X]$ é a matriz linha das variáveis $[x_1, \dots, x_n]$.

Vamos mostrar o caso 2×2 e depois estendê-lo ao caso geral.

Proposição 5.1 *Seja D a derivação linear em $\mathbb{C}[x, y]$ definida por*

$$D = (a_{11}x + a_{12}y)\frac{\partial}{\partial x} + (a_{21}x + a_{22}y)\frac{\partial}{\partial y}$$

e $f = rx + sy$ um polinômio linear em $\mathbb{C}[x, y]$. Então f é um polinômio de Darboux de D se, e somente se, $[f]$ é um autovetor da matriz $[D]^T$ associado ao autovalor h .

Demonstração. Seja f é um polinômio de Darboux de D . Então $D(f) = hf$ e $h \in \mathbb{C}$, pelo Lema 5.1. Agora observe que

$$\begin{aligned}
 D(f) = hf &\Leftrightarrow r(a_{11}x + a_{12}y) + s(a_{21}x + a_{22}y) = h(rx + sy) \\
 &\Leftrightarrow (ra_{11} + sa_{21})x + (ra_{12} + sa_{22})y = rhx + shy \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} ra_{11} + sa_{21} = rh \\ ra_{12} + sa_{22} = sh \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} - h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow ([D]^T - h[I]) [f] = [0],
 \end{aligned}$$

onde $[0]$ é a matriz coluna nula de ordem 2 e $[I]$ a matriz identidade de ordem 2. Portanto f é um polinômio de Darboux de D se, e somente se, $[f]$ é um autovetor da matriz $[D]^T$ associado ao autovalor h . ■

Agora, o caso geral.

Teorema 5.1 *Seja D uma derivação linear no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e f um polinômio linear do anel $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Então f é um polinômio de Darboux da derivação D se, e somente se, $[f]$ é um autovetor da matriz $[D]^T$.*

Demonstração. Seja f é um polinômio de Darboux de D . Então $D(f) = hf$ e $h \in \mathbb{C}$ pelo Lema 5.1. Utilizando a representação matricial, observe que

$$\begin{aligned}
 D(f) = hf &\Leftrightarrow [X][D]^T[f] = [X]h[I][f] \\
 &\Leftrightarrow [D]^T[f] = h[I][f] \\
 &\Leftrightarrow ([D]^T - h[I]) [f] = [0],
 \end{aligned}$$

onde $[X]$ é a matriz linha $[x_1, \dots, x_n]$. Portanto f é um polinômio de Darboux de D se, e somente se, $[f]$ é um autovetor de $[D]^T$ associado ao autovalor h . ■

Exemplo 5.3 *Seja a derivação $D = (x - 2y - 2z)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + (2y + 3z)\frac{\partial}{\partial z}$ em $\mathbb{C}[x, y]$. Então a transposta da matriz associada à derivação D é a matriz*

$$[D]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinamos os seus autovalores e autovetores através equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1-h & 0 & 0 \\ -2 & 1-h & 2 \\ -2 & 0 & 3-h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico da matriz $[D]^T$ é o polinômio $p(h) = (1 - h)^2(3 - h)$. Assim os autovalores da matriz $[D]^T$ são $h = 1$ e $h = 3$. Os autovetores associados ao autovalor $h = 1$ é o conjunto $\{(z, y, z)^T \mid y, z \in \mathbb{C} \text{ e } yz \neq 0\}$ e ao autovetor $h = 3$ é o conjunto $\{(0, z, z)^T \mid z \in \mathbb{C} \text{ e } z \neq 0\}$.

Considere o autovetor $[f] = [2, 3, 2]^T$, associado ao autovalor $h = 1$. Logo o polinômio $f = 2x + 3y + 2z$ associado ao vetor $[f]$ é um polinômio de Darboux para D . De fato,

$$\begin{aligned} D(f) &= (x - 2y - 2z) \frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y + 2z) + y \frac{\partial}{\partial y}(2x + 3y + 2z) + (2y + 3z) \frac{\partial}{\partial z}(2x + 3y + 2z) \\ &= 2(x - 2y - 2z) + 3y + 2(2y + 3z) \\ &= 2x - 4y - 4z + 3y + 4y + 4z \\ &= 2x + 3y + 2z \\ &= 1f. \end{aligned}$$

Agora associado ao autovalor $h = 3$ considere o autovetor $[f] = [0, 1 + i, 1 + i]^T$. Assim temos o polinômio $f = (1 + i)y + (1 + i)z$. Veja que

$$\begin{aligned} D(f) &= (x - 2y - 2z) \frac{\partial}{\partial x} f + y \frac{\partial}{\partial y} f + (2y + 3z) \frac{\partial}{\partial z} f \\ &= y(1 + i) + (2y + 3z)(1 + i) \\ &= y + iy + 2y + 2iy + 3z + 3iz \\ &= 3y + 3iy + 3z + 3iz \\ &= 3((1 + i)y + (1 + i)z) \\ &= 3f. \end{aligned}$$

Portanto $f = (1 + i)y + (1 + i)z$ também é um polinômio de Darboux para D .

6 Darboux e Derivações Homogêneas

Nesta seção verificamos que toda derivação homogênea em $\mathbb{C}[x, y]$ possui polinômio de Darboux. A prova desta afirmação (Teorema 6.1) consiste em exibir um algoritmo para obtenção de um polinômio de Darboux cada derivação homogênea.

Uma derivação D no anel polinomial $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ é dita **homogênea de grau m** se $D(x_1), \dots, D(x_n)$ são polinômios homogêneos de mesmo grau m .

Exemplo 6.1 A derivação D no anel $\mathbb{C}[x, y]$ da forma

$$D = (2x^3y - 7x^2y^2) \frac{\partial}{\partial x} + (ix^2y^2 + 3xy^3) \frac{\partial}{\partial y}$$

é uma derivação homogênea de grau 4, pois:

$$D(x) = 2x^3y - 7x^2y^2 \text{ e } D(y) = ix^2y^2 + 3xy^3$$

são ambos polinômios homogêneos em $\mathbb{C}[x, y]$ de grau 4.

A igualdade do próximo lema é conhecida como **igualdade de Euler**. A derivação

$$E = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

do anel polinomial em n -variáveis, é conhecida como **derivação de Euler**. Observe que $f = x_1 + \cdots + x_n$ é um polinômio de Darboux para E , já que $E(f) = f$.

Lema 6.1 *Seja f um polinômio homogêneo de grau m no anel polinomial em duas variáveis $\mathbb{C}[x, y]$. Então*

$$x \frac{\partial}{\partial x}(f) + y \frac{\partial}{\partial y}(f) = mf.$$

Demonstração. Considere a derivação $D = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$. Seja f um polinômio homogêneo de grau m , ou seja,

$$f = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} y + a_{m-2} x^{m-2} y^2 + \cdots + a_1 x y^{m-1} + a_0 y^m.$$

com $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$, alguns possivelmente nulos. Dessa forma temos

$$\begin{aligned} x \frac{\partial}{\partial x}(f) + y \frac{\partial}{\partial y}(f) &= D(f) \\ &= x(ma_m x^{m-1} + \cdots + a_1 y^{m-1}) + y(a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + ma_0 y^{m-1}) \\ &= ma_m x^m + \cdots + a_1 x y^{m-1} + a_{m-1} x^{m-1} y + \cdots + (m-1)a_1 x y^{m-1} + ma_0 y^m \\ &= ma_m x^m + ma_{m-1} x^{m-1} y + \cdots + ma_1 x y^{m-1} + ma_0 y^m \\ &= mf \end{aligned}$$

■

Observe que o lema anterior mostra que a derivação de Euler

$$E = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

possui polinômio de Darboux.

O próximo lema é um resultado técnico que será utilizado na demonstração do Teorema 6.1, à respeito dos polinômios de Darboux das derivações homogêneas de grau m .

Lema 6.2 *Sejam p e $q \in \mathbb{C}[x, y]$ polinômios homogêneos de grau m . Se $xq - yp = 0$, então $x - y$ divide $p - q$.*

Demonstração. Visto que p e q são polinômios homogêneos de grau m temos que

$$q = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} y + \cdots + a_1 x y^{m-1} + a_0 y^m$$

e

$$p = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} y + \cdots + b_1 x y^{m-1} + b_0 y^m,$$

onde os a_i 's e b_i 's são números complexos. Logo

$$xq = a_m x^{m+1} + a_{m-1} x^m y + \cdots + a_1 x^2 y^{m-1} + a_0 x y^m,$$

$$yp = b_mx^m y + b_{m-1}x^{m-1}y^2 + \dots + b_1xy^m + b_0y^{m+1}$$

e portanto

$$xq - yp = a_mx^{m+1} + (a_{m-1} - b_m)x^m y + \dots + (a_0 - b_1)xy^m - b_0y^{m+1}.$$

Segue desta última igualdade e da hipótese, $xq - yp = 0$, que

$$a_m = b_0 = 0, a_{m-1} = b_m, a_{m-2} = b_{m-1}, \dots, a_0 = b_1.$$

Logo temos

$$q = b_mx^{m-1}y + b_{m-1}x^{m-2}y^2 + \dots + b_2xy^{m-1} + b_1y^m$$

e

$$p = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1}y + \dots + b_2x^2y^{m-2} + b_1xy^{m-1}.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} p - q &= b_mx^m + (b_{m-1} - b_m)x^{m-1}y + (b_{m-2} - b_{m-1})x^{m-2}y^2 \dots + (b_1 - b_2)xy^{m-1} - b_1y^m \\ &= b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1}y + \dots + b_2x^2y^{m-2} + b_1xy^{m-1} \\ &\quad - b_mx^{m-1}y - b_{m-1}x^{m-2}y^2 - \dots - b_2xy^{m-1} - b_1y^m \\ &= (b_mx^{m-1} + b_{m-1}x^{m-2}y + \dots + b_2xy^{m-2} + b_1y^{m-1})(x) + \\ &\quad (b_mx^{m-1} + b_{m-1}x^{m-2}y + \dots + b_2xy^{m-2} + b_1y^{m-1})(-y) \\ &= (b_mx^{m-1} + b_{m-1}x^{m-2}y + \dots + b_2xy^{m-2} + b_1y^{m-1})(x - y) \\ &= h(x - y), \end{aligned}$$

em que $h = b_mx^{m-1} + b_{m-1}x^{m-2}y + \dots + b_2xy^{m-2} + b_1y^{m-1}$. Assim $p - q = h(x - y)$ o que implica que $x - y$ divide $p - q$. ■

Observe que a derivação de Euler é uma derivação homogênea de grau 1 (linear) e tem polinômio de Darboux em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. O próximo teorema garante que toda derivação homogênea em $\mathbb{C}[x, y]$ tem polinômio de Darboux.

Teorema 6.1 *Seja D uma derivação homogênea de grau m do anel polinomial em duas variáveis $\mathbb{C}[x, y]$. Então D tem um polinômio de Darboux.*

Demonstração. Seja $D = p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}$, com p e q homogêneos de grau m . Considere $f = xq - yp$. Se $f \neq 0$ vejamos que $D(f) = hf$.

$$\begin{aligned} D(f) &= p\frac{\partial}{\partial x}(f) + q\frac{\partial}{\partial y}(f) \\ &= p\frac{\partial}{\partial x}(xq - yp) + q\frac{\partial}{\partial y}(xq - yp) \\ &= p[q + x\frac{\partial}{\partial x}(q) - y\frac{\partial}{\partial x}(p)] + q[x\frac{\partial}{\partial y}(q) - p - y\frac{\partial}{\partial y}(p)] \\ &= px\frac{\partial}{\partial x}(q) - py\frac{\partial}{\partial x}(p) + qx\frac{\partial}{\partial y}(q) - qy\frac{\partial}{\partial y}(p) \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $py \frac{\partial}{\partial y}(q)$ e $qx \frac{\partial}{\partial x}(p)$, obtemos

$$\begin{aligned} D(f) &= p \left(x \frac{\partial}{\partial x}(q) + y \frac{\partial}{\partial y}(q) \right) - q \left(x \frac{\partial}{\partial x}(p) + y \frac{\partial}{\partial y}(p) \right) + (xq - yp) \left(\frac{\partial}{\partial y}(q) + \frac{\partial}{\partial x}(p) \right) \\ &= p(mq) - q(mp) + f \left(\frac{\partial}{\partial y}(q) + \frac{\partial}{\partial x}(p) \right) \\ &= hf, \end{aligned}$$

Na terceira igualdade temos $h = \left(\frac{\partial}{\partial y}(q) + \frac{\partial}{\partial x}(p) \right)$. A segunda igualdade segue do Lema 6.1 (lembre que p e q são homogêneos de grau m). Portanto f é um polinômio de Darboux de D , pois $D(f) = hf$.

Considere agora $f = 0$. Ou seja, $xq - yp = 0$. Segue do Lema 6.2 que $p - q = h(x - y)$ para algum $h \in \mathbb{C}[x, y]$. Agora observe que

$$\begin{aligned} D(x - y) &= p \frac{\partial}{\partial x}(x - y) + q \frac{\partial}{\partial y}(x - y) \\ &= p - q \\ &= h(x - y) \end{aligned}$$

E neste caso $x - y$ é um polinômio de Darboux da derivação D . ■

Exemplo 6.2 Considere a derivação homogênea $D = (x^2 + 2xy) \frac{\partial}{\partial x} + (2xy + y^2) \frac{\partial}{\partial y}$ e seja $f = x^2y - xy^2$. Teremos:

$$\begin{aligned} D(f) &= (x^2 + 2xy) \frac{\partial}{\partial x}(x^2y - xy^2) + (2xy + y^2) \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - xy^2) \\ &= (x^2 + 2xy)(2xy - y^2) + (2xy + y^2)(x^2 - 2xy) \\ &= 4x^3y - 4xy^3 \\ &= (4x + 4y)(x^2y - xy^2), \end{aligned}$$

ou seja, $D(f) = (4x + 4y)f$ e assim $x^2y - xy^2$ é um polinômio de Darboux da derivação homogênea D . Segue da Proposição 4.1 que xy e $x - y$ também serão polinômios de Darboux de D .

Referências

- [1] COSTA FILHO, J. A., Determinação de integrais primeiras liouvillianas em equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, Tese de Doutorado, UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.
- [2] BRUMATTI, P.R.; VELOSO M., On locally nilpotent derivations of Fermat Rings, *Algebra and Discrete Mathematics*, V.16, N.1, p.20–32, 2013.

- [3] MERIGUE, L. C., Uma introdução às derivações localmente nilpotentes com uma aplicação ao 14º problema de Hilbert, Dissertação de Mestrado, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, USP - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.
- [4] NOWICKI, A., Polynomial derivations and their rings of constants, Uniwersytet Mikołaja Kopernika: Torun, 1994.
- [5] BORIN JÚNIOR, A. M. S., Divisão de polinômios com duas variáveis, Dissertação (Mestrado em Matemática, UFTM - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Minas Gerais, 2013.
- [6] ANTON, H.; RORRES, C., Álgebra Linear com Aplicações, 8a edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [7] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y., Elementos de Álgebra, 5a. Edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [8] OLIVEIRA, B. N., Exemplos de derivações simples do anel de polinômios $K[x, y]$, Dissertação de Mestrado, UFRGS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2006.

Esquema de Diferenças Finitas de Alta Ordem para Resolver a Equação de Reação Subdifusão Bidimensional

Finite Difference Scheme of High Order for Solving the Two-dimensional Subdiffusion-reaction Equation

Aurelio José Parreira

Universidade Norte do Paraná - UNOPAR, Arapongas, PR
profaurelioparreira@gmail.com

Marcelle Flavia Carvalho

Universidade Estadual de Londrina - UEL, Londrina, PR
marcelle.flavia@hotmail.com

Rolfgan Canavez Raposo

Universidade Estadual de Londrina - UEL, Londrina, PR
despachantecanavez@hotmail.com

Resumo: As derivadas fracionárias tem sido amplamente utilizadas em vários campos da ciência e da engenharia pois tem se mostrado ser uma ferramenta valiosa para modelar muitos fenômenos físicos. Existe rica literatura sobre a pesquisa teórica das equações diferenciais fracionárias. Além dos métodos analíticos, os métodos numéricos também receberam atenção dos pesquisadores, e um grande número de métodos numéricos para resolver as equações diferenciais fracionárias unidimensionais foram desenvolvidos nos últimos anos. No entanto, em comparação com os problemas unidimensionais, há pouco trabalho de investigação sobre os métodos numéricos para resolver as equações fracionárias bidimensionais. Assim, métodos numéricos eficazes para resolver problemas bidimensionais estão em sua fase inicial. Neste trabalho apresentamos um método numérico para resolver uma equação de reação subdifusão fracionária não linear bidimensional.

Palavras-Chave: esquemas numéricos de alta ordem; método numérico compacto; equações diferenciais fracionárias.

Abstract: The fractional derivatives have been widely used in various fields of science and engineering as it has been shown to be a valuable tool to model many physical phenomena. There is rich literature on the theoretical research of fractional differential equations. In addition to the analytical methods, numerical methods also receive attention from researchers, and a large number of numerical methods to solve the fractional-dimensional differential equations have been developed in recent years. However, compared with the one-dimensional problems, there is only a little research on numerical methods for solving two-dimensional fractional equations. Thus, effective numerical methods for solving two-dimensional problems are still in their early stages. We present a numerical method to solve two-dimensional nonlinear fractional subdiffusion-reaction equation.

Keywords: numerical schemes of high order; compact numerical method; fractional diffe-

rential equations.

1 Introdução

O cálculo fracionário tem sido amplamente aplicado em vários campos da ciência e das engenharias e tem se mostrado ser uma ferramenta valiosa na modelagem de muitos fenômenos físicos. Encontramos rica literatura na pesquisa teórica de equações diferenciais fracionárias. Além dos métodos analíticos, métodos e técnicas numéricas também receberam a atenção dos estudiosos e um grande número de métodos para resolver equações diferenciais fracionárias unidimensionais tem surgido. No entanto, em comparação com os problemas unidimensionais, encontramos pouco trabalho de investigação de métodos numéricos para resolução de equações diferenciais fracionárias bidimensionais. Isso justifica a busca de métodos numéricos eficazes e técnicas para resolver os problemas bidimensionais, especialmente os métodos numéricos compactos de alta ordem.

Neste trabalho apresentamos um método numérico para a equação de reação subdifusão fracionária bidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\gamma} \left[K_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(u, x, y, t) \right] + g(u, x, y, t) \quad (1)$$

com as condições iniciais e de contorno

$$u(x, y, 0) = \phi(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq L, \quad (2)$$

$$u(0, y, t) = \varphi_1(y, t), \quad u(L, y, t) = \varphi_2(y, t), \quad 0 \leq y \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x, 0, t) = \psi_1(x, t), \quad u(x, L, t) = \psi_2(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

em que $0 < \gamma < 1$, K_1, K_2 são constantes de difusão positivas, $\phi(x, y)$, $\varphi_1(y, t)$, $\varphi_2(y, t)$, $\psi_1(x, t)$, $\psi_2(x, t)$, são funções suficientemente suaves.

${}_0D_t^{1-\gamma} u(x, y, t)$ denota a derivada temporal fracionária de Riemann-Liouville de ordem $1 - \gamma$ definida por Podlubny [1]

$${}_0D_t^{1-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, y, \xi)}{(t - \xi)^{1-\gamma}} d\xi, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (5)$$

onde $\Gamma(\gamma)$ denota a função Gama e ξ passa a ser uma variável de integração temporal.

Temos ainda

$${}_0D_t^{-\gamma} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{u(x, y, \xi)}{(t - \xi)^{1-\gamma}} d\xi, \quad \gamma > 0. \quad (6)$$

Adicionalmente assumiremos neste trabalho que $f(u, x, y, t)$ é uma função linear de u e o termo fonte $g(u, x, y, t)$ tem a derivada parcial de segunda ordem $\frac{\partial^2 g(u, x, y, t)}{\partial t^2}$ contínua e satisfaz a condição de Lipschitz com relação a u , isto é,

$$|g(u_1, x, y, t) - g(u_2, x, y, t)| \leq L_g |u_1 - u_2|, \quad \forall u_1, u_2, \quad (7)$$

onde L_g é a constante de Lipschitz.

Na Seção 2, um método compacto de alta ordem com precisão de segunda ordem temporal e quarta ordem espacial para a equação de reação subdifusão fracionária bidimensional não linear foi apresentado. E na seção 3 fazemos a análise da consistência, estabilidade e convergência do método.

2 Esquema Numérico Implícito de Diferença Finita Compacta

Neste trabalho, nós adotamos uma malha uniforme de pontos (x_n, y_m, t_k) , com $x_n = nh_x$, $n = 0, 1, 2, \dots, M_1$, $y_m = mh_y$, $m = 0, 1, 2, \dots, M_2$ e $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$ onde M_1 , M_2 e N são inteiros positivos, $h_x = \frac{L}{M_1}$, $h_y = \frac{L}{M_2}$ e $\tau = \frac{T}{N}$ são os passos espaciais e temporal, respectivamente. A solução analítica u nos pontos (x_n, y_m, t_k) da malha é denotada por $u_{n,m}^k$, e a solução pelo método numérico nos pontos (x_n, y_m, t_k) é denotada por $U_{n,m}^k$. É necessário também mencionar que, neste trabalho, C é uma constante positiva que pode ter diferentes valores em diferentes lugares.

Introduziremos as notações

$$\delta_x^2 U_{n,m}^k = U_{n-1,m}^k - 2U_{n,m}^k + U_{n+1,m}^k, \quad (8)$$

$$\delta_y^2 U_{n,m}^k = U_{n,m-1}^k - 2U_{n,m}^k + U_{n,m+1}^k, \quad (9)$$

para os operadores de diferença finita centrada espacial.

Introduziremos, como em [1], os operadores de diferença finita compacta

$$\frac{1}{h_x^2} \left[\frac{\delta_x^2}{1 + \frac{1}{12} \delta_x^2} \right] U_{n,m}^k \quad \frac{1}{h_y^2} \left[\frac{\delta_y^2}{1 + \frac{1}{12} \delta_y^2} \right] U_{n,m}^k, \quad (10)$$

e o operador de diferença finita temporal para trás

$$\delta_t^- U_{n,m}^k = U_{n,m}^k - U_{n,m}^{k-1}. \quad (11)$$

Substituindo os operadores de diferença finita compacta, diferença fracionária de Grünwald-Letnikov e diferença finita temporal para trás na equação diferencial (1) obtemos o esquema numérico de Diferença Finita Compacta:

$$\frac{1}{\tau} \delta_t^- U_{n,m}^k = {}_0\delta_t^{1-\gamma} \left(K_1 \frac{1}{h_x^2} \left[\frac{\delta_x^2}{1 + \frac{1}{12} \delta_x^2} \right] U_{n,m}^k + K_2 \frac{1}{h_y^2} \left[\frac{\delta_y^2}{1 + \frac{1}{12} \delta_y^2} \right] U_{n,m}^k + f_{n,m}^k \right) + g_{n,m}^k \quad (12)$$

onde $U_{n,m}^k$ é solução pelo esquema numérico no nó (n, m, k) .

Arranjando os termos de (12) temos

$$\begin{aligned} \delta_t^- U_{n,m}^k = & \left[\frac{K_1 \tau}{h_x^2} \left[1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 \right]^{-1} ({}_0\delta_t^{1-\gamma}) \delta_x^2 U_{n,m}^k \right] + \left[\frac{K_2 \tau}{h_y^2} \left[1 + \frac{1}{12} \delta_y^2 \right]^{-1} ({}_0\delta_t^{1-\gamma}) \delta_y^2 U_{n,m}^k \right] \\ & + \tau {}_0\delta_t^{1-\gamma} f_{n,m}^k + \tau g_{n,m}^k. \end{aligned} \quad (13)$$

Denotando $\mu_1 = K_1 \frac{\tau}{h_x^2}$ e $\mu_2 = K_2 \frac{\tau}{h_y^2}$ encontramos

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 + \frac{1}{12} \delta_y^2 + \frac{1}{144} \delta_x^2 \delta_y^2 \right] \left(U_{n,m}^k - U_{n,m}^{k-1} \right) = \\ & \mu_1 \left[1 + \frac{1}{12} \delta_y^2 \right] \delta_{x0}^2 \delta_t^{1-\gamma} U_{n,m}^k + \mu_2 \left[1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 \right] \delta_{y0}^2 \delta_t^{1-\gamma} U_{n,m}^k + \\ & \left[1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 + \frac{1}{12} \delta_y^2 + \frac{1}{144} \delta_x^2 \delta_y^2 \right] \left(\tau {}_0 \delta_t^{1-\gamma} f_{n,m}^k + \tau g_{n,m}^k \right) . \end{aligned}$$

De acordo com [1] a derivada temporal fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha = 1 - \gamma > 0$ é equivalente a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov também de ordem α . Como em [2] o operador fracionário de Grünwald-Letnikov será definido por

$${}_0 \delta_t^{1-\gamma} U_{n,m}^k = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{j=0}^n \omega_j^{1-\gamma} U_{n,m}^{k-j} = \frac{1}{\tau^\alpha} \left[U_{n,m}^k + \sum_{j=1}^k \omega_j^\alpha U_{n,m}^{k-j} \right], \quad (14)$$

onde os coeficientes ω_j^α são obtidos de forma recursiva através da seguinte fórmula:

$$\omega_0^\alpha = 1, \quad \omega_j^\alpha = \left[1 - \frac{\alpha + 1}{j} \right] \omega_{j-1}^\alpha, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Substituindo (14) encontramos:

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{1}{12} \delta_y^2 + \frac{1}{12} \delta_x^2 + \frac{1}{144} \delta_x^2 \delta_y^2 \right] \left(U_{n,m}^k - U_{n,m}^{k-1} \right) = \\ & \frac{\mu_1}{\tau^\alpha} \left[1 + \frac{1}{12} \delta_y^2 \right] \delta_x^2 \left(U_{n,m}^k + \sum_{j=1}^k \omega_j^\alpha U_{n,m}^{k-j} \right) + \frac{\mu_2}{\tau^\alpha} \left[1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 \right] \delta_y^2 \left(U_{n,m}^k + \sum_{j=1}^k \omega_j^\alpha U_{n,m}^{k-j} \right) \\ & + \left[1 + \frac{1}{12} \delta_x^2 + \frac{1}{12} \delta_y^2 + \frac{1}{144} \delta_x^2 \delta_y^2 \right] \left(\tau^{1-\alpha} \left[f_{n,m}^k + \sum_{j=1}^k \omega_j^\alpha f_{n,m}^{k-j} \right] + \tau g_{n,m}^k \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 & (100\tau^\alpha + 240\mu_1 + 240\mu_2)U_{n,m}^k + (10\tau^\alpha - 120\mu_1 + 24\mu_2)U_{n-1,m}^k + \\
 & (10\tau^\alpha - 120\mu_1 + 24\mu_2)U_{n+1,m}^k + (10\tau^\alpha + 24\mu_1 - 120\mu_2)U_{n,m-1}^k + \\
 & (10\tau^\alpha + 24\mu_1 - 120\mu_2)U_{n,m+1}^k + (\tau^\alpha - 12\mu - 1 - 12\mu_2)U_{n-1,m-1}^k + \\
 & (\tau^\alpha - 12\mu_1 - 12\mu_2)U_{n+1,m-1}^k + (\tau^\alpha - 12\mu_1 - 12\mu_2)U_{n-1,m+1}^k + \\
 & (\tau^\alpha - 12\mu_1 - 12\mu_2)U_{n+1,m+1}^k = \tau^\alpha U_{n-1,m-1}^{k-1} + \tau^\alpha U_{n+1,m-1}^{k-1} + \tau^\alpha U_{n-1,m+1}^{k-1} + \\
 & \tau^\alpha U_{n+1,m+1}^{k-1} + 100\tau^\alpha U_{n,m}^{k-1} + 10\tau^\alpha U_{n-1,m}^{k-1} + 10\tau^\alpha U_{n+1,m}^{k-1} + 10\tau^\alpha U_{n,m-1}^{k-1} + \\
 & 10\tau^\alpha U_{n,m+1}^{k-1} + \sum_{j=1}^k \omega_j^\alpha [(120\mu_1 - 24\mu_2)U_{n-1,m}^{k-j} + (-240\mu_1 - 240\mu_2)U_{n,m}^{k-j} + \\
 & (120\mu_1 - 24\mu_2)U_{n+1,m}^{k-j} + (12\mu_1 + 12\mu_2)U_{n-1,m-1}^{k-j} + (120\mu_2 - 24\mu_1)U_{n,m-1}^{k-j}] + \\
 & \sum_{j=1}^k \omega_j^\alpha [(12\mu_1 + 12\mu_2)U_{n+1,m-1}^{k-j} + (12\mu_1 + 12\mu_2)U_{n-1,m+1}^{k-j} + (120\mu_2 - 24\mu_1)U_{n,m+1}^{k-j} + \\
 & (12\mu_1 + 12\mu_2)U_{n+1,m+1}^{k-j}] + [144\tau + 12\tau\delta_x^2 + 12\tau\delta_y^2 + \tau\delta_x^2\delta_y^2] \left[\sum_{j=0}^k \omega_j^\alpha f_{n,m}^{k-j} \right] + \\
 & [144\tau^{\alpha+1} + 12\tau^{\alpha+1}\delta_x^2 + 12\tau^{\alpha+1}\delta_y^2 + \tau^{\alpha+1}\delta_x^2\delta_y^2]g_{n,m}^k
 \end{aligned}$$

Note que o Esquema Numérico encontrado é implícito e pode ser escrito em termos matriciais:

$$AU^k = BU^{k-1} + C \sum_{j=1}^k \omega_j^\alpha U^{k-j} + D \sum_{j=0}^k \omega_j^\alpha \mathbf{F}^{k-j} + E\mathbf{G}^k, \quad (16)$$

onde, $A = \text{tridiag}(a, b, a)$, $a = \text{tridiag}(\tau^\alpha - 12\mu_1 - 12\mu_2, 10\tau^\alpha - 120\mu_1 + 24\mu_2, \tau^\alpha - 12\mu_1 - 12\mu_2)$ e $b = \text{tridiag}(10\tau^\alpha + 24\mu_1 - 120\mu_2, 100\tau^\alpha + 240\mu_1 + 240\mu_2, 10\tau^\alpha + 24\mu_1 - 120\mu_2)$.

Temos ainda que $B = \text{tridiag}(c, d, c)$,

onde, $c = \text{tridiag}(\tau^\alpha, 10\tau^\alpha, \tau^\alpha)$ e $d = \text{tridiag}(10\tau^\alpha, 100\tau^\alpha, 10\tau^\alpha)$.

A matriz C é dada por $C = \text{tridiag}(h, i, h)$, onde, $h = \text{tridiag}(12\mu_1 + 12\mu_2, 120\mu_1 - 24\mu - 2, 12\mu - 1 + 12\mu - 2)$ e $i = \text{tridiag}(120\mu_2 - 24\mu_1, -240\mu_1 - 240\mu_2, 120\mu_2 - 24\mu_1)$.

A matriz D é dada por $D = \frac{1}{\tau^{\alpha-1}}B$. A matriz E é dada por $E = \tau^\alpha D$. E, por fim,

$$\mathbf{F}^{k-j} = \begin{bmatrix} f_{0,0}^{k-j} & f_{0,1}^{k-j} & \dots & f_{0,m}^{k-j} \\ f_{1,0}^{k-j} & f_{1,1}^{k-j} & \dots & f_{1,m}^{k-j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n,0}^{k-j} & f_{n,1}^{k-j} & \dots & f_{n,m}^{k-j} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^{k-j} = \begin{bmatrix} g_{0,0}^{k-j} & g_{0,1}^{k-j} & \dots & g_{0,m}^{k-j} \\ g_{1,0}^{k-j} & g_{1,1}^{k-j} & \dots & g_{1,m}^{k-j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n,0}^{k-j} & g_{n,1}^{k-j} & \dots & g_{n,m}^{k-j} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{U}^k = (U_{1,1}^k, \dots, U_{1,M_2-1}^k, U_{2,1}^k, \dots, U_{2,M_2-1}^k, \dots, U_{M_1-1,M_2-1}^k)^T$ é o vetor incógnita.

O seguinte Teorema garante a existência e unicidade de solução para o esquema (16).

Teorema 2.1 *O Sistema Linear associado ao esquema (16) possui solução única.*

Demonstração. Note que a matriz A é estritamente diagonal dominante. Consequentemente ela é não singular e, portanto, invertível. Com isso o esquema numérico de diferença finita compacta(DFC) tem solução única. ■

3 Consistência, Estabilidade e Convergência do Esquema Numérico

3.1 Consistência

Provaremos que nosso esquema é consistente com a equação diferencial fracionária, com ordem de precisão 4 para a variável espacial e ordem de precisão 1 para a variável temporal.

Lema 3.1 Para cada $n = 1, \dots, N$, seja y^{n-j} uma função limitada, $0 < \gamma < 1$ e $\lambda_j = \omega_j^{1-\gamma}$. Então,

$$\left| \sum_{j=0}^n \lambda_j y^{n-j} \right| \leq C_n, \quad C_n = c_n n^{\gamma-1}, \quad c_n = \max_{j \in \{0, \dots, n\}} |y^{n-j}| \quad (17)$$

Demonstração.

$$\left| \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^n \lambda_j y^{n-j} \right| \leq c_n \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^n |\lambda_j|, \quad c_n = \max_{j \in \{0, \dots, n\}} |y^{n-j}| \quad (18)$$

De (15) temos $\lambda_j < 0$ para todo $j = 1, \dots, N$,

$$\left| \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^n \lambda_j y^{n-j} \right| \leq -c_n \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^n \lambda_j, \quad c_n = \max_{j \in \{0, \dots, n\}} |y^{n-j}| \quad (19)$$

$$\left| \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^n \lambda_j y^{n-j} \right| \leq -c_n \left(\frac{2}{\tau^{1-\gamma}} - \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^n \lambda_j \right), \quad c_n = \max_{j \in \{0, \dots, n\}} |y^{n-j}| \quad (20)$$

De (2) temos

$$\frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^n \lambda_j = \frac{t_n^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \mathcal{O}(\tau) = \frac{(n\tau)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} + \mathcal{O}(\tau).$$

Com isso,

$$\left| \tau^{\gamma-1} \sum_{j=0}^n \lambda_j y^{n-j} \right| \leq -c_n \left(2\tau^{\gamma-1} - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} n^{\gamma-1} \tau^{\gamma-1} + c_0 \tau \right), \quad (21)$$

$$\left| \sum_{j=0}^n \lambda_j y^{n-j} \right| \leq -c_n \left(2 - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} n^{\gamma-1} + c_0 \tau^{2-\gamma} \right), \quad (22)$$

onde c_0 é uma constante. Logo,

$$\left| \sum_{j=0}^n \lambda_j y^{n-j} \right| \leq C_n, \quad (23)$$

e concluímos nossa prova. ■

O erro de truncamento local de nosso esquema, em um nó (n, m, k) é dado por

$$R_{n,m}^k(h, \tau) = \frac{1}{\tau} \delta_t^- U_{n,m}^k - {}_0\delta_t^{1-\gamma} \left(K_1 \frac{1}{h_x^2} \left[\frac{\delta_x^2}{1 + \frac{1}{12} \delta_x^2} \right] U_{n,m}^k \right) + {}_0\delta_t^{1-\gamma} \left(K_2 \frac{1}{h_y^2} \left[\frac{\delta_y^2}{1 + \frac{1}{12} \delta_y^2} \right] U_{n,m}^k + f_{n,m}^k \right) - g_{n,m}^k. \quad (24)$$

Teorema 3.1 *O esquema numérico DFC (12) é consistente com a equação diferencial (1) e existe uma constante $C_{n,m,k} > 0$ tal que,*

$$|R_{n,m}^k| \leq C_{n,m,k} (n^{\gamma-1} \tau^{\gamma-1} + 1) (h^4 + \tau), \quad (25)$$

para todo $0 < \gamma < 1$ e h, τ suficientemente pequenos.

Demonstração.

$$\frac{1}{\tau} \delta_t^- U_{n,m}^k = (u_t)_{n,m}^k + \mathcal{O}(\tau), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} {}_0\delta_t^{1-\gamma} \left(K_1 \frac{1}{h_x^2} \left[\frac{\delta_x^2}{1 + \frac{1}{12} \delta_x^2} \right] U_{n,m}^k \right) &= K_{10} \delta_t^{1-\gamma} \left((u_{xx})_{n,m}^k - \frac{1}{240} h_x^4 (u_{xxxxx})_{n,m}^k + \mathcal{O}(h_x^6) \right) \\ &= K_1 \left(D_t^{1-\gamma} (u_{xx})_{n,m}^k - \frac{1}{240} h_x^4 \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^k \lambda_j (u_{xxxxx})_{n,m}^{k-j} + \mathcal{O}(\tau) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_0\delta_t^{1-\gamma} \left(K_2 \frac{1}{h_y^2} \left[\frac{\delta_y^2}{1 + \frac{1}{12} \delta_y^2} \right] U_{n,m}^k \right) &= K_{20} \delta_t^{1-\gamma} \left((u_{yy})_{n,m}^k - \frac{1}{240} h_y^4 (u_{yyyyy})_{n,m}^k + \mathcal{O}(h_y^6) \right) \\ &= K_2 \left(D_t^{1-\gamma} (u_{yy})_{n,m}^k - \frac{1}{240} h_y^4 \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^k \lambda_j (u_{yyyyy})_{n,m}^{k-j} + \mathcal{O}(\tau) \right), \\ {}_0\delta_t^{1-\gamma} (f_{n,m}^k) &= K ({}_0D_t^{1-\gamma} f_{n,m}^k + \mathcal{O}(\tau)). \end{aligned} \quad (27)$$

Substituindo (26)-(27) em (3.1)

$$\begin{aligned} R_{n,m}^k &= (u_t)_{n,m}^k + \mathcal{O}(\tau) - K_1 \left(D_t^{1-\gamma} (u_{xx})_{n,m}^k - \frac{1}{240} h_x^4 \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^k \lambda_j (u_{xxxxx})_{n,m}^{k-j} + \mathcal{O}(\tau) \right) \\ &\quad - K_2 \left(D_t^{1-\gamma} (u_{yy})_{n,m}^k - \frac{1}{240} h_y^4 \frac{1}{\tau^{1-\gamma}} \sum_{j=0}^k \lambda_j (u_{yyyyy})_{n,m}^{k-j} + \mathcal{O}(\tau) \right) \\ &\quad - ({}_0D_t^{1-\gamma} f_{n,m}^k + \mathcal{O}(\tau)) - g_{n,m}^k \\ &= \frac{K_1}{240} h_x^4 \tau^{\gamma-1} \left(\sum_{j=0}^k \lambda_j (u_{xxxxx})_{n,m}^{k-j} \right) + \frac{K_2}{240} h_y^4 \tau^{\gamma-1} \left(\sum_{j=0}^k \lambda_j (u_{yyyyy})_{n,m}^{k-j} \right) + \mathcal{O}(\tau) \end{aligned} \quad (28)$$

Pelo Lema (3.1), o termo somatório é limitado e, os termos $h_x^4 \tau^{\gamma-1} \rightarrow 0$ e $h_y^4 \tau^{\gamma-1} \rightarrow 0$, se $h_x^4 \rightarrow 0$ e $h_y^4 \rightarrow 0$ mais rapidamente que $\tau^{\gamma-1}$. Assim, o erro de truncamento $R_{n,m}^k \rightarrow 0$ quando $h_x, h_y, \tau \rightarrow 0$. Para cada (n, m, k) fixo, a equação (28) e a constante C_n em (17), implicam

$$\begin{aligned} R_{n,m}^k &= \mathcal{O}(h_x^4 \tau^{\gamma-1} n^{\gamma-1} + \tau) + \mathcal{O}(h_y^4 \tau^{\gamma-1} n^{\gamma-1} + \tau) \\ &= \mathcal{O}((n^{\gamma-1} \tau^{\gamma-1} + 1) (h_x^4 + h_y^4) \tau), \quad h_x, h_y, \tau \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Portanto, existe uma constante positiva $C_{n,m,k}$ tal que, $|R_{n,m}^k| \leq C_{n,m,k} (n^{\gamma-1} \tau^{\gamma-1} + 1) (h_x^4 + h_y^4 + \tau)$ para todo $0 < \gamma < 1$ e h_x, h_y, τ suficientemente pequenos. ■

3.2 Estabilidade e Convergência

O estudo da estabilidade do esquema numérico através da análise de Fourier segue da mesma forma que o caso unidimensional já demonstrado por Avila *et al.* [2]. Por fim, pelo Teorema de Lax podemos concluir que o método é convergente, pois já foi mostrado que ele é consistente e estável.

4 Conclusão

Aplicamos o Método de Diferenças Finitas Compactas à Equação de Reação Difusão Bidimensional e conseguimos demonstrar que o mesmo é um método incondicionalmente estável com alta ordem de convergência, isto é, converge com precisão de quarta ordem nas variáveis espaciais e primeira ordem na variável temporal. Com isso deixamos aberto o caminho para que se discuta o caso tridimensional e esperamos ter colaborado no avanço dos métodos para solução de Equações Diferenciais Fracionárias.

Referências

- [1] PODLUBNY, I. Fractional Differential Equations, ACADEMIC PRESS, 1999.
- [2] AVILA, J. A. J. ; Parreira, A. J. e AGUILAR, J. C. Z. About The Convergence of a Numerical Scheme Of High Order to Solve Fractional Reaction-Subdiffusion Equation, *International Journal of Applied Mathematics*, v.27, n.4, p.365–386, 2014, DOI: 10.12732/ijam.v27i4.5.
- [3] BALEANU, D. ; DIEHTELM, K. ;SCALAS, E. e TRUJILLO, J. J. Fractional Calculus, WORLD SCIENTIFIC, 2012.
- [4] BURRAGE, K. ; HALE, N. e KAY, D. An efficient implicit FEM scheme for fractional-in-space reaction-diffusion equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, v.34, n.4, p.A2145–A2172, 2012.
- [5] CHEN, C. M. *et al.* Numerical approximation for a variable-order non-linear fractional reaction-subdiffusion equation, *Numerical Algorithms*, v.63, p.265–290, 2013.
- [6] CUI, M. R. Compact finite difference method for the fractional diffusion equation, *Journal Comput. Phys.*, v. 228, n.20, p.7792–7804, 2009.
- [7] CUI, M. R. Convergence analysis of high-order compact alternating direction implicit schemes for the two-dimensional time fractional diffusion equation. *Numer. Algorithms*, v.62, n.3, p.383–409, 2013.
- [8] DENG, W. Numerical algorithm for the time fractional Fokker-Planck equation, *Journal Comput. Phys.*, v.227, n.2, p.1510–1522, 2007.
- [9] DENG, W. e LI, C. Finite difference methods and their physical constraints for the fractional kleinramers equation, *Numerical Methods Partial Differ. Equ.*, v.27, n.6, p.1561–1583, 2011.
- [10] DIETHELM, K. e FORD, N. J. Analysis of fractional differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, v.265, n.2, p.229–248, 2002.

- [11] LI, C. P. ; ZHAO, Z. e CHEN, Y. Q. Numerical approximation of nonlinear fractional differential equations with subdiffusion and superdiffusion. *Comput. Math. Appl.*, v.62, n.3, p.855–875, 2011.
- [12] MEERSCHAERT, M. M. ; SCHEFFLER, H.P. e TADJERAN, A. Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation, *Journal Comput. Phys.*, v.211, n.1, p.249–261, 2006.
- [13] METZLER, R. e KLAFETER, J. The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Phys. Rep.*, v. 339, n.1, p.1–77, 2000.
- [14] TADJERAN, C. e MEERSCHAERT, M. M. A second-order accurate numerical method for the two-dimensional fractional diffusion equation, *Journal Comput. Phys.*, v.220, n.2, p.813–823, 2007.
- [15] XU, H. ; LIAO, S. J. e YOU, X. C. Analysis of nonlinear fractional partial differential equations with the homotopy analysis method,]*Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, v.14, n.4, p.1152–1156, 2009.
- [16] ZENG, F. ; LI, C. e LIU, F. High-order explicit-implicit numerical methods for nonlinear anomalous diffusion equations, *Eur. Phys. Journal*, v.222, n.8, p.1885–1900, 2013.
- [17] ZHUANG, P. e LIU, F. Finite difference approximation for two-dimensional time fractional diffusion equation, *Journal Algorithms Comput. Technol.*, v.1, n.1, p.1–15, 2007.
- [18] ZHUANG, P. ; LIU, F. ; ANH, V. e TURNER, I. Stability and convergence of an implicit numerical method for the non-linear fractional reaction-subdiffusion process, *IMA J. Appl. Math.*, v.74, n.5, p.645–667, 2009.

A Função φ de Euler e a Expansão Periódica de Frações na Base b

The Function φ of Euler and the Periodic Expansion Fractions in the Base b

Martinho da Costa Araujo

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT, Cuiabá, MT
martinho@ufmt.br

Marcionei Rech

Instituto Federal de Mato Grosso -IFMT, Sorriso, MT
marcionei.rech@srs.ifmt.edu.br

Resumo: Queremos aqui explorar o comportamento da expansão de frações ordinárias, o comprimento da parte não periódica, bem como do período se ela for uma dízima infinita, com o auxílio da função φ de Euler. Além das expansões decimais que são as mais comuns, exploraremos as expansões para uma base b qualquer. Apresentaremos alguns exemplos de expansões de frações ordinárias para diferentes bases numéricas gerando dízimas finitas, como também, dízimas periódicas simples e compostas.

Palavras-chave: dízimas periódicas; bases numéricas; números racionais.

Abstract: We would like to explore the behavior of the expansion of ordinary fractions, the length of the non-periodic part and the period if it is an endless tithe, with the help of the function φ Euler. In addition to the decimal expansions that are the most common, we explore the expansions for a base b whatsoever. We will present some examples of expansions of ordinary fractions for different number bases generating finite decimals, but also simple and composite periodical decimals.

Key words: periodic decimal; numerical bases; rational numbers.

1 Introdução

Os estudos sobre expansões nos remontam para o início do século 18, vários matemáticos observaram regularidades nas expansões decimais de frações comuns, dentre eles destacamos: John Wallis [1657, 1685], Samuel Cunn [1714] e John Marsh [1742]. Algumas regras foram criadas, mas foi só a partir de 1760 em diante, que as primeiras tentativas para estabelecer uma teoria coerente de frações decimais periódicas apareceram. Johann Heinrich Lambert [1728, 1777] foi o primeiro a dedicar dois ensaios sobre o tema, porém somente em 1801 que Johann Carl Friedrich Gauss provou um teorema importante relacionado a determinação do comprimento de dízimas periódicas no sistema de numeração decimal.

Identificar o comportamento de uma expansão parece ser uma tarefa fácil quando tratamos de expansões relativamente pequenas, basta uma simples divisão do numerador pelo

denominador, mas em alguns casos o comprimento da parte finita ou até mesmo do período, não cabe em uma simples calculadora. Por exemplo a expansão decimal da fração $\frac{1}{29}$ gera uma dízima periódica simples com período de 28 algarismos, já a expansão de $\frac{1}{4096}$ é finita com 12 algarismos.

Hoje é comum artigos que tratam da expansão decimais de frações ordinárias irredutíveis $\frac{p}{q}$ com $q \neq 0$, mostrando quais números racionais geram dízimas finitas e quais geram dízimas infinitas e periódicas. Queremos aqui generalizar esses conceitos e trabalhar a expansão de frações ordinárias para uma base b qualquer.

Observe a expansão da fração $\frac{19}{48}$ em algumas bases numéricas diferentes:

$$\frac{19}{48} = (0, 2213)_6 = (0, \overline{25})_7 = (0, 3958\overline{3})_{10}$$

Veja que quando expandida para a base 6, gera uma dízima finita, na base 7 uma dízima periódica simples de período 25, já na base 10 gera uma dízima periódica composta com período 3, ou seja, a mesma fração pode ter comportamentos bem distintos dependendo da base para a qual se deseja a expansão.

2 A Função φ de Euler

Antes de analisarmos as expansões vamos retomar algumas definições e resultados da teoria dos números que são importantes.

Dado um inteiro positivo n , representa-se por $\varphi(n)$ a quantidade de inteiros positivos menores que n e primos com n . Escrevemos:

$$\varphi(n) = |\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k < n \text{ e } \text{mdc}(k, n) = 1\}|.$$

Por exemplo, para $n = 10$ temos que os inteiros 1, 3, 7, 9 são relativamente primos com 10, ou seja, $\varphi(10) = 4$. Veja o valor de $\varphi(n)$ dos primeiros números naturais:

Exemplo 2.1 :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8

Define-se assim uma função que associa cada número inteiro positivo n a um inteiro positivo $\varphi(n)$ que goza das seguintes propriedades:

1. $\varphi(1) = 1$
2. Se $n > 1$, $\varphi(n) \leq n - 1$ tem-se a igualdade se e somente se n é primo.
3. Se $\text{mdc}(a, n) = 1$, então $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. (Teorema de Euler).
4. Se s é o menor inteiro positivo, tal que $a^s \equiv 1 \pmod{n}$ com $\text{mdc}(a, n) = 1$, então s divide $\varphi(n)$, s é chamado de ordem de a módulo n , e escrevemos como $s = \text{ord}_n(a)$.
5. Se p é primo e α é um inteiro positivo, então $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.
6. Se m e n são inteiros positivos, tais que $\text{mdc}(m, n) = 1$, então $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$.

A demonstração dessas propriedades, bem como do teorema de Euler podem ser vistas na referência bibliográfica [1].

3 Expansão na base b

Trataremos nessa seção do comportamento das expansões de frações ordinárias irredutíveis, em uma base b qualquer.

Dado um inteiro qualquer $b \geq 2$, todo inteiro positivo $n > 0$ pode ser escrito de modo único na forma $n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0$, com $0 \leq a_i < b$ para $i = 0, 1, 2, \dots, m$ e $a_m \neq 0$. Representamos $n = (a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0)_b$. E essa é a expansão de n na base b .

3.1 Expansão finita

Teorema 3.1 *Uma fração irredutível $\frac{p}{q}$ com $q \neq 0$, possui representação finita no sistema posicional de base b , se e somente se, o denominador q não possui fatores primos diferentes dos fatores de b . Mais precisamente, se a base for tipo $b = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$ com P_i primos e os inteiros $\alpha_i \geq 0$ e seu denominador $q = (P_1^{\alpha_1})^{\beta_1} (P_2^{\alpha_2})^{\beta_2} \dots (P_k^{\alpha_k})^{\beta_k}$ com os inteiros $\beta_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, k$, então a expansão será finita e possuirá w algarismos após a vírgula, sendo $w = \max \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$.*

Demonstração. Como $\frac{p}{q} = p \cdot \left(\frac{1}{q}\right)$, basta considerar que $\frac{1}{q} = (0, d_1 d_2 \dots d_k)_b$ seja a expansão finita na base b , onde $0 \leq d_i < b$, o inteiro $i = 1, 2, \dots, k$ e o último algarismo $d_k \neq 0$. Logo vamos ter

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{d_1}{b} + \frac{d_2}{b^2} + \frac{d_3}{b^3} + \dots + \frac{d_k}{b^k} \\ &= \frac{1}{b^k} (d_1 \cdot b^{k-1} + d_2 \cdot b^{k-2} + d_3 \cdot b^{k-3} + \dots + d_k) \end{aligned}$$

Agora, tomamos $M = d_1 \cdot b^{k-1} + d_2 \cdot b^{k-2} + d_3 \cdot b^{k-3} + \dots + d_k$, então segue que

$$\frac{1}{q} = \frac{M}{b^k} \Leftrightarrow Mq = b^k \Rightarrow q \mid b^k.$$

Logo q não tem fatores primos que não sejam fatores de b .

Reciprocamente, se q não tem fatores primos que não sejam fatores de b , seja $w = \max \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r\}$, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \cdot b^w &= ((P_1^{\alpha_1})^w \cdot (P_2^{\alpha_2})^w \dots (P_k^{\alpha_k})^w) \cdot \frac{1}{(P_1^{\alpha_1})^{\beta_1} \cdot (P_2^{\alpha_2})^{\beta_2} \cdot (P_3^{\alpha_3})^{\beta_3} \dots (P_k^{\alpha_k})^{\beta_k}} = \\ &= (P_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1} \cdot (P_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2} \cdot (P_3^{\alpha_3})^{w-\beta_3} \dots (P_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k}. \end{aligned}$$

Seja $M = (P_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1} \cdot (P_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2} \cdot (P_3^{\alpha_3})^{w-\beta_3} \dots (P_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k}$, então $\frac{b^w}{q} = M$ o que significa que $M < b^w$, e assim podemos escrever:

$$M = a_{w-1} \cdot b^{w-1} + a_{w-2} \cdot b^{w-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0 = (a_{w-1} a_{w-2} \dots a_2 a_1 a_0)_b.$$

Portanto temos que se

$$\begin{aligned}
 \frac{b^w}{q} = M &\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{M}{b^w} \\
 &= \frac{a_{w-1} \cdot b^{w-1} + a_{w-2} \cdot b^{w-2} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0}{b^w} \\
 &= \frac{a_{w-1}}{b} + \frac{a_{w-2}}{b^2} + \dots + \frac{a_2}{b^{w-2}} + \frac{a_1}{b^{w-1}} + \frac{a_0}{b^w} \\
 &= (0, \underbrace{a_{w-1} a_{w-2} \dots a_2 a_1 a_0}_w)_b
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.1 : Determinar a expansão de $\frac{7}{48}$ na base 6.

Observe que $48 = 2^4 \cdot 3$. Como o 48 não tem fatores primos diferentes dos fatores de 6 que é a base, então a expansão será finita e o comprimento será o $máx(4, 1) = 4$, vejamos:

$$\frac{7}{48} = \frac{7}{2^4 \cdot 3} = \frac{189}{2^4 \cdot 3^4} = \frac{5 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6 + 3}{6^4} = \frac{5 \cdot 6^2}{6^4} + \frac{1 \cdot 6}{6^4} + \frac{3}{6^4} = \frac{0}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{3}{6^4} = (0, 0513)_6$$

Exemplo 3.2 : Determinar a expansão de $\frac{19}{192}$ na base 12.

Observe que $192 = 2^6 \cdot 3 = (2^2)^3 \cdot 3$. Como o 192 não tem fatores primos diferentes dos fatores da base $12 = 2^2 \cdot 3$, então a expansão será finita e o comprimento será o $máx\{3, 1\} = 3$, vejamos:

$$\frac{19}{192} = \frac{19}{2^6 \cdot 3} = \frac{171}{(2^2)^3 \cdot 3^3} = \frac{1 \cdot 12^2 + 2 \cdot 12 + 3}{12^3} = \frac{1 \cdot 12^2}{12^3} + \frac{2 \cdot 12}{12^3} + \frac{3}{12^3} = \frac{1}{12} + \frac{2}{12^2} + \frac{3}{12^3} = (0, 123)_{12}$$

3.2 Expansão infinita e periódica

Teorema 3.2 Sendo $\frac{p}{q}, q \neq 0$ uma fração ordinária irredutível, a expansão de $\frac{p}{q}$ na base b é uma dízima periódica simples se $\text{mdc}(b, q) = 1$ e terá período com s dígitos, sendo s a menor solução inteira positiva da equação $b^s \equiv 1 \pmod{q}$.

Demonstração. Se s é o menor inteiro positivo, tal que $b^s \equiv 1 \pmod{q}$, então $b^s - 1 = qu$, para algum inteiro u . Mas $u < b^s$, daí u na base b é dado por $u = d_{s-1}b^{s-1} + d_{s-2}b^{s-2} + \dots + d_1b^1 + d_0 = (d_{s-1}d_{s-2}b^{s-2} \dots d_1d_0)_b$ com $0 \leq d_k < b, k = 0, 1, 2, \dots, s-1$. Logo $b^s - 1 = qu$. Equivalentemente,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{q} &= \frac{u}{b^s - 1} = \frac{d_{s-1}b^{s-1} + d_{s-2}b^{s-2} + \dots + d_1b^1 + d_0}{b^s} \left(\frac{1}{1 - b^{-s}} \right) \\
 &= \frac{d_{s-1}b^{s-1} + d_{s-2}b^{s-2} + \dots + d_1b^1 + d_0}{b^s} \left(1 + \frac{1}{b^s} + \frac{1}{b^{2s}} + \frac{1}{b^{3s}} + \dots \right) \\
 &= 0, \underbrace{d_{s-1} \dots d_1 d_0}_{s \text{ - zeros}} + 0, \underbrace{00 \dots 0}_{2s \text{ - zeros}} d_{s-1} \dots d_1 d_0 + 0, \underbrace{00 \dots 0}_{3s \text{ - zeros}} d_{s-1} \dots d_1 d_0 + \dots \\
 &= (0, \underbrace{d_{s-1} d_{s-2} \dots d_2 d_1 d_0}_{\text{Período com } s\text{-algarismos}})_b.
 \end{aligned}$$

■

Como vimos no item 4 das propriedades da função φ , o comprimento do período s é chamado $s = ord_n(b)$. A função φ de Euler torna-se uma ferramenta importante para determinar o período de uma expansão, pois o comprimento do período s será um divisor de $\varphi(q)$.

Exemplo 3.3 : Determinar a expansão de $\frac{5}{168}$ na base 11.

Como o $mdc(168, 11) = 1$ e $\varphi(168) = \varphi(2^3 \cdot 3 \cdot 7) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(3) \cdot \varphi(7) = (2^3 - 2^2) \cdot 2 \cdot 6 = 48$, $s = ord_{168}^{11} | \varphi(168)$, portanto $s \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$. Note que,

$$11^1 \equiv 11 \pmod{168}, \quad 11^2 \equiv 121 \pmod{168}, \quad 11^3 \equiv 155 \pmod{168}, \quad e \quad 11^6 \equiv 1 \pmod{168}.$$

Temos $s = 6$, e $168 | 11^6 - 1 \Rightarrow 11^6 - 1 = 168 \cdot k$, com $k \in \mathbb{N}$, logo $k = 10545$. Então

$$\begin{aligned} \frac{5}{168} &= \frac{5k}{11^6 - 1} = \frac{5 \cdot 10545}{11^6 - 1} = \frac{52725}{11^6 - 1} = \frac{3 \cdot 11^4 + 6 \cdot 11^3 + 6 \cdot 11^2 + 8 \cdot 11 + 2}{11^6 - 1} \\ &= \frac{0 \cdot 11^5 + 3 \cdot 11^4 + 6 \cdot 11^3 + 6 \cdot 11^2 + 8 \cdot 11 + 2}{11^6} \cdot \frac{1}{(1 - 11^{-6})} \\ &= \frac{0 \cdot 11^5 + 3 \cdot 11^4 + 6 \cdot 11^3 + 6 \cdot 11^2 + 8 \cdot 11 + 2}{11^6} \cdot \left(1 + \frac{1}{11^6} + \frac{1}{11^{12}} + \frac{1}{11^{18}} + \dots \right) \\ &= \left(\frac{0}{11} + \frac{3}{11^2} + \frac{6}{11^3} + \frac{6}{11^4} + \frac{8}{11^5} + \frac{2}{11^6} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{11^6} + \frac{1}{11^{12}} + \frac{1}{11^{18}} + \dots \right) \\ &= \frac{0}{11} + \frac{3}{11^2} + \frac{6}{11^3} + \frac{6}{11^4} + \frac{8}{11^5} + \frac{2}{11^6} + \frac{0}{11^7} + \frac{3}{11^8} + \frac{6}{11^9} + \frac{6}{11^{10}} + \frac{8}{11^{11}} + \dots \\ &= (0, \overline{036682})_{11} \end{aligned}$$

Teorema 3.3 Seja $\frac{p}{q}, q \neq 0$ uma fração ordinária irredutível, $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ uma base com p_i primos, os inteiros $\alpha_i \geq 0$, $q = m_0 \cdot (p_1^{\alpha_1})^{\beta_1} \cdot (p_2^{\alpha_2})^{\beta_2} \cdot (p_3^{\alpha_3})^{\beta_3} \dots (p_k^{\alpha_k})^{\beta_k}$ com $\beta_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \dots, k$, sendo m_0 um inteiro positivo tal que $mdc(m_0, b) = 1$, então a expansão de $\frac{p}{q}$ na base b será uma dízima periódica composta com período de s dígitos, sendo s a menor solução inteira da equação $b^s \equiv 1 \pmod{m_0}$ e anteperíodo de w dígitos, onde $w = \text{máx}\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k\}$.

Demonstração. De fato, seja $w = \text{máx}\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k\}$, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{1}{m_0 \cdot (p_1^{\alpha_1})^{\beta_1} \cdot (p_2^{\alpha_2})^{\beta_2} \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k})^{\beta_k}} = \frac{(p_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1} \cdot (p_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2} \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k}}{(p_1^{\alpha_1})^w \cdot (p_2^{\alpha_2})^w \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k})^w \cdot m_0} \\ &= \frac{(p_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1} \cdot (p_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2} \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k}}{b^w \cdot m_0}. \end{aligned}$$

Pelo algoritmo da divisão, temos que $(p_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1} \cdot (p_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2} \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k} = M \cdot m_0 + z$, com $0 \leq z < m_0$ e

$$\frac{1}{q} = \frac{M \cdot m_0 + z}{b^w \cdot m_0} = \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w \cdot m_0}.$$

Como q possui pelo menos um fator primo diferente dos fatores primos da base $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, temos que $0 \leq z < m_0 < b^w$, ou seja, $z < b^w$. Além disso,

$$\frac{1}{q} \cdot b^w = \frac{M \cdot m_0 + z}{m_0} = M + \frac{z}{m_0} \quad \text{com } 0 \leq \frac{z}{m_0} < 1, \quad \text{logo } M < b^w.$$

Se s é o menor inteiro positivo, tal que $b^s \equiv 1 \pmod{m_0}$, então $b^s - 1 = m_0 u$, para algum inteiro u , então $u < b^s$. Portanto $uz < b^{w+s}$. Assim podemos escrever:

$$M = a_{w-1} \cdot b^{w-1} + a_{w-2} \cdot b^{w-2} + \cdots + a_1 \cdot b + a_0 = (a_{w-1} a_{w-2} \cdots a_1 a_0)_b \quad \text{com } 0 \leq a_k < b, \quad k = 0, 1, 2, \dots, w-1 \text{ e com}$$

$$uz = d_{w+s-1} b^{w+s-1} + d_{w+s-2} b^{w+s-2} + \cdots + d_1 b^1 + d_0 = (d_{w+s-1} d_{w+s-2} \cdots d_1 d_0)_b \quad \text{com } 0 \leq d_k < b, \quad k = 0, 1, 2, \dots, w+s-1, \text{ dessa forma obtemos}$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w} \frac{1}{m_0} = \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w} \frac{u}{b^s - 1} = \frac{M}{b^w} + \frac{z}{b^w} \frac{u}{b^s} \left(\frac{1}{1 - b^{-s}} \right) \\ &= \frac{a_{w-1} \cdot b^{w-1} + a_{w-2} \cdot b^{w-2} + \cdots + a_1 \cdot b + a_0}{b^w} + \frac{zu}{b^{w+s}} \left(1 + \frac{1}{b^s} + \frac{1}{b^{2s}} + \frac{1}{b^{3s}} + \cdots \right) \\ &= \frac{a_{w-1} \cdot b^{w-1} + \cdots + a_1 \cdot b + a_0}{b^w} + \frac{d_{w+s-1} b^{w+s-1} + \cdots + d_1 b^1 + d_0}{b^{w+s}} \left(1 + \frac{1}{b^s} + \frac{1}{b^{2s}} + \cdots \right) \\ &= 0, \underbrace{a_{w-1} \cdots a_2 a_1 a_0}_{w \text{ - dígitos}} + 0, \underbrace{000 \cdots 0}_{w+s \text{ - zeros}} d_{w+s-1} \cdots d_1 d_0 + 0, \underbrace{000 \cdots 0}_{w+2s \text{ - zeros}} d_{w+s-1} \cdots d_1 d_0 + \\ &+ 0, \underbrace{000 \cdots 0}_{w+3s \text{ - zeros}} d_{w+s-1} \cdots d_1 d_0 + 0, \underbrace{000 \cdots 0}_{w+4s \text{ - zeros}} d_{w+s-1} \cdots d_1 d_0 + \cdots \\ &= (0, \underbrace{a_{w-1} \cdots a_2 a_1 a_0}_{w \text{ - algarismos}} \overbrace{d_{w+s-1} d_{s-2} \cdots d_2 d_1 d_0}^{\text{Período com } s\text{-algarismos}})_b. \end{aligned}$$

■

Exemplo 3.4 : Determinar a expansão hexadecimal de $\frac{398131}{5591040}$.

Temos que: $\frac{398131}{5591040} = \frac{359.1109}{2^{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{359.1109}{16^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$ e o comprimento da parte não periódica será 3.

$$\text{Por outro lado, } \frac{398131}{5591040} = \frac{398131}{16^3 \cdot 1365} = \frac{291 \cdot 1365 + 916}{16^3 \cdot 1365} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3 \cdot 1365}.$$

Como o $\text{mdc}(16, 1365) = 1$, o período s da expansão de $\frac{1}{1365}$ na base 16, é dado por $s = \text{ord}_{1365}(16)$.

Mas $\varphi(1365) = \varphi(3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13) = \varphi(3) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(7) \cdot \varphi(13) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 576$ e como $s \mid \varphi(1365)$, $s \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 64, 72, 96, 144, 192, 288, 576\}$.

Fazendo a verificação:

$$16^1 \equiv 16 \pmod{1365}, \quad 16^2 \equiv 256 \pmod{1365} \text{ e } 16^3 \equiv 1 \pmod{1365}.$$

Com isso concluímos que $s = 3$. Por outro lado $16^3 \equiv 1 \pmod{1365} \Rightarrow 16^3 - 1 = 1365 \cdot k$,

com $k \in \mathbb{N}$, verificamos facilmente que $k = 3$ e $\frac{1}{1365} = \frac{3}{16^3 - 1}$. Então

$$\begin{aligned} \frac{398131}{5591040} &= \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3} \cdot \frac{1}{1365} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3} \cdot \frac{3}{16^3 - 1} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3} \cdot \left[\frac{3}{16^3} \cdot \left(\frac{1}{1 - 16^{-3}} \right) \right] \\ &= \frac{291}{16^3} + \frac{2748}{16^6} \cdot \left(1 + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{16^6} + \frac{1}{16^9} + \frac{1}{16^{12}} + \dots \right) \\ &= \frac{291}{16^3} + \frac{2748}{16^6} + \frac{2748}{16^9} + \frac{2748}{16^{12}} + \frac{2748}{16^{15}} + \frac{2748}{16^{18}} + \frac{2748}{16^{21}} + \dots \\ &= \frac{1 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16 + 3}{16^3} + \frac{10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 12}{16^6} + \frac{10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 12}{16^9} + \\ &+ \frac{10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 12}{16^{12}} + \frac{10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 12}{16^{15}} + \dots \\ &= \frac{1 \cdot 16^2}{16^3} + \frac{2 \cdot 16}{16^3} + \frac{3}{16^3} + \frac{10 \cdot 16^2}{16^6} + \frac{11 \cdot 16}{16^6} + \frac{12}{16^6} + \frac{10 \cdot 16^2}{16^9} + \frac{11 \cdot 16}{16^9} + \frac{12}{16^9} + \\ &+ \frac{10 \cdot 16^2}{16^{12}} + \frac{11 \cdot 16}{16^{12}} + \frac{12}{16^{12}} + \dots \\ &= \frac{1}{16} + \frac{2}{16^2} + \frac{3}{16^3} + \frac{10}{16^4} + \frac{11}{16^5} + \frac{12}{16^6} + \frac{10}{16^7} + \frac{11}{16^8} + \frac{12}{16^9} + \frac{10}{16^{10}} + \\ &+ \frac{11}{16^{11}} + \frac{12}{16^{12}} + \frac{10}{16^{13}} + \dots \\ &= (0, 123ABCABCABCABC\dots\dots)_{16} = (0, 123\overline{ABC})_{16} \end{aligned}$$

Finalmente, se $\frac{1}{q}$ gera uma dízima periódica simples de comprimento $q - 1$, então outro fato bastante interessante pode ser notado. Se k é um número inteiro positivo, tal que $1 < k < q$, então, o período da expansão de $\frac{k}{q}$ em uma base b tem exatamente os mesmos algarismos ciclicamente permutados. Observe a expansão decimal de frações cujo denominador é 7, que contém 6 dígitos.

$$\frac{1}{7} = 0, \overline{142857}, \quad \frac{2}{7} = 0, \overline{285714}, \quad \frac{3}{7} = 0, \overline{428571}, \quad \frac{4}{7} = 0, \overline{571428}$$

Eles têm os mesmos dígitos permutados ciclicamente. Devemos ter cuidado, no entanto, para lembrar que o período deve conter $q - 1$ dígitos, como mencionado acima. Veja que na expansão decimal de: $\frac{1}{13} = 0, \overline{076923}$ e $\frac{3}{13} = 0, \overline{230769}$ temos os mesmos dígitos permutada ciclicamente em seus períodos, mas isto não vale para todos os k tal que $1 < k < q$. Por exemplo, $\frac{5}{13} = 0, \overline{384615}$.

Teorema 3.4 Se $\frac{1}{q}$ é uma fração, cujo período contém $q-1$ dígitos, e b uma base numérica, tal que $\text{mdc}(b, q) = 1$, então o período da expansão na base b da fração $\frac{k}{q}$, em que $1 < k < q$, tem os mesmos algarismos ciclicamente permutados.

Demonstração. De fato, uma condição necessária para o período da fração $\frac{1}{q}$ conter $q-1$ dígitos, é que cada número inteiro positivo inferior q apareça uma, e apenas uma vez, nos primeiros $q-1$ passos da divisão. Assim, k é um desses restos obtidos na divisão de 1 por q . O numerador k influi apenas para saber qual o primeiro algarismo periódico, depois que o primeiro ocorrer os demais se sucedem na mesma ordem cíclica. ■

4 Conclusões

Apresentamos uma aplicação importante da função φ de Euler. Por meio desta função descrevemos como transformar as frações ordinárias irredutíveis em dízimas periódicas simples e compostas em qualquer base.

Referências

- [1] HEFEZ, A. Elementos da aritmética, Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, Rio de Janeiro. 2006.
- [2] ROSA, A.P. e SILVA, J.N. História de Frações, *Gazeta da Matemática*, v.153, p.23-31, 2007.
- [3] BULLYNCK, M. Decimal Periods and Their Tables: A German Research Topic (1765-1801), *ScienceDirect:Historia Mathematica*, v.36, p.137-160, 2009.
- [4] DOLISI, E.E. Periodic Decimal Fractions, Tese de Doutorado, Teachers College of Emporia, Emporia/Kansas State, USA. 1973.
- [5] LIMA, E.L. Voltando a falar sobre dízimas, *Revista do professor de matemática - RPM*, v.10, p.23-28, 1987.

Viabilidade Mecânica da Substituição de Areia por Vidro Moído no Concreto

Mechanical Viability of Replacement of Sand by Ground Glass in Concrete

Fernando Ernesto Ucker

Escola de Engenharia - Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC/GO), Goiânia,
Goiás

ferucker@gmail.com

Felipe Corrêa Veloso dos Santos

Escola de Engenharia - Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC/GO), Goiânia,
Goiás

felipecv Santos@hotmail.com

Resumo: Este trabalho teve como objetivo avaliar a viabilidade mecânica e aplicabilidade da substituição de areia por vidro moído na fabricação do concreto. Para isso, foi realizada a caracterização dos materiais que compõem o concreto, além do vidro reutilizado a partir de garrafas *longnecks*, que foi o material adotado nesta pesquisa como alternativa sustentável. Após a caracterização dos materiais com o enquadramento nas normas nacionais cabíveis, foram rodados concretos com diferentes porcentagens de substituição da areia por vidro (5%, 10% e 50%) e um concreto sem a presença do vidro, como amostra de referência. Para cada concreto foram moldados corpos de prova, que passaram pelo processo de cura e ensaiados à ruptura por compressão nas idades de 7 e 28 dias. Com os resultados obtidos pela ruptura dos corpos de prova foram realizadas análises estatísticas para determinação dos contrastes entre as médias, procedendo-se a aplicação do Teste de Tukey ao nível de 5% de significância. Assim, foi possível observar que a substituição parcial de areia por vidro no concreto é viável mecanicamente, pois produz resultados semelhantes e até superiores quanto à resistência a compressão, tendo em vista tratar-se de um material de fácil obtenção, não retornável, exigindo destinação adequada, além da necessidade cada vez maior do aperfeiçoamento nas técnicas sustentáveis de produção de concreto na construção civil.

Palavras-chave: construção civil; areia; vidro moído.

Abstract: The objective of this work was to evaluate the mechanical feasibility and applicability of the replacement of sand by ground glass in the manufacture of concrete. For this, the characterization of the materials that compose the concrete was performed, as well as the glass reused from bottles *longnecks*, which was the material adopted in this research as a sustainable alternative. After the characterization of the materials according to the applicable national standards, concrete samples were run with different percentages of sand replacement by glass (5%, 10% and 50%) and a concrete without glass as a reference sample. For each concrete, specimens were molded, which passed through the curing process and were tested at compression rupture at the ages of 7 and 28 days. With the results obtained by the rupture of the test specimens, statistical analyzes were carried out to deter-

mine the differences between the means, and the Tukey test was applied at the 5% level of significance. Thus, it was possible to observe that the partial substitution of sand by glass in the concrete is mechanically viable, since it produces similar and even superior results regarding the compressive strength, considering that it is an easily obtainable, non-returnable material, requiring disposal Adequate, in addition to the increasing need for improvement in the sustainable techniques of concrete production in civil construction.

Key words: construction; sand; crushed glass.

1 Introdução

O concreto é o material mais utilizado na construção civil atualmente. Segundo pesquisa realizada pela Associação Brasileira de Cimento Portland (ABCP), a produção de concreto em centrais atingirá 72,3 milhões de m^3 em 2017, crescimento estimado em 41,2% no período de cinco anos, a uma taxa anual de 7,1%. O concreto se destaca como um bom material construtivo devido, principalmente, às propriedades resistência à água e plasticidade, que possibilita sua moldagem em diversas formas. Devido sua grande utilização, este material passa a ser um inimigo do pensamento sustentável, principalmente pela utilização de matérias-primas não renováveis, como a brita, a areia e o calcário [1].

A reciclagem no Brasil evoluiu muito nos últimos anos, porém ainda deixa muito a desejar. Segundo a Associação Técnica Brasileira das Indústrias Automáticas de Vidro (ABIVIDRO), em 2008, apenas 32,3% das cidades brasileiras tinham um programa de coleta seletiva. Nesta questão, o vidro é um dos produtos que pode ser 100% reciclado. Porém, segundo a mesma associação, até 2007 apenas 49% do vidro eram reciclados no país [2].

Quando não disposto à reciclagem, o resíduo é destinado aos aterros sanitários ou até para lixões, formas primitivas e condenadas por órgãos ambientais para a deposição de lixo, causando diversos danos ambientais. Para reduzir a grande disposição de resíduos nestes locais, a reciclagem dos materiais é de fundamental importância, tanto pela diminuição da exploração de recursos não renováveis quanto pela redução do lixo acumulado nos lixões e aterros.

Segundo Azevedo [3] e Righi [4] na produção do concreto, a substituição de areia por vidro reciclado vem sendo estudada por diversos pesquisadores, e este método já é bastante utilizado em alguns países como Austrália [5] e Estados Unidos [6].

Dois fatores são mais notórios na substituição da areia pelo vidro moído. Em primeiro, a reação álcali-agregado, que está relacionada às forças de ligação entre as partículas de vidro e pasta, que são mais fracas que as com a areia natural e, em segundo, o efeito pozolânico que pode trazer benefícios ao concreto. Existe uma porcentagem adequada de substituição de areia por vidro que é ideal para que não diminua a resistência do concreto e há uma faixa granulométrica ideal para se evitar problemas causados pela reação álcali-agregado e alcançar o efeito pozolânico [7, 8, 9].

Com base no exposto acima, foi objetivo deste trabalho a avaliação da viabilidade mecânica e a aplicabilidade da substituição de areia por vidro moído na fabricação de concreto.

2 Material e Métodos

O estudo experimental foi realizado na Faculdade Araguaia, que se encontra na Avenida T-10, nº 1047, no Setor Bueno, município de Goiânia, Estado de Goiás. Foram utilizados os laboratórios de construção civil e resistência dos materiais, e realizadas análises e caracterizações dos agregados miúdos e graúdos, além da utilização de equipamentos para o amassamento do concreto e os ensaios de resistência à compressão.

O vidro utilizado neste trabalho foi obtido por meio da moagem de garrafas *longnecks*, que foram adquiridas em distribuidoras de bebidas do município de Goiânia. Estes tipos de garrafas não são retornáveis, o que não é interessante para as distribuidoras, pois são materiais descartáveis e, desta forma, a obtenção destas é facilitada. Após o recebimento, as garrafas foram lavadas, sendo retirados os rótulos e os resíduos presentes no interior das mesmas, sendo posteriormente secas ao sol, para que assim, fosse possível realizar a moagem do vidro sem que houvessem substâncias que pudessem modificar ou danificar o resultado do experimento.

O procedimento de moagem do vidro foi realizado utilizando-se de um moinho elétrico. Para atingir uma menor finura do vidro, foi adicionada no moinho uma tela de aço. Com a utilização de uma peneira de malha 2,36 mm, foram separados os cacos de vidro do pó de vidro moído, e os cacos foram passados várias vezes no moinho até que só restasse pó de vidro com a menor finura possível. Os demais materiais utilizados nesta pesquisa foram adquiridos em lojas de materiais de construção do município.

A caracterização dos materiais utilizados nesta pesquisa se deu pela análise dos agregados. Basicamente, estes foram avaliados quanto à granulometria, pela NBR NM 248 [10], massa específica, a partir das NBR NM 52 [11] para agregados miúdos e NBR NM 53 [12] para agregados graúdos. Ainda foi determinada a umidade total de agregados miúdos, tendo como base a NBR 9.939 [13].

Foi substituída a areia pelo vidro moído nas porcentagens de 5, 10 e 50%. Também foram moldados corpos-de-prova sem a substituição de vidro moído, a fim de se obter uma amostra testemunha. O traço utilizado para o experimento foi o padrão 1:5 com teor de argamassa de 55%, com a utilização de cimento Portland (CP II-Z-32 Tocantins), areia grossa, brita zero e do aditivo FRITZ Supercizer 2 (superplastificante). Para a obtenção de um concreto com boa trabalhabilidade e boa consistência (*slump test*) que seria maior que 8 cm para vigas e 12 cm para pilares, para se evitar o segregamento. Foram realizados diferentes traços, até que se obteve um traço que atendeu aos requisitos de trabalhabilidade e *slump* (maior que 12 cm). Assim, o traço adotado foi na relação cimento:areia grossa:brita zero: água:aditivo de 1:2,3:2,7:0,55:0,0045, respectivamente.

A quantidade de materiais para cada rodagem de concreto foi baseada no traço unitário em massa, considerando-se as umidades dos materiais. Visto que, para cada traço rodado de concreto seriam necessários 15 corpos-de-prova de dimensões de 20 cm de altura e 10 cm de diâmetro, foi utilizada a Equação (1) para obtenção da quantidade de materiais.

$$M_c = \frac{v}{\frac{1}{pc} + \frac{a}{pa} + \frac{b}{pb} + a/c}, \quad (1)$$

onde $M_c \equiv$ massa de cimento por volume, $pc \equiv$ massa específica do cimento, $pa \equiv$ massa específica da areia, $pb \equiv$ massa específica da brita, $a/c \equiv$ relação água cimento e $v \equiv$ volume.

A partir da massa de cimento foram calculadas as massas dos outros materiais, de acordo com o traço. Com as porcentagens de substituição, a areia foi sendo substituída pelo vidro em cada traço. Como a pasta do concreto tende a aderir às paredes da betoneira, geralmente

é recomendável fazer uma lubrificação prévia da mesma com um concreto traço 1:2:3, com 1 kg de cimento. Para isso, molhou-se previamente a betoneira, foi acrescentada a brita, água e areia. Acrescentou-se mais água até a formação de um concreto com a trabalhabilidade adequada. Retirou-se então o material com a betoneira em movimento, desligou-se a betoneira, de onde foi retirado o restante do concreto, deixando-se uma camada de pasta aderida por toda a cuba. Após a lubrificação da betoneira, colocou-se a brita, o cimento e a areia, sempre sendo intercalados com água.

O ensaio do Slump test foi determinado de acordo com a NBR NM 67 [14], e realizado duas vezes para cada um dos quatro concretos rodados. Para o ensaio foram utilizados molde do cone, placa, haste de socamento e régua milimetrada. Primeiramente, o molde e a placa foram umedecidos e colocados em posição. Colocou-se os pés sobre as aletas do molde para fixá-lo e foram colocadas 3 camadas de concreto fresco, cada uma com 1/3 do volume do molde, compactando-se cada uma das camadas com 25 golpes, distribuídos uniformemente sobre a seção de cada camada. Após isto foi nivelada a borda do cone com a haste, e a placa foi limpa antes da retirada do molde, levantando-o cuidadosamente na vertical. Imediatamente após a retirada do molde, foi medido o abatimento do concreto, determinado pela diferença entre a altura do molde e a altura do eixo do corpo de prova desmoldado, medido pela régua.

Foi realizada a moldagem dos corpos de prova para cada porcentagem de acordo com a NBR 5.738 [15]. Os equipamentos utilizados foram moldes cilíndricos de dimensões 20 cm de altura e 10 cm de diâmetro, e haste de adensamento. De acordo com esta norma, para corpos de prova cilíndricos com diâmetro de 10 cm, o número de camadas de adensamento para um adensamento manual é de duas camadas com doze golpes para cada camada. Desta forma, para o procedimento de moldagem dos corpos de prova, primeiramente os moldes e suas bases receberam uma camada de óleo mineral em sua parede interna. Foi retirado o excesso de material com o rasamento feito pela haste. O procedimento foi realizado para os 15 corpos de prova de cada concreto rodado.

Após o molde dos corpos de prova, estes foram colocados em local protegido, livre de vibrações e de qualquer causa que pudesse perturbar o concreto durante as primeiras 24 horas. Devido a indisponibilidade de câmara fria para a cura dos corpos de prova, foi utilizada uma caixa d'água, com mistura saturada de água e cal, para atender as condições de cura dos corpos de prova. Após as primeiras 24 horas, de cura inicial, os corpos de prova foram desmoldados e colocados na caixa d'água até o dia do seu rompimento.

O ensaio de compressão foi realizado de acordo com a NBR 5.738 [15] para cada porcentagem de substituição de areia por vidro, nas idades de 7 e 28. Os corpos de prova foram tirados do local de cura e levados imediatamente para o local de ruptura, mantendo-se as condições de temperatura, durante o ensaio, semelhantes às condições de cura. Os resultados de força foram obtidos automaticamente pela máquina no momento da ruptura, em kN.

A altura e o diâmetro dos corpos de prova foram considerados iguais aos do molde, 20 cm de altura e 10 cm de diâmetro. E para o cálculo da resistência, para cada um dos quatro concretos rodados foram ensaiados à compressão cinco corpos de prova por idade de ruptura (7 e 28 dias), utilizando a Equação (2), conforme prescreve a norma.

$$f_c = \frac{4F}{\pi * D^2}, \quad (2)$$

onde $f_c \equiv$ resistência a compressão(MPa), $F \equiv$ força máxima alcançada(N) e $D \equiv$ diâmetro do corpo-de-prova(mm).

A partir das porcentagens média retida e acumulada em cada peneira foi possível o cálculo

do módulo de finura, da dimensão máxima característica e o traçado da curva granulométrica de cada agregado, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1. *Composição granulométrica e características dos agregados utilizados na pesquisa*

Composição granulométrica			
	Vidro	Areia Grossa	Brita Zero
Peneiras (mm)	Porcentagem retida(%)		
12,5	0	0	4,41
9,5	0	0	35,03
6,3	0	0	40,11
4,75	0	0	14,67
2,36	9,29	8,28	0
1,18	44,92	26,79	0
0,6	24,4	31,23	0
0,3	15,75	26,49	0
0,15	4,2	5,83	0
Fundo	1,44	1,38	0
Características dos agregados			
	Vidro	Areia Grossa	Brita Zero
Módulo de finura	3,35	3,011	6,34
Dimensão máxima característica(mm)	4,75	4,75	12,5

A Tabela 1 mostra que o vidro e a areia grossa apresentam módulos de finura próximos e dimensões máximas características iguais. Pode-se também observar que o vidro possui maior quantidade de finos. Também foram verificadas as umidades e os pesos específicos do vidro e da areia, apresentados na Tabela 2.

Tabela 2. *Propriedades dos materiais*

	Umidade Média (%)	Massa específica (g/cm^3)	Massa esp. sat. sup. seca (g/cm^3)	Massa esp. aparente (g/cm^3)	Absorção de água (%)
Vidro	0	2,457	-	-	-
Areia	0,671	2,625	-	-	-
Brita	-	2,458	2,505	2,580	1,911

Na época do ensaio, a umidade relativa do ar estava baixa, justificando a baixa umidade da areia e provavelmente a umidade nula do vidro. A partir das massas específicas foi possível observar que a massa específica média do vidro e da areia são próximas.

Para a determinação do traço para o experimento foram necessárias algumas tentativas para que fosse utilizado um traço adequado para o estudo, que visava a utilização do concreto para qualquer atividade, inclusive para peças estruturais. O traço de referência que ofereceu uma boa trabalhabilidade e abatimento (*slump*) adequado foi o destacado na Tabela 5, e a partir dele foram obtidos os demais traços para os concretos com substituições de areia por vidro.

Tabela 3. Traços dos concretos utilizados na pesquisa

Concretos	Traço do concreto					
	Cimento	Areia Grossa	Vidro Moído	Brita Zero	Água	Aditivo
Referência	1	2,3	0	2,7	0,55	0,0045
5% de substituição	1	2,185	0,115	2,7	0,55	0,0045
10% de substituição	1	2,07	0,23	2,7	0,55	0,0045
50% de substituição	1	1,15	1,15	2,7	0,55	0,0045

Com os traços definidos foi possível o cálculo das quantidades necessárias de cimento para cada tipo de concreto rodado (Tabela 4), a partir da Equação 1, sendo que, inicialmente, foi definido a necessidade de 15 corpos-de-prova por concreto rodado.

Tabela 4. Quantitativo de corpos de prova, volume de concreto e massa de cimento por tipo de concreto

Concretos	Corpos-de-prova	Quantitativo de materiais		
	Total	Volume de concreto(cm^3)	Massa de cimento(kg)	Massa de cimento Considerada(kg)
Referência	15	23561,95	8,29	10
5% de substituição	15	23561,95	8,28	10
10% de substituição	15	23561,95	8,27	10
50% de substituição	15	23561,95	8,20	10

A partir das quantidades necessárias de cimento, do traço e da umidade dos materiais foi obtido o quantitativo de materiais cimento, areia grossa, vidro moído, brita zero, água e aditivo, em kg, para cada tipo de concreto rodado (Tabela 5).

Para cada concreto rodado foram realizados dois abatimentos e assim obteve-se o *slump* médio, representado na Tabela 6. Os abatimentos obtidos foram maiores que 12 cm, que é o valor mínimo para pilares, assim, como o estudo foi realizado com o objetivo do uso para qualquer tipo de concreto, considerando também o concreto estrutural, os resultados de *slump* foram satisfatórios. A obtenção de abatimentos maiores foi possível, provavelmente, devido ao aditivo superplastificante utilizado. De acordo com o fabricante, o superplastificante Supercizer 2 quando adicionado na quantidade normal de água de amassamento pode produzir um concreto com aumento de até 18 cm de *slump*.

Também foram realizadas as análises das resistências para cada porcentagem de substituição comparando os resultados por dias de ruptura, ou seja, para cada porcentagem foi analisada a mudança de resistência com o tempo.

Tabela 5. Quantitativo dos materiais para cada tipo de concreto

Concretos	Quantitativo de materiais (kg)					
	Cimento	Areia Grossa	Vidro Moído	Brita Zero	Água	Aditivo
Referência	10	23,154	0	27	5,346	0,0045
5% de substituição	10	21,997	1,150	27	5,353	0,0045
10% de substituição	10	20,839	2,300	27	5,361	0,0045
50% de substituição	10	11,577	11,500	27	5,423	0,0045

Tabela 6. *Abatimento dos concretos(Slump test)*

Concretos	Slump Médio (cm)
Referência	18,50
5% de substituição	18,10
10% de substituição	16,45
50% de substituição	17,65

Por fim, para os resultados dos ensaios de resistência dos concretos foram realizadas análises estatísticas utilizando-se o software Assistat [17]. Primeiramente foram analisadas as resistências por dia de rompimento, ou seja, para cada dia de rompimento foram comparadas as resistências de cada porcentagem de substituição (0, 5, 10 e 50%), utilizando o teste F e o teste de Tukey. Para todas as análises foram utilizadas significâncias ao nível de 1% ou 5%.

3 Resultados e Discussão

A Tabela 7 mostra que as resistências à compressão aos 7 dias, para todas as porcentagens de substituição não apresentaram diferença significativa, de acordo com o teste de Tukey. Estes resultados comprovam que a porcentagem de substituição de areia por vidro moído não traz benefício ao concreto na cura de sete dias.

Porém, para a idade de 28 dias, existe diferença significativa entre os resultados, sendo que os resultados da amostra testemunha e porcentagem de 50% não apresentam diferença significativa entre si, assim como, as porcentagens de 5% e 10% não apresentam diferença significativa, no entanto, comparando a amostra testemunha e 50% com 5% e 10%, verifica-se que a diferença é significativa. Neste caso, substituindo 5 ou 10% de areia do concreto por vidro moído obtém-se resistência maior do que um traço padrão, representado pela testemunha (Tabela 7).

Tabela 7. *Resistência (MPa) para cada porcentagem de substituição de areia por vidro.*

Idades	Testemunha	5%	10%	50%
7	13,692 ^a	16,484 ^a	16,726 ^a	13,01 ^a
28	14,7 ^b	21,244 ^a	19,408 ^a	15,454 ^b

Letras iguais na mesma linha não diferem significativamente pelo teste de Tukey a 5%

Os resultados obtidos para a resistência do concreto, nas idades definidas no estudo, mostraram que os concretos com substituição parcial de areia por vidro na faixa de 5%, 10% apresentaram resultados melhores que o próprio concreto de referência.

Como no experimento o vidro obteve maior quantidade de finos que a areia utilizada, estes resultados podem ter ocorrido devido ao efeito pozolânico, mencionado por Shao [8], os quais apontaram que a granulometria mais fina do vidro traz uma condição de material pozolânico ao vidro, até porque a pozolana tem a propriedade de reagir e se combinar com o hidróxido de cálcio, formando compostos estáveis de poder aglomerante como silicatos e aluminatos de cálcio hidratado [18]. Assim, em compostos a base de cimento Portland, como o concreto, a utilização de pozolana resulta em uma produção extra de silicatos de cálcio hidratados, que são mais estáveis e beneficiam o produto.

O concreto com 50% de substituição, nas idades de 7 e 28 dias, proporcionaram resultados inferiores às demais substituições, mostrando que, provavelmente, substituições com maiores porcentagens de vidro poderiam conduzir a valores mais baixos. No entanto, os resultados de 50% de substituição foram próximos aqueles atributos como referência.

É oportuno mencionar, que o aumento da massa de substituição de areia por vidro, leva à diminuição da resistência, provavelmente devido à menor força de ligação entre pasta e agregado, em comparação com a força de ligação com o uso total da areia como agregado miúdo [19], sem perder de vista que a substituição parcial da areia por vidro geralmente proporciona resultados semelhantes ao concreto convencional [20].

De um modo geral os resultados da resistência dos concretos foram baixos, podendo-se atribuir ao traço escolhido, o qual utilizou uma relação água/cimento (0,55), considerada alta. Segundo [21] a relação água e cimento (a/c) é considerada como parâmetro extremamente importante para o concreto estrutural. Porém, mesmo com os resultados baixos de resistência, o objetivo de comparação entre concretos não foi comprometido.

4 Conclusão

A substituição parcial da areia por vidro no concreto é possível, produzindo resultados convincentes. A faixa de substituição de 5 a 10% propicia resultados superiores à amostra testemunha, e que para até 50% de substituição não há diminuição significativa no que se refere à resistência à compressão. Tal prática pode tornar-se viável mecanicamente e necessária, pois a obtenção do vidro é facilitada, devido as garrafas serem materiais não retornáveis, estando a exigir destinação adequada, além do impositivo da cada vez mais crescente busca por técnicas efetivamente sustentáveis na produção de concreto na construção civil.

Entretanto, para uma melhor avaliação de tal experiência propõe-se a continuação dos estudos visando o aprimoramento da técnica, particularizando para o uso de traços mais fortes para o concreto, diferentes relações água/cimento, redução na granulometria do vidro moído utilizado, verificação da porcentagem crítica onde a resistência realmente tende a decrescer, além das resistências para concretos com mais de 50% de substituição.

Referências

- [1] CONCRETO E CONSTRUÇÕES. Concreto: Material construtivo mais utilizado do mundo. IBRACON, n.53. 2009.
- [2] ASSOCIAÇÃO TÉCNICA BRASILEIRA DAS INDÚSTRIAS AUTOMÁTICAS DE VIDRO. Reciclagem no Brasil – Infográfico. Disponível em: <http://www.abividro.org.br/reciclagem-abividro/reciclagem-no-brasil>
- [3] AZEVEDO, C. A. P.; LÓPEZ, D. A. R.; NETO, E. B. Avaliação das propriedades físicas e mecânicas de concretos produzidos com vidro moído com agregado fino. *Cerâmica*, v. 51, n. 1, p. 318-324, 2005.
- [4] RIGHI, D.; KOHLER, L.; KIRCHHOF, L.; LIMA, R. Efeitos da Substituição de Areia por Vidro Moído no comportamento de Concretos em Elevadas Temperaturas. *Engenharia Estudo e Pesquisa*, Santa Maria, v. 11, n. 02, p.28-35, jul/dez. 2011.

- [5] BROWN, T.; CRENTSIL, K.S.; TAYLOR, A. Recycled glass as sand replacement in premix concrete. Ed. Eco-Recycled Australia and CSIRO, 2001.
- [6] MEYER, C.; XI, Y. Use of Recycled Glass and Fly Ash for Precast Concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*, v.11, n.2, p.89-90. 1999.
- [7] BABU, K. G.; PRAKASH, P.V. *Cement and Concrete Research*. 25, 6. 1995.
- [8] SHAO, Y.; LEFORT T.; MORAS, S.; RODRIGUEZ, D. Studies on concrete containing ground waste glass. *Cement and Concrete Reserch*. Elmsford, v. 30, n.1, p.91-100, 2000
- [9] NEVILLE, A. M. Propriedades do concreto. 5. ed. São Paulo: Pini, 2015. Tradução de Salvador Ed. Giammusso.
- [10] ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR NM 248. Agregados – Determinação da composição granulométrica. Rio de Janeiro, 2003
- [11] ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR NM 52. Agregado miúdo – Determinação da massa específica e massa específica aparente e absorção de água. Rio de Janeiro, 2009.
- [12] ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR NM 53. Agregado graúdo – Determinação da massa específica e massa específica aparente e absorção de água. Rio de Janeiro, 2009.
- [13] ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 9.939. Agregado graúdo – Determinação doteor de umidade total – Método de ensaio. Rio de Janeiro, 2011
- [14] ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR NM 67. Concreto- Determinação da consistência pelo abatimento do tronco de cone. Rio de Janeiro, 1998.
- [15] ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 5738. Concreto – Procedimento para moldagem e cura de corpos-de-prova. Rio de Janeiro, 2008.
- [16] FRITZ-PAK – Concrete Admixtures. Disponível em: http://www.fritzpak.com/products/product_supercizer2.shtml.
- [17] SILVA, F.A.S. ASSISTAT: Versão 7.7 beta. DEAG-CTRN-UFCG – Atualizado em 01 de abril de 2014. Disponível em <http://www.assistat.com>.
- [18] NETTO, R. M. Materiais pozolânicos. Monografia (Trabalho de Especialização). Belo Horizonte, MG: Universidade Federal de Minas Gerais. 2006.
- [19] CRAMER, S.M.; POLLEY. C.; CRUZ, R.V. Potential for using waste glass in portland cement concrete. *ASCE Journal of Materials in Civil Engineering*, v.10, n.4, p.210-219. 1998
- [20] BARBOSA, F. R.; CARVALHO, J. R.; MOTA, J. M. F. C.; SILVA, A. J. C. Utilização de vidro reciclado para produção de concreto verde em Fernando de Noronha. Anais... Elecs. 2011.

- [21] HELENE, P.; TUTIKIAN, B.F. Concreto: Ciência e Tecnologia. cap. 12. IBRACON. 2011.
- [22] ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7211. Agregados para concreto – Especificação. Rio de Janeiro, 2009.

Uma Visão Geral Sobre *Antifeedants* em Insetos

An Overview of the Insects Antifeedants

Edjane Vieira Pires

Universidade Estadual de Alagoas, Palmeira dos Índios, AL
edjanevp@gmail.com

Cenira Monteiro de Carvalho

Faculdade São Vicente de Pão de Açúcar, Pão de Açúcar, AL
ceniramc@gmail.com

Resumo: A preocupação com o meio ambiente e o modo como as atividades econômicas nele se organizam, tem sido tema de vários estudos. Muitos insetos atuam, disseminando cultivos importantes para a sobrevivência do homem. Uma saída mais coerente é fazer uso de práticas de manejo integrado de pragas, que tem como propósito, manter a densidade populacional de um organismo abaixo do nível de dano econômico, sem a necessidade da utilização de pesticidas químicos (agroquímicos). Neste sentido, se encaixa um termo conhecido por muitos pesquisadores da área de ecologia química, que são os *Antifeedants*- Substâncias capazes de inibir a alimentação do inseto, por mecanismos fisiologicamente complexos. O objetivo dos pesquisadores acerca deste tema envolve a possibilidade de extrair das plantas um bioinseticida que, portanto, não cause danos ambientais e/ou sociais, como ocorre ao se fazer o uso indiscriminado dos pesticidas sintéticos. A síntese química, entretanto, pode contribuir muito, na formulação de um bioinseticida, utilizando como protótipo a molécula isolada de determinada planta. Neste estudo pretende-se fazer uma revisão da literatura em torno da ação antialimentar (“antifeedants”) que determinados compostos, naturais ou sintéticos, podem exercer em insetos, aqui encarados como pragas agrícolas.

Palavras-chave: bioinseticidas; controle de pragas; inibição alimentar.

Abstract: The concern about the environment and the way in which economic activities are organized in it has been the subject of many studies. Many insects have the task of disseminating cultivations that are important for human survival. A more coherent way out is to make the use of practices of integrated pest management, which has the purpose of keeping the population density of an organism below the level of economic damage, without the need of chemical pesticides (agrochemicals) utilization. In this sense, appears a well-known term among researchers in the field of chemical ecology: the “Antifeedants” – Substances capable of inhibiting the feeding of the insect by physiologically complex mechanisms. The objective of researchers on this theme involves the possibility of extracting from plants a bioinsecticide that, therefore, does not cause environmental and/or social damages, which happens when the indiscriminate use of synthetic pesticide is made. The chemical synthesis, however, can contribute greatly to the formulation of a bioinsecticide, using as a prototype the isolated molecule from a certain plant. This study intends to review the literature on the antifeedants action that certain compounds, natural or synthetic ones, may exert on insects, here displayed as agricultural pests.

Key words: bio-insecticides; pest control; feeding inhibition.

1 Introdução

O enorme aumento da população impõe a necessidade da produção de maior volume de alimentos, o que depende não só das boas práticas de cultivo, como também do controle das pragas, antes e após a colheita. As pragas provocam importantes danos para as culturas, trazendo a necessidade contínua da utilização de eficazes agentes de controle, sendo estes em maior parte, quimicamente sintetizados [1].

A maioria dos pesticidas convencionais, organoclorados, tal como o diclorodifeniltricloroetano DDT, endosulfan, e pentaclorofenol ou organofosforados: clorpirifós, monocrotofós e malation, são considerados altamente tóxicos para pássaros, animais selvagens e humanos. Devido a esse propósito, muitos deles foram proibidos em vários países ou estão prestes a serem proibidos [2].

O uso de insumos químicos, como pesticidas têm conferido aumentos significativos à produção e à produtividade agrícola. No entanto, as consequências negativas de tal uso têm aumentado muito. Estas consequências incluem danos às terras, à pesca, fauna e flora. Além disso, pode ocorrer ainda, a destruição não intencional de predadores benéficos de pragas, aumentando assim a ação de muitas espécies de pragas agrícolas. Vale ressaltar ainda, o aumento da mortalidade e morbidade de seres humanos devido à exposição a pesticidas, registrados especialmente nos países em desenvolvimento [3].

Devido aos impactos negativos do uso de substâncias inseticidas tóxicas em longo prazo, busca-se o isolamento e aplicação de “inseticidas naturais” conhecidos como “antifeedants”, que atuam no sistema nervoso central dos insetos [1]. Ao longo do tempo estes “inseticidas” vêm sendo estudado por apresentar vantagens como a facilidade de degradação, raro desenvolvimento de resistência pelos insetos, e menos danos aos seres humanos, animais e plantas [4, 5].

Um “antifeedant” é considerado como fator de impedimento da alimentação de insetos, podendo ser percebido quer pela estimulação de receptores especializados ou pela distorção da função normal de neurônios, que percebem compostos fagoestimulantes. Alguns “antifeedants” vegetais influenciam a atividade alimentar através de uma combinação destes dois principais modos de ação [6]. De maneira simplificada, um “antifeedant” é uma mistura de compostos de origem natural ou sintética, que pode inibir a alimentação de um inseto-praga, favorecendo a qualidade e conservação dos insumos agrícolas.

O contato por meio das quimiossensações promove comportamentos essenciais para sobrevivência dos insetos. Entre estes comportamentos, está aquele que inibe a alimentação, devido à ação de determinados compostos, “antifeedants”. A resposta fisiológica frente a estes inibidores alimentares ocorre por meio dos receptores gustativos [7, 8].

Em geral, os “antifeedants” não são agressivos ao meio ambiente e, podem atuar nas diferentes culturas através de defesa química [5]. Uma atividade significativa é, por vezes, observada a baixas concentrações, o que pode gerar uma especificidade, na atuação contra um grupo restrito de insetos-pragas, ou seja, outras espécies de insetos ficam ilesas [4, 5]. Um exemplo em que se observa boa resposta com baixa concentração, ocorre com o composto isolado da *Azadirachta indica* (A. Juss., 1830), chamado de azadiractina, que mostra um EC50 de 0,05 ppm (concentração na qual a substância provoca efeito adverso observado em 50% dos indivíduos observados), sendo este considerado um potente antialimentar [9]. A azadiractina é tida um potencial biopesticida, de forma que, inibe fortemente a alimentação, o crescimento e desenvolvimento de *Alphitobius diaperinus* (Panzer, 1797) (*Coleoptera:Tenebrionidae*) [7].

Apesar dos bons resultados já encontrados, sabe-se que ainda é necessário muito estudo

acerca do assunto, pois fatores fisiológicos não seguem sempre regras, determinado inseto pode responder a baixas concentrações de um composto antialimentar e outros não. Nos gafanhotos, por exemplo, o número de receptores gustativos é grande e com baixa especificidade e em lagartas esse número é baixo, mas com especificidade relativamente, alta [10]. Enquanto a azadiractina é um excelente composto antialimentar para o *Schistocerca gregária* (Forsk., 1775), com um EC50 de 0,05 ppm, o mesmo não mostra boa ação frente a outra espécie de gafanhoto (*Locusta migratória*) (Linnaeus, 1758), mesmo em concentrações de 1000 ppm [9].

2 “Antifeedants” de origem natural

O interesse científico na aplicação de antifeedants para controle de insetos teve impulso no final dos anos 1920, mas foi três décadas mais tarde que as propriedades únicas de antifeedants foram verdadeiramente reconhecidos [5]. Desde então, milhares de espécies de plantas têm sido pesquisadas para avaliação da presença de metabólitos com potencial antifeedant [11]. Gujar e Mehrotra [12] afirmam que folhas e frutos da árvore tropical Neem (*Azadirachta indica*) eram utilizados popularmente na Índia e no Sri Lanka, durante séculos para proteger livros, roupas e alimentos armazenados dos danos causados por insetos-pragas, porém sem nenhuma comprovação científica. Somente em 1962, um estudo realizado por Pradhan [13], evidenciou a ação antialimentar do neem frente a uma espécie de gafanhoto *S. gregaria*. Desde então esta espécie de planta originária da Índia, tem sido bastante testada frente aos diferentes insetos-pragas pelo seu potencial para atuar no controle de pragas por meio da sua ação antialimentar.

Dois estudos mais recentes foram realizados por Da Silva [14] e Reed [15], envolvendo a *Azadirachta indica*. No primeiro, constatou-se que o extrato hidroalcoólico obtido a partir de folhas de *A. indica* exerce efeitos antialimentares sobre *Zabrotes subfasciatus*, (Boheman, 1833) uma vez que, o inseto tende a não se alimentar das sementes do feijão (*Proteus vulgaris* (Hauser 1885) que foram tratadas com o extrato hidrometanólico das folhas do Neem. Enquanto Reed [15], mostrou que dois compostos isolados do extrato etanólico do Neem, também exercem efeito inibidor da alimentação frente a *Acalymma vittatum* (Fabricius, 1775), um besouro que ataca o cultivo de pepino, sendo estes compostos chamados de azadiractina e salannina.

A literatura também contém estudos da atividade antifeedants envolvendo frações extraídas de plantas que são ricas em óleos essenciais, onde conseqüentemente estão compostos terpênicos, conhecidamente ativos para essa atividade. Popović [16] relata que a fração de óleo essencial de *Ocimum basilicum* (Linnaeus, 1753) apresentou um índice antialimentar maior que 80% em larvas de *Lymantria dispar* (Linnaeus, 1758).

Uma classe de compostos orgânicos denominada diterpenos clerodano tem atraído considerável atenção devido ao potencial “antifeedants”, que é de longe a bioatividade mais estudada desses diterpenos. De acordo com estudos anteriores, mais de 300 clerodanes naturais e semisintéticos foram testados em laboratório, produzindo vários compostos com potente atividade “antifeedant” [17, 18].

Metabólitos secundários do tipo Clerodano já foram encontrados em várias espécies de plantas de várias famílias e nos organismos de outros grupos taxonômicos, tais como fungos, bactérias e esponjas marinhas [19, 20]. Especialmente diversos gêneros de plantas da família *Labiatae* e *Verbenaceae* já foram identificados como fontes ricas em clerodanos “antifeedants”; as espécies do gênero *Scutellaria* (*Labiatae*), produzem alguns dos mais potentes

clerodanos “antifeedants” [19, 21].

Em trabalhos realizados por Coll e Tandrón [18] uma nova família de diterpenos extraído da *Teucrium fruticans* (Linnaeus, 1753) denominado fruticolone 6-acetilteucjaponin B mostrou atividade “antifeedants” semelhante a dados, anteriormente relatados por Sosa [22].

Os compostos terpênicos têm sua atividade “antifeedants” avaliada há bastante tempo. Em 1981, Kubo e Ganjian [23], já relataram a ação de terpenos isolados das espécies *Warburgia ugandenses* (Sprague, 1906) e *Warburgia stuhlmannii* (Engler, 1895), comumente encontradas na África Oriental em larvas de *Spodoptera exempta* (Walker, 1856) e *Spodoptera litura* (Fabricius, 1775).

Entre os inibidores de alimentação natural, que vai além dos terpenos citados acima, existem também muitos compostos com um radical lactona [24, 25]. Estudos anteriores têm demonstrado que a introdução de um grupamento lactona em estruturas de compostos tais como (\pm)-limoneno, (R)-(-)-mirtenol, (-)- α -pineno, (+)-3-careno, (\pm)-canfeno aumenta consideravelmente a ação “antifeedants” em insetos [26, 27, 28]. As plantas das famílias *Asteraceae* e *Apiaceae* são particularmente ricas em lactonas [29].

Os taninos também atuam na defesa contra pragas, devido ao seu potencial de se complexarem com proteínas digestivas dos insetos, através da formação de ligações de hidrogênio [30]. Os taninos são compostos fenólicos, onde estão presentes grupos hidroxilas, indispensáveis para a formação das ligações de Hidrogênio, uma interação química comum entre muitas moléculas orgânicas.

Em geral, os taninos condensados são inibidores da digestão com menor efeito tóxico, quando comparados aos tepenóides [31]. No entanto, seus papéis como “antifeedants” dependem de vários fatores, incluindo o sistema gustativo, glândulas salivares, e sistema digestivo do inseto [32, 6]. Os taninos condensados são compostos fenólicos solúveis e água com massa molecular entre 500 e 3.000 daltons.

Em estudo realizado por Kathuria e Kaushik [33] faz uma comparação entre o extrato bruto de folhas da espécie *Eucalyptus camaldulensise* (Dehnh., 1832) e sua fração taninica, quanto a inibição alimentar das larvas de *Helicoverpa armigera* (Hübner, 1809), de modo que, lhe é ofertada, folhas de repolho tratadas com esses dois tipos de amostras. Como resultado, eles perceberam a maior atividade da fração taninica, com 40% de inibição na alimentação larval, enquanto a atividade biológica do Extrato de folhas foi inferior a 25%. Este tipo de estudo envolvendo larvas de insetos-pragas, é recorrente em estudos de ecologia química, tendo em vista que, essa fase do inseto provoca sérios danos a diversos tipos de plantações.

Os “antifeedants” à base de compostos ativos de plantas, pertencem às classes de compostos orgânicos classificados como: cromonas, poliacetilenos, saponinas, cucurbitacinas, ácidos ciclopropanóicos, fenólicos, alcalóides, vários tipos de terpenos e seus derivados, e cada espécie de inseto pode processar estes alomônios de maneira específica, de modo que, o mesmo composto pode ter destinos e conseqüências muito distintas em diversas espécies de insetos, o que aponta para diferentes mecanismos envolvidos nesta ação antialimentar [6]. Portanto, não existe um modelo único de resposta que justifique a ação antialimentar. Muitos estudos com extratos de plantas estão relatados na literatura, mas estudos envolvendo compostos isolados com uma química bem definida, ainda segue em avanço. O Quadro 1 ilustra alguns destes trabalhos.

Quadro 1. Classe de Compostos derivados de plantas relatadas por sua atividade antifeedants (a partir de 2004).

Espécie	Classe de compostos	Inseto(s) alvo	Referência
<i>Teucrium fruticans</i> L. (Lamiaceae)	Neo-clerodane	<i>Spodoptera littoralis</i> (Boisduval, 1833) (Noctuidae)	[34]Coll e Tandrón, 2005
<i>Ajuga remota</i> (Lamiaceae)	neo-Clerodane	<i>Spodoptera littoralis</i> (Boisduval, 1833) (Noctuidae)	[18]Coll e Tandrón, 2004
<i>Medicago sativa</i> L (Fabaceae)	Saponina	<i>Therioaphis maculata</i> (Buckton) (Aphididae)	[35]Mazahery-Lagha <i>et al.</i> , 2011
<i>Pieris formosa</i> D. Don (Ericaceae)	Diterpenos	<i>Helicoverpa armigera</i> (Hübner, 1805) (Noctuidae)	[36] Li, Chun-Huan <i>et al.</i> , 2010
<i>Angiopteris caudatififormis</i> Hieron (Angiopteridaceae)	lactonas	<i>Heliothis virescens</i> (Fabricius, 1777) (Noctuidae) <i>Plutella xylostella</i> (Linnaeus, 1758) (Plutellidae)	[37]Yu, Yong-Ming <i>et al.</i> , 2009
<i>Croton jatrophioides</i> Pax. (Euphorbiaceae)	Limonoides	<i>Pectinophora gossypiella</i> (Saunders 1844) (Gelechiidae) e <i>Spodoptera frugiperda</i> (J.E. Smith, 1797) (Noctuidae)	[38]Nihei, Ken-ichi <i>et al.</i> , 2006
<i>Senecio madagascariensis</i> (Asteraceae)	Flavonoides	<i>Spodoptera littoralis</i> (Boisduval, 1833) (Noctuidae)	[39]Burgueño-Tapia <i>et al.</i> , 2010
<i>S. barba-johannis</i> (Asteraceae)	Flavonoides	<i>Leptinotarsa decemlineata</i> (Say) (Boisduval, 1833) (Coleoptera)	[39]Burgueño-Tapia <i>et al.</i> , 2010
<i>Melia azadirachta</i> L (Meliaceae)	Terpenoides	<i>Rhopalosiphum padi</i> (L.) (Koch, 1854) (Aphididae) e <i>Sitobion avenae</i> (F.) (Fabricius, 1775) (Aphididae)	[40]Petroski e Stanley, 2009
<i>Lotus pedunculatus</i> Cav (Fabaceae)	Terpenoides	<i>Costelytra zealandica</i> (white) (Scarabaeidae)	[40]Petroski e Stanley, 2009
<i>Myristica fragrans</i> Hout (Myristicaceae) e <i>Cuminum cyminum</i> L. (Apiaceae)	Derivados lipídicos	<i>Sitophilus oryzae</i> L. (Schoenherr, 1838) (Curculionidae)	[41]Debnath <i>et al.</i> , 2012
<i>Cryptomeria japonica</i> (L.f.) D.Don. (Taxodiaceae)	Sesquiterpenos	<i>Locusta migratória</i> L. (Linnaeus, 1758) (Acrididae)	[42]Kashiwagi <i>et al.</i> , 2007
<i>Pterocarpus macrocarpus</i> Kruz (Leguminosae)	Flavonoides e sesquiterpenos	<i>Spodoptera litura</i> F. (Fabricius, 1775) (Noctuidae)	[43] Morimoto <i>et al.</i> , 2006
<i>Drimys winteri</i> J. R. (Winteraceae)	Sesquiterpenos	<i>Spodoptera littoralis</i> (Boisduval, 1833) (Noctuidae)	[44]Zapata <i>et al.</i> , 2009
<i>Swietenia mahoganii</i> (L.) Jacq. (Meliaceae)	Limonoides	<i>Spodoptera littoralis</i> (Boisduval, 1833) (Noctuidae)	[45]Abdelgaleil <i>et al.</i> , 2013
<i>Solanum tuberosum</i> (L.) (Solanaceae)	Glicoalcaloides	<i>Trogoderma granarium</i> (Everts, 1899)(Dermeestidae)	[46] Nenaah, 2011
<i>Lansium domesticum</i> Corr. Serr. (Meliaceae)	Terpenos	<i>Sitophilus oryzae</i> (L.) (Schoenherr, 1838) (Curculionidae)	[47]Omar <i>et al.</i> , 2007
<i>Xylocarpus granatum</i> KD K.D. Koenig. (Meliaceae)	Limonoides	<i>Mythimna separata</i> (Walker, 1865) (Noctuidae)	[48]Wu <i>et al.</i> , 2008
<i>Chloroxylon swietenia</i> DC. (Rutaceae)	Terpenos	<i>Spodoptera litura</i> (F.) (Fabricius, 1775)(Noctuidae)	[1]Kiran <i>et al.</i> , 2006
<i>Bobgunnia madagascariensis</i> (Fabaceae)	Flavonoide	<i>Tribolium castaneum</i> (Hubner.) (Tenebrionidae)	[49]Adeyemi <i>et al.</i> , 2010
<i>Cassia fistula</i> (Fabaceae)	Antraquinona	<i>Helicoverpa armigera</i> Hübner (Lepidoptera: Noctuidae)	[50]Duraipandiyane <i>et al.</i> , 2011
<i>Hymenoxys robusta</i> (Asteraceae)	Sesquiterpeno	<i>Spodoptera exigua</i> (Hübner)(Noctuidae)	[51]Juárez <i>et al.</i> , 2014
<i>Clerodendron infortunatum</i> L. (Lamiales: Lamiaceae)	Lactona	<i>Helicoverpa armigera</i> Hübner (Lepidoptera: Noctuidae)	[52]Abbaszadeh <i>et al.</i> , 2014

3 Fatores Químicos

Os compostos conhecidos como “antifeedants” ou antialimentar, ou ainda inibidor de alimentação de insetos têm normalmente estruturas químicas mais oxidadas ou insaturadas [6]. A presença ou ausência de atividade tem sido justificada pelas diferenças estruturais observadas. Estudos têm revelado que alguns fatores como características moleculares, substituição, ponto de ebulição, lipofilia, conformação, distribuição eletrônica, geometria, energias HOMO e LUMO, podem predizer a capacidade de “antifeedants” [53].

A eficiência na atividade também tem sido relacionada à presença de centros quirais nas moléculas, de maneira que apenas um dos enantiômeros é o responsável pela bioatividade [54]. No entanto, isto não é regra e sendo assim, os testes biológicos devem incluir a avaliação da atividade de todos os estereoisômeros possíveis dos compostos bioativos quirais [29].

De acordo com Wang *et al.* [53] os “antifeedants” mais desenvolvidos e aplicados são Terpenóides, neste sentido esses autores analisaram uma série de compostos Terpenóides, sintetizados, para verificar estatisticamente a relação entre estrutura química e atividade “antifeedants” em relação a *Lipaphis erysimi* (Kalt.) (Hemiptera: Aphididae) e constatou que fatores como teor de oxigênio, volume molecular, energia HOMO e LUMO e carga positiva total são fatores químicos que interferem na atividade relacionada.

Existem algumas limitações para a produção em grande escala do terpenóides “antifeedants”, como baixas concentrações nas plantas, a difícil extração e isolamento de terpenóide. A síntese química de terpenóides “antifeedants”, é uma alternativa à extração, mas é problemática devido à complexidade da estrutura molecular e à presença de centros quirais que tornam sua síntese cara e demorada. Como uma possível solução, os terpenóides provenientes da planta podem ser quimicamente modificados [53, 26].

Justamente, devido aos percalços relatados acima, é que muitos trabalhos são direcionados para testes, que envolvem os compostos sintéticos, de origem comercial ou reacional (e não natural), baseados no conhecimento científico prévio, sobre quais as classes de compostos são boas alternativas de inibidores alimentares. A exemplo, cinquenta e um compostos derivados do etilcinamato (composto sintético de origem) foram sintetizados e testados por Bohman *et al.* [55] onde os compostos mais potentes foram metil 3-phenylpropanoates monossustituídos com grupos cloro, flúor, ou metil e o 3,4-dicloro metil-3-fenilpropanoato de metil.

Os ácidos alcanóicos de cadeia média, como por exemplo, o ácido nonanóico é relatado como componente antialimentar para espécies adultas do gorgulho *Hylobius abietis* (Linnaeus, 1758) [56]. De acordo com os mesmos autores, ácidos de cadeia linear C6-C10 apresentam ação antifeedants e a presença de uma ramificação metila, é suficiente para diminuir essa ação.

A Cinamamida é conhecida por ter um efeito antialimentar quando usado como um revestimento de sementes [57]. As saponinas são também “antifeedants” e mostram toxicidade oral para animais superiores e inferiores. Modificações estruturais em saponinas tais como a variação no esqueleto de carbono, ou a hidrólise de glicósidos de saponina e outros conjugados, podem alterar os seus efeitos biológicos [44]. De maneira similar, a ausência de um grupo epóxido na estrutura química do terpeno chamado Limonina, leva a redução da atividade na molécula [58].

Muitos monoterpenos de origem vegetal tem sido avaliado como antialimentares de insetos [59, 60, 61] revelam que os bons resultados obtidos quando os monoterpenos são testados, ocorrem devido a presença de grupos carbonila (C=O) e cadeia lateral com ligações tripla carbono-carbono (C≡C). Além disso, segundo os autores, ficou evidenciado que a redução

da atividade dos monoterpenos, está atrelada ao aumento da cadeia alquílica lateral, provavelmente devido ao efeito doador de elétrons desses grupos alquílicos e ao aumento do impedimento estérico.

4 Considerações finais

Observando os levantamentos e as considerações feitas pelos autores pode-se concluir que os estudos que envolvem uma combinação "interdisciplinaridade e atividade" podem ajudar no desenvolvimento de um "coquetel" de inibidores de alimentação que podem ser utilizados como uma formulação personalizada contra uma determinada categoria de praga, isto é, desenvolver potenciais biopesticidas.

Apesar de a aplicação prática de "antifeedants" ainda ser limitada e poucos deles, naturais ou sintéticos serem comercialmente disponíveis, a ideia geral parece ser a aplicação dos "antifeedants" de maneira ampla, isto é, para grande número de diferentes pragas alvo ou partes da planta. Outra vertente, bastante questionada, inclui as pesquisas com plantas geneticamente modificadas, como uma possibilidade para produzir as substâncias ativas antialimentar em quantidades elevadas o suficiente, para proteger as plantas de danos causados pelos insetos herbívoros.

Referências

- [1] KIRAN, S.R; REDDY, A.S; DEVI, P.S; REDDY, K.J. Insecticidal, antifeedant and oviposition deterrent effects of the essential oil and individual compounds from leaves of *Chloroxylon swietenia* DC. *Pest Management Science*, v.62, p.6-21. 2006
- [2] KALAVAGUNTA, P.K; PALA, R ; PATHIPATI, U.R; RAVIRALA, N. Identification of Naphthol Derivatives as Novel Antifeedants and Insecticides. *Journal of Agricultural and Food Chemistry*, v.62, p.65-71. 2014
- [3] CLEVO, W. E CLEM, T. Why farmers continue to use pesticides despite environmental, health and sustainability costs. *Ecological Economics*, v.39, p.449-462. 2001
- [4] SCHOONHOVEN, L.M. Biological aspects of antifeedants. *Entomologia Experimental et Applicata*. v.31, p.57-69. 1982
- [5] JERMY, T. Prospects of antifeedant approach to pest control a critical review. *Journal of Chemical Ecology*.v.16 , p.3151-3166. 1990
- [6] KOUL, O. Phytochemicals and Insect Control: Na Antifeedant Approach. *Plant Sciences*. v.27, 1-24. 2008
- [7] SZCZEPANIK M. Studies on the biological activity of azadirachtin against lesser mealworm, *Alphitobius diaperinus* Panzer. *Arthropods Chemical, Physiological and Environmental Aspects* (ed. by D Konopinska), University of Wroclaw, (2001), 228-233.
- [8] MOON, S.J; LEE, Y ; JIAO, Y ; MONTELL, C. A *Drosophila* Gustatory Receptor Essential for Aversive Taste and Inhibiting Male-to-Male Courtship. *Current Biology* v.19, p.1623-1627. 2009
- [9] ISMAN, M. Insect antifeedants. *Pesticide Outlook*, v.13, p.152-157. 2002

- [10] FRAZIER, J. L. The perception of plant allelochemicals that inhibit feeding. In: Molecular Aspects of Insect Plant Associations..Brattsten,L.B. and Ahmad, S., Eds., Plenum Press, New York, (1986), 1–42.
- [11] SIMMONDS, M.S.J; BLANEY, W.M; ESQUIVEL, B; RODRIGUEZ-HAHN, L. 1996. Effect of clerodane-type diterpenoids isolated from *Salvia* spp.on the feeding behaviour of *Spodoptera littoralis*. *Pesticide Science*, v.47, p.17–23. 1996
- [12] GUJAR, G.T E MEHROTRA, K.N. Biological activity of nem against the red pumpkin beetle, *Aulacophora foveicollis*, *Phytoparasitica* 16 (1988), 293-302.
- [13] PRADHAN, S., JOTWANI, M. S., AND RAI, B. K. THE NEEM SEED DETERRENT TO LOCUSTS. INDIAN FARMING. V.12, P.7–71.- SCHOONHOVEN, L.M. Biological aspects of antifeedants. *Entomologia Experimentalis et Applicata*, v.31, p.57–69. 1982
- [14] DA SILVA, J. DE P; CROTTI, A.E.M; CUNHA, W.R. Antifeedant and allelopathic activities of the hydroalcoholic extract obtained from Neem (*Azadirachta indica*) leaves. *Brazilian Journal of Pharmacognosy*. v.17, n.4, p.529-532. 2007
- [15] REED, D.K;. WARTHEN, JR, J. D; . UEBEL, E. C;. REED, G. L. Effects of Two Triterpenoids from Neem on Feeding by Cucumber Beetles (Coleoptera: Chrysomelidae) 1. *Journal of Economic Entomology* v.75, n.6, p.1109-1113. 2014
- [16] POPOVIC, Z; KOSTIĆ, M; STANKOVIĆ, S; MILANOVIĆ, S; SIVČEV, I; KOSTIĆ, I; KLJAJIĆ, P. Ecologically acceptable usage of derivatives of essential oil of sweet basil, *Ocimum basilicum*, as antifeedants against larvae of the gypsy moth, *Lymantria dispar*. *Journal of Insect Science* v.13, p.1-12. 2013
- [17] GEBBINCKA, E.A.K; JANSEN, B.J.M; GROOT, A. Insect antifeedant activity of clerodane diterpenes and related model compounds. *Phytochemistry* v.61, p.737–770. 2002
- [18] COLL, J. E TANDRÓN, Y. 2004. Neo-Clerodane diterpenes from *Teucrium fruticos*. *Phytochemistry* v.65, p.387–392. 2004
- [19] MUNOZ, D.M; DE LA TORRE, M.C; RODRIGUEZ, B; SIMMONDS, M.S.J; BLANEY, W.M. Neo-clerodane insect antifeedants from *Scutellaria aplina* subsp. *javalambrensis*. *Phytochemistry* v.44, p.593–597.
- [20] PIOZZI, F; BRUNO, M; ROSSELLI, S. Further furoclerodanes from *Teucrium* genus. *Heterocycles* v.48, p.2185–2203. 1998
- [21] BRUNO, M., VASSALLO, N., SIMMONDS, M.S.J. A diterpenoid with antifeedant activity from *Scutellaria rubicunda*. *Phytochemistry* v.50, p.973–976. 1999
- [22] SOSA, M.E., TONN, C.E., GIORDANO, O.S. Insect antifeedant activity of clerodane diterpenoids. *Journal Natural Products* v.57, p.1262–1265. 1994
- [23] KUBO, I E GANJIAN, I. Insect antifeedant terpenes, hot-tasting to humans. *Experientia*, v.37, p.1063-1064. 1981

- [24] PICMAN A.K. Biological activities of sesquiterpene lactones. *Biochemical Systematics and Ecology* v.14, p.255–281. 1986
- [25] MULLIN C.A; ALFATAFTA AA; HARMAN J.L; EVERETT S.L; SERINO A.A. Feeding and toxic effects of floral sesquiterpene lactones, diterpenes and phenolics from sunflower (*Helianthus annuus* L.) on western corn rootworm. *Journal of Agricultural and Food Chemistry* v.39, p.3393–3399. 1991
- [26] PARUCH E, NAWROT J E WAWRZENCZYK C. Lactones: Part 11. Feeding deterrent activity of some bi- and tricyclic terpenoid lactones. *Pest Management Science* v.57, p.776–780. 2001
- [27] LOCHYNSKI S; FRACKOWIAK B; OLEJNICZAK T; CIUNIK Z E WAWRZENCZYK, C. Synthesis of chiral spirolactones with a carane system– insect feeding deterrents. *Tetrahedron: Asymmetry* v.13, p.1761–1767. 2002
- [28] SZCZEPANIK M; SZUMNY A; GRUDNIEWSKA A; WAWRZENCZYK C. Feeding deterrent activity of α -methylenelactones against the lesser mealworm (*Alphitobius diaperinus* Panzer). *Pestycydy/Pesticides* v.4, p.25–32. 2005
- [29] SZCZEPANIK, M; GRUDNIEWSKA, A; ZAWITOWSKA, B; WAWRZENCZYKB, C. Structure-related antifeedant activity of halolactones with a p-menthane system against the lesser mealworm, *Alphitobiusdiaperinus* Panzer. *Pest Management Science* v.70, p.953–958. 2014
- [30] MONTEIRO, J.M; DE ALBUQUERQUE, U.P; ARAÚJO, E. DE LIMA; DE AMORIM, E.L.C. 2005.Taninos: uma abordagem da química à ecologia. *Química. Nova*, v. 28, n.5, p. 892-896.
- [31] GERSHENZON, J E CROTEAU, R. Terpenoids. In Rosenthal, G. A., and Berenbaum, M. R. (eds.) *Herbivores, Their Interactions With Secondary Plant Metabolites*. Vol. 1. The Chemical Participants, Academic Press, San Diego (1991), 165-219.
- [32] WRANGHAM, R. W; CONKLIN-BRITTAIN, N. L; HUNT, K, D. Dietary Response of Chimpanzees and Cercopithecines to Seasonal Variation in Fruit Abundance. I. Antifeedants. *International Journal of Primatology* v.19, p.949-970. 1998
- [33] KATHURIA, V and KAUSHIK, N. Feeding inhibition of *Helicoverpa armigera* (Hübner) by *Eucalyptus camaldulensis* and *Tylophora indica* extracts. *Insect Science* v.12, p.249-254. 2005
- [34] COLL, J E TANDRÓN, Y. Isolation and Identification of neo-Clerodane Diterpenes from *Ajuga remota* by High performance Liquid Chromatography. *Phytochemistry Analysis* v.16, p.61–67. 2005
- [35] MAZAHERY-LAGHAB, H; YAZDI-SAMADI ; BAGHERI, M; BAGHERI, A. R. Alfalfa (*Medicago sativa* L.) shoot saponins: identification and bio-activity by the assessment of aphid feeding. *British Journal of Nutrition* v.105, p.62–70. 2011
- [36] CHUN-HUAN LI; XUE-MEI NIU; QIAN LUO; MING-JIN XIE; SHI-HONG LUO; YAN-YING ZHOU; SHENG-HONG LI. Novel Polyesterified 3,4-seco-Grayanane Diterpenoids as Antifeedants from *Pieris formosa*. *Organic Letters* v.12, p.2426-2429. 2010

- [37] YU, YONG-MING; YANG, JUN-SHAN; PENG, CHAO-ZHONG; CAER, VALERIE; CONG, PU-ZHU; ZOU, ZHONG-MEI; LU, YANG; YANG, SHI-YING; GU, YU-CHENG. Lactones from *Angiopteris caudatiformis*. *Journal Natural Products* v.72, p.921–924. 2009
- [38] NIHEI, K; ASAKA, Y; MINE, Y; YAMADA, Y; IIGO, M; YANAGISAWA, T; KUBO, I. Musidunin and Musiduol Insect Antifeedants from *Croton jatrophioides*. *Journal Natural Products* v.69, p.975-977. 2006
- [39] BURGUEÑO-TAPIA, E., GONZÁLEZ-COLOMA, A., MARTÍN-BENITO, D., AND JOSEPH-NATHAN, P. Antifeedant and phytotoxic activity of cacalolides and eremophilanolides. *Z. Naturforsch* v.62, p.362–366. 2007
- [40] PETROSKI, R.J E STANLEY, D. W. Natural Compounds for Pest and Weed Control. *Journal of Agricultural and Food Chemistry* v.57, p.8171–8179. 2009
- [41] DEBNATH, N; DAS, S; GOSWAMI, A. Screening of Indian Medicinal Plant Derived Lipids for Bioactivity Against Rice Weevil *Sitophilus oryzae* (L.) Yields Two Antifeedants. *Proceedings of the Zoological Society* v.65, p.79–85. 2012
- [42] KASHIWAGI, T; WU, B; IYOTA, K ; CHEN, X.H; TEBAYASHE, S; KIM, C. Antifeedants against *Locusta migratoria* from the japanese cedar *Criptometria japonica*. *Bioscience, Biotechnology, and Biochemistry* v.71, p.966-970. 2007
- [43] MORIMOTO, M; HIROMI FUKUMOTO; MASSARU HIRATANI, WARINTHORN CHAVASIRI AND KOICHIRO KOMAI. Insect antifeedants, Pterocarpan and Pterocarpol in Heartwood of *Pterocarpus macrocarpus* Kruz. *Bioscience, Biotechnology, and Biochemistry* v.70, p.1864-1868. 2006
- [44] NELSON ZAPATA, FLOR BUDIA, ELISA VINUELA, PILAR MEDINA.. Antifeedant and growth inhibitory effects of extracts and drimanes of *Drimys winteri* stem bark against *Spodoptera littoralis* (Lep., Noctuidae). *Industrial Crops and Products* v.30, p.119–125. 2009
- [45] ABDELGALEIL , A.M; I DOE, M; NAKATANI, M.. Rings B,D-seco limonoid antifeedants from *Swietenia mahogani* Samir. *Phytochemistry* v.96, p.312–317. 2013
- [46] NENAAH, G. E. Toxic and antifeedant activities of potato glycoalkaloids against *Trogoderma granarium* (Coleoptera: Dermestidae). *Journal of Stored Products Research* v.47, p.185-190. 2011
- [47] OMAR, S; MARCOTTE, M; FIELDS, P; SANCHEZ, P.E; POVEDA, L; MATA, R; JIMENEZ, A; DURST, T; ZHANG, J; MACKINNON, S; LEAMAN, D; ARNASON J.T; PHILOGÉNE, B.J.R.. Antifeedant activities of terpenoids isolated from tropical Rutales. *Journal of Stored Products Research* v.43, p.92–96. 2007
- [48] WU, JUN; ZHANG, SI; BRUHN, TORSTEN; XIAO, QIANG; DING, HAIXIN; BRINGMANN, GERHARD. Xylogranatins F–R: Antifeedants from the Chinese Mangrove, *Xylocarpus granatum*, A New Biogenetic Pathway to Tetranortriterpenoids. *Chemistry* v.14, n.4, p.1129–1144. 2008

- [49] ADEYEMI, M.M.; ADEBOTE, D.A; AMUPITAN, J.O; OYEWALE, A.O AND AGBAJI, A.S. Antifeedant Activity of Quercetin Isolated from the Stem Bark of *Bobgunnia madagascariensis* (Desv.) J.H.Kirkbr & Wiersema. (Caesalpiniaceae). *Australian Journal of Basic and Applied Sciences* v.4, p.3342-3346. 2010
- [50] DURAI PANDIYAN, V.; IGNACIMUTHU S; GABRIEL PAULRAJ, M. Antifeedant and larvicidal activities of Rhein isolated from the flowers of *Cassia fistula* L. *Saudi Journal of Biological Sciences* v.18, p.129–133. 2011
- [51] JUÁREZ, Z.N; FORTUNA, A.M; SÁNCHEZ-ARREOLA, E; LÓPEZ-OLGUÍN, J.F; BACH, H; AND HERNÁNDEZ, L.R. Antifeedant and Phagostimulant Activity of Extracts and Pure Compounds from *Hymenoxys robusta* on *Spodoptera exigua* (Lepidoptera: Noctuidae) Larvae. *Natural Product Communications* v.9, p.895–898. 2014
- [52] ABBASZADEH G, SRIVASTAVA C, WALIA S. Insecticidal and antifeedant activities of clerodane diterpenoids isolated from the Indian bhant tree, *Clerodendron infortunatum*, against the cotton bollworm, *Helicoverpa armigera*. *Journal of Insect Science* v.14, p.1-13. 2014
- [53] WANG, Z; SONG, J.I.E; HAN, Z; JIANG, Z; ZHENG, W; CHEN, J; SONG,— Z; SHANG, S. Quantitative Structure-Activity Relationship of Terpenoid Aphid Antifeedants. *Journal of Agricultural and Food Chemistry* v.56, p.11361–11366. 2008
- [54] SZCZEPANIK, M; DAMS, I; WAWRZENCZYK, C. Terpenoid lactones with the p-menthane system as feeding deterrents to the lesser mealworm, *Alphitobius diaperinus*. *Entomologia Experimentalis et Applicata* v.128, p.337–345. 2008
- [55] BOHMAN, B.; NORDLANDER, G.; NORDENHEM, H.; SUNNERHEIM, K.; BORG-KARLSON, A.-K.; UNELIUS, C. R. Structure-Activity Relationships of Phenylpropanoids as Antifeedants for the Pine Weevil *Hylobius abietis*. *Journal Chemical Ecology* v.34, p.339–352. 2008
- [56] MANSSON, PER E; SCHLYTER, F.; ERIKSSON, C; SJÖDIN, K. Nonanoic acid, other alkanolic acids, and related compounds as antifeedants in *Hylobius abietis* pine weevils. *Entomologia Experimentalis et Applicata* v.121, p.191–201. 2006
- [57] WATKINS, R.W; MOSSON, H.J; GURNEY, J.E; COWAN, D.P; EDWARDS, J.P. Cinnamic acid derivatives: Novel repellent seed dressings for the protection of wheat seeds against the damage of fields slugs, *Deroceras reticulatum*. *Crop Protection* v.15, p.77–83. 1996
- [58] GOVINDACHARI, T. R., NARASIMHAN, N. S., SURESH, G., PARTHO, P. D., GOPALAKRISHNAN, G., AND KRISHNA KUMARI, G. N. Structure-related insect antifeedant and growth regulating activities of some limonoids. *Journal of Chemical Ecology* v.21, p.1585–1600. 1995
- [59] KOUL, O. Insect feeding deterrents in plants. *ijrsl - International Journal of Review in Life Sciences*. v.2, p.97–125. 1982
- [60] YANO, K. Relationship between chemical structure of phenylalkynes and their antifeedant activity for larvae of a cabbage butterfly. *Insect Biochemistry* v.16, p.717–719. 1986

PIRES, E. V. e CARVALHO, C. M. de

- [61] YANO, K. Minor components from growing buds of *Artemisia capillaris* that act as insect antifeedants. *Journal of Agricultural and Food Chemistry* v.35, p.889–891. 1987

Validação de método espectrofotométrico para detecção de compostos fenólicos de *Spirulina sp.* LEB-18

Spectrophotometric method validation for detection of phenolic compounds of *Spirulina sp.* LEB-18

Anelise Christ-Ribeiro

Escola de Química e Alimentos, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS
anelise.christ@hotmail.com

Pâmela Goularte

Escola de Química e Alimentos, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS
engpami@yahoo.com.br

Leonor Almeida de Souza-Soares

Escola de Química e Alimentos, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS
leonor.souzasoares@gmail.com

Resumo: O uso de bioativos provenientes de fontes naturais requer a extração e purificação destes compostos para aplicação em aditivos e ingredientes alimentares, farmacêuticos e cosméticos. Este trabalho teve por objetivo validar a quantificação de compostos fenólicos a partir da microalga *Spirulina sp.* LEB-18. A validação da metodologia seguiu o Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (INMETRO) e International Conference on Harmonisation (ICH), sendo avaliados os parâmetros de especificidade, linearidade, robustez, limite de detecção, limite de quantificação, precisão e exatidão. O método apresentou coeficiente de correlação de 0,9978, confirmando a linearidade do método. Nas análises de precisão intermediária para amostras desengorduradas não houve diferença significativa ($p > 0,05$) entre analistas e o desvio padrão relativo não ultrapassou de 2%, assim como na análise de reprodutibilidade de amostras in natura integral e desengordurada. Na análise de exatidão observou-se boa recuperação, dentro da faixa de 80 a 120%. A validação da metodologia analítica demonstrou-se apropriada para determinar a concentração de compostos fenólicos em extratos de *Spirulina sp.* LEB-18.

Palavras-chave: compostos fenólicos; linearidade; microalga; validação analítica.

Abstract: The use of bioactive compounds in the preparation of food additives and ingredients as well as pharmaceuticals and cosmetics, requires the extraction and purification of these compounds from natural sources. This study aimed to validate the quantification of phenolic compounds in *Spirulina sp.* LEB-18 samples. The validation of the methodology followed INMETRO and ICH, and evaluated the specific parameters, linearity, ruggedness, detection limit, quantification limit, precision and accuracy. The method presented correlation coefficient of 0.9978, confirming the linearity of the method. In the intermediate precision analysis to degreased samples there was no significant difference ($p > 0.05$) between analysts and the relative standard deviation did not exceed 2%, as well as the reproducibility of analysis of samples in natura full and degreased. For accurate analysis good recovery was

observed within the range of 80 to 120%. Validation of analytical methodology proved to be suitable for determining the concentration of phenolic compounds in extracts from *Spirulina sp.* LEB-18.

Key words: phenolic compounds, linearity, microalgae, analytical validation.

1 Introdução

A microalga *Spirulina* é uma cianobactéria filamentosa, que, possui como metabolismo principal a fotossíntese onde a fonte principal de energia é a luz solar. A *Spirulina* é constituída de altos teores de proteínas (64-74%), ácidos graxos poli-insaturados e vitaminas além de propriedades antioxidantes e antimutagênicas, devido à presença de compostos fenólicos, favorecendo o seu uso como alimento funcional [1, 2].

Compostos fenólicos são substâncias que possuem anel aromático, com um ou mais grupos substituintes hidroxílicos, incluindo seus derivados funcionais (ésteres, metil ésteres, glicosídeos, dentre outros). A natureza dos polifenóis varia a partir de simples moléculas como os ácidos fenólicos, até as altamente polimerizadas como os taninos. Estudos sobre compostos bioativos extraídos de microalgas têm enfatizado e demonstrado a sua atividade antioxidante, antiinflamatória, antimicrobiana, antifúngica, citotóxica e propriedades de inibição enzimática entre outras [3, 4, 1]. Estas características têm despertado interesse no uso terapêuticos das microalgas, para cura ou prevenção de doenças crônicas tais como diabetes, hipertensão, hipercolesterolemia e outras [5]. Dentre as microalgas, destaca-se a *Spirulina*, classificada como GRAS (Generally Recognized As Safe) emitido pelo Food and Drug Administration (FDA) [6].

A extração e purificação de fitoquímicos a partir de fontes naturais são necessárias, uma vez que estes bioativos são muitas vezes utilizados na preparação de suplementos dietéticos, nutracêuticos, ingredientes para alimentos funcionais, aditivos alimentares, produtos farmacêuticos e cosméticos [7]. Por isso, é essencial a validação de uma metodologia específica, robusta, sensível, precisa e exata para a detecção de compostos fenólicos da microalga *Spirulina sp.* LEB-18, constituindo-se de fundamental importância para o controle de qualidade dos produtos, e sendo parte das normas de Boas Práticas de Fabricação e Controle [8, 9]. A Resolução Específica (R.E.) nº 899, de 29 de maio de 2003, “Guia para validação de métodos analíticos e bioanalíticos” da ANVISA [10], determina que para validar uma metodologia faz-se necessário avaliar os seguintes parâmetros: especificidade, linearidade, robustez, limite de detecção (LD), limite de quantificação (LQ), precisão e exatidão. Apesar das vantagens indiscutíveis na utilização da técnica cromatográfica CLAE, esta apresenta algumas limitações como o alto custo da instrumentação e da operação, tempo relativamente longo de análise e ainda a necessidade de experiência no manuseio do equipamento e tratamento de amostras [11].

O objetivo deste trabalho foi validar a quantificação de compostos fenólicos em amostras de microalga *Spirulina sp.* LEB-18 seguindo normas do INMETRO e ICH.

2 Desenvolvimento

2.1 Materiais

A microalga *Spirulina sp.* LEB-18 foi fornecida pelo Laboratório de Engenharia Bioquímica da FURG. Amostras in natura integrais e desengorduradas pelo método de Soxhlet utilizando éter de petróleo [12] foram utilizadas.

As análises foram realizadas nos Laboratórios de Ciência de Alimentos e de Engenharia Bioquímica da FURG. Como padrão para quantificação dos compostos fenólicos, foi utilizado o ácido gálico (Merck), com grau de pureza de 99% em espectrofotômetro UV-Vis marca Varian, modelo Cary 100.

2.2 Métodos

2.2.1 Extração dos compostos fenólicos

Os compostos fenólicos da biomassa *Spirulina sp.* LEB-18 foram extraídos a frio com metanol, na proporção de 1:5 (p/v) a 25°C durante 60 minutos, sob agitação orbital (Tecnal, TE-141) a 160 rpm, com uma interrupção de 15 minutos e agitação novamente por mais 60 min, com a adição do solvente (10 mL), seguida por partição com hexano. As soluções metanólicas foram secas em rotaevaporador (Quimis®, Q-344B2) e o resíduo foi dissolvido em água destilada. O extrato foi clarificado com 5 mL de hidróxido de bário 0,1 mol/L e 5 mL de sulfato de zinco a 5%, deixado em repouso por 20 minutos, centrifugado a 3220g por 15 minutos, filtrado e avolumado com água destilada em balão volumétrico. O conteúdo fenólico livre foi determinado pelo método de Folin-Ciocalteu, que consiste na oxidação dos fenolatos, reduzindo os ácidos a um complexo azul Mo-W devido à solução de íons complexos poliméricos formados a partir de heteropoli-ácidos fosfomolibdicos e fosfotúngsticos [13], permitindo a determinação da concentração por espectrofotometria (Varian, Cary 100) no comprimento de onda 750 nm, utilizando uma curva padrão de ácido gálico (2,5 a 22,5 $\mu\text{g/mL}$) [14].

2.3 Parâmetros de validação

2.3.1 Faixa de trabalho e linearidade

A linearidade do método foi verificada através da leitura em espectrofotômetro (750nm) a partir de uma curva padrão de ácido gálico cujas concentrações variaram de 2,5 a 22,5 $\mu\text{g/mL}$. Através dos valores de absorvância obtidos, construiu-se um gráfico de concentração versus absorvância utilizando-se como critério de aceitação um coeficiente de correlação (R) maior que 0,90 de acordo com o INMETRO [15] e maior ou igual a 0,99 de acordo com a ANVISA [10]. Com os dados da curva de calibração, calculou-se o coeficiente angular da reta e o seu ponto de intersecção no eixo y, conforme Equação 1.

$$y = ax + b, \quad (1)$$

sendo y \equiv resposta média, x \equiv concentração, a \equiv inclinação da curva de aceitação (sensibilidade) e b \equiv interceptação com o eixo y.

2.3.2 Sensibilidade, limite de detecção (LD) e limite de quantificação (LQ)

A sensibilidade foi determinada simultaneamente ao teste de linearidade e expressa pelo coeficiente angular da curva de calibração, sendo dependente da natureza do analito e da técnica de detecção [16] e calculada de acordo com a Equação 2.

$$S = \frac{dy}{dx}, \quad (2)$$

sendo $S \equiv$ sensibilidade, $dx \equiv$ variação da resposta e $dy \equiv$ variação da concentração.

O LD foi calculado pela soma das médias dos brancos (9 repetições) mais três vezes o desvio padrão dividido pela sensibilidade do método conforme Equação 3 [17].

$$LD = \frac{\bar{x} + 3s}{S}, \quad (3)$$

sendo $\bar{x} \equiv$ média dos valores dos brancos e $s \equiv$ desvio padrão dos brancos.

O limite de quantificação (LQ) foi estabelecido como o padrão de calibração da curva analítica de menor concentração (excluindo o branco) medido de forma quantitativa com nível aceitável de precisão e exatidão conforme Equação 4, foram analisados 10 brancos e calculados a média e o desvio padrão [17].

$$LQ = \frac{\bar{x} + 10s}{S}, \quad (4)$$

2.3.3 Precisão

Este parâmetro foi medido a partir da repetitividade dos resultados, utilizando a curva da faixa de trabalho. A precisão da metodologia foi expressa em termos de desvio padrão relativo [18]. Neste estudo, a precisão na validação de métodos foi considerada em três níveis diferentes: repetitividade, precisão intermediária e reprodutibilidade.

2.3.3.1 Repetitividade

A repetitividade representa a concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo método, efetuadas sob as mesmas condições de medição, chamadas condições de repetitividade: mesmo procedimento; mesmo analista; mesmo instrumento usado sob as mesmas condições; mesmo local e repetições em um curto tempo. A repetitividade envolve várias medições da mesma amostra, em diferentes preparações é, algumas vezes, denominada precisão intra-ensaio [19, 20] ou intra-corrida [10] e pode ser expressa através da estimativa do desvio padrão relativo.

2.3.3.2 Precisão intermediária

Indica o efeito das variações dentro do laboratório devido a eventos como diferentes dias ou diferentes analistas ou diferentes equipamentos ou uma combinação destes fatores [21]. A precisão intermediária é reconhecida como a mais representativa da variabilidade dos resultados em um único laboratório e, como tal, mais aconselhável de ser adotada. O objetivo da validação da precisão intermediária é verificar que no mesmo laboratório o método fornecerá os mesmos resultados. A precisão intermediária pode ser expressa através da estimativa do desvio padrão relativo.

2.3.3.3 Reprodutibilidade

É o grau de concordância entre os resultados das medições de uma mesma amostra, sob diferentes condições [15]. A reprodutibilidade refere-se aos resultados dos estudos de colaboração entre diferentes laboratórios e deve ser considerada em situações como a padronização de procedimentos analíticos a serem incluídos. Comumente são observadas variações entre os resultados. Por isso, dados originários de apenas um laboratório não são suficientes para avaliar a reprodutibilidade do método. Estudos colaborativos são indispensáveis para avaliação da reprodutibilidade, e também podem ser importantes para testar a exatidão do método [22].

2.3.4 Exatidão

Representa o grau de concordância entre os resultados individuais encontrados em um determinado ensaio e um valor de referência aceito como verdadeiro. É importante observar que um valor exato ou verdadeiro é o valor obtido por uma medição perfeita e este valor é indeterminado por natureza [23]. Para a avaliação da exatidão da metodologia, foi calculada a adição de padrão (ácido gálico) do analito em amostras fortificadas: amostras de *Spirulina sp.* LEB-18 foram adicionadas de material de referência certificado em 3 diferentes concentrações (70, 140 e 210 $\mu\text{g/mL}$ de ácido gálico). As análises foram realizadas em triplicata e calculadas de acordo com a Equação 5 [24].

$$E = \left(\frac{cm}{cr} \right) \times 100, \quad (5)$$

sendo $E \equiv$ exatidão, $cm \equiv$ concentração média detectada e $cr \equiv$ concentração real certificada.

2.3.5 Robustez

De acordo com o INMETRO [25], a robustez de um método mede a sensibilidade que este apresenta frente a pequenas variações. Diz-se que um método é robusto quando ele não é afetado por uma modificação pequena e deliberada em seus parâmetros. As mudanças introduzidas refletem as alterações que podem ocorrer quando um método é transferido para outros laboratórios, analistas ou equipamentos. Para avaliar a robustez, o método variou 2 amostras e uma etapa de clarificação da extração de compostos fenólicos. Primeiramente foram utilizados 2 tipos de amostras (in natura e desengordurada) onde a gordura retirada da amostra desengordurada correspondeu em média 2,13% de lipídeos. A segunda mudança foi à remoção da etapa de lavagem com hexano.

2.4 Análise estatística

A análise estatística de repetitividade, precisão intermediária, reprodutibilidade, exatidão e robustez foram realizadas utilizando-se o software STATISTICA® versão 7.0 [26] com a aplicação da Análise de Variância ANOVA e Teste de Tukey.

3 Resultados

3.1 Linearidade

Os resultados da linearidade estão indicados na Figura 1. O método demonstrou boa linearidade, 0,9978, sendo que, segundo a ANVISA e o INMETRO, as soluções preparadas

apresentaram leituras de absorção diretamente proporcionais à concentração do analito, confirmando a linearidade do método. A equação da reta obtida foi $y = 0,0233x + 0,0018$.

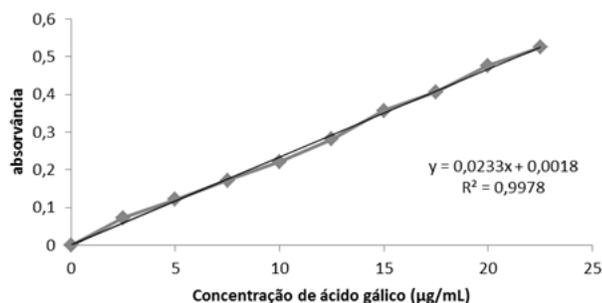


Figura 1. Linearidade para o método de quantificação de compostos fenólicos.

Os resultados da linearidade da metodologia na faixa de trabalho dependem da sensibilidade do equipamento utilizado, complexidade do método, reagentes utilizados, extração do analito, condições do equipamento e do meio ambiente, além da habilidade do analista [27].

3.2 Sensibilidade, limite de detecção e limite de quantificação

A sensibilidade da metodologia foi calculada utilizando-se o coeficiente angular do gráfico analítico correspondente a 0,0018. A média ($n = 9$) dos valores do branco foi quantificada em 0,10179 de absorvância da solução de mistura x ($Na_2CO_3, CuSO_4, KNaC_4H_4O_6$) e *Folin-ciocalteau*, apresentando desvio padrão de $\pm 0,000012$. O limite de detecção observado para o método foi de $71 \mu g/mL$ de amostra. O limite de quantificação observado foi de $106 \mu g/mL$ de amostra.

3.3 Precisão

Para a validação da metodologia em questão, somente os parâmetros de repetitividade (concordância entre os resultados com o mesmo analista e mesma instrumentação), precisão intermediária (concordância entre os resultados de um mesmo laboratório em dias diferentes com analistas diferentes e equipamentos iguais), e reprodutibilidade (concordância entre os resultados de laboratórios diferentes com analistas diferentes e equipamentos diferentes) foram avaliados. Para avaliação da repetitividade foram realizados 6 experimentos da amostra in natura em triplicatas para avaliação da repetitividade e os resultados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1. Repetitividade dos dados para amostras in natura

Replicatas	in natura (mg/g de Spirulina)
1	$1,31^a \pm 0,02$
2	$1,39^a \pm 0,02$
3	$1,39^a \pm 0,03$
4	$1,32^a \pm 0,01$
5	$1,38^a \pm 0,01$
6	$1,31^a \pm 0,01$

Letras minúsculas e idênticas indicam que não há diferença significativa entre as amostras.

Pode-se notar que os resultados de desvio padrão foram aceitáveis, pois apresentaram valores menores que 2% de desvio padrão mostrando que as médias não diferem significativamente entre si, esse resultado é confirmado também pela análise estatística aplicada. As análises de precisão intermediária foram realizadas e as médias e desvio padrão estão explicitados na Tabela 2.

Tabela 2. *Precisão intermediária para amostras desengorduradas*

Amostras	Analista 1 (mg/g de Spirulina)	Analista 2 (mg/g de Spirulina)
Desengordurado 1	1,56 ^a ± 0,04	1,49 ^a ± 0,06
Desengordurado 2	1,50 ^a ± 0,05	1,49 ^a ± 0,07
Desengordurado 3	1,50 ^a ± 0,03	1,55 ^a ± 0,04

Letras minúsculas e idênticas indicam que não há diferença significativa entre as amostras.

Analisando os dados da Tabela 2 pode-se observar que há compatibilidade dos dados como a análise estatística demonstra que não há diferença significativa entre os analistas e o desvio padrão das análises não ultrapassou de 2%. As análises de reprodutibilidade foram realizadas em laboratórios distintos e os resultados foram quantificados e calculados de acordo com as curvas calculadas para cada espectro como mostra a Tabela 3.

Tabela 3. *Reprodutibilidade de amostras in natura e desengorduradas de Spirulina.*

Amostras	(mg/g de Spirulina)
<i>In natura</i> 1 LEB	1,276 ^a ± 1,0
<i>In natura</i> 1 LAB	1,313 ^a ± 1,1
Desengordurado 1 LEB	1,274 ^a ± 0,8
Desengordurado 1 LAB	1,360 ^a ± 0,7
<i>In natura</i> 2 LEB	1,340 ^a ± 1,0
<i>In natura</i> 2 LAB	1,396 ^a ± 1,0
Desengordurado 2 LEB	1,248 ^a ± 0,5
Desengordurado 2 LAB	1,322 ^a ± 0,3
<i>In natura</i> 3 LEB	1,274 ^a ± 0,6
<i>In natura</i> 3 LAB	1,304 ^a ± 0,6
Desengordurado 3 LEB	1,253 ^a ± 0,2
Desengordurado 3 LAB	1,424 ^a ± 0,3

Letras minúsculas e idênticas indicam que não há diferença significativa entre as amostras. LEB e LAB – Laboratórios 1 e 2 respectivamente, onde foram realizadas algumas análises.

De acordo com a Tabela 3, a análise estatística aplicada e o desvio padrão observa-se que todas as análises não apresentaram diferença significativa ($p < 0,05$) indicando que o método é preciso. De acordo com Filho *et al.* [28] no desenvolvimento e validação do método para dosagem de alfacaroteno e betacaroteno em *Spirulina platensis* (CLAE – DAD), o método mostrou-se linear ($R = 0,9937$) e exato e na exatidão/recuperação foi obtida uma recuperação acima de 95%. Estes resultados evidenciam compatibilidade com este estudo, apesar da utilização de equipamentos diferentes, as metodologias apresentam ótimos resultados dos parâmetros de validação.

3.4 Exatidão

Para a análise de exatidão foi realizado o teste de adição de padrão, como mostrado na Tabela 4.

Tabela 4. *Adição de padrão em extratos fenólicos de Spirulina sp. LEB-18*

Resultado real	Resultado obtido	Recuperação(%)
1,362	1,42	104
1,395	1,41	101
1,293	1,39	107

Analisando a Tabela 4 pode-se observar que foi obtida uma boa recuperação, pois de acordo com a FDA [29] os limites para recuperação do analito devem estar entre 80 a 120%.

Rabelo, Paula e Bara [30] validaram o método espectrofotométrico para determinação do teor de fenóis totais da *Trichillia. catigua A. Juss (Meliaceae)* e comprovaram que este é seletivo, linear, preciso, exato e robusto, apresentado resultados de 95% de exatidão o que é coerente com o trabalho estudado. Portanto, esse método representa uma possibilidade para a determinação e quantificação destes compostos uma vez que apresenta confiabilidade requerida para um método analítico, além de simples, rápido e de baixo custo.

3.5 Robustez

De acordo com a metodologia e as modificações citadas no trabalho correspondente a robustez, foram obtidos os resultados apresentados na Tabela 5.

Tabela 5. *Robustez dos métodos de extração dos compostos fenólicos*

Amostras	(mg/g de Spirulina)
<i>In natura</i> com hexano	1,36 ^c ± 0,02
Desengordurado com hexano	1,36 ^c ± 0,03
<i>In natura</i> sem hexano	1,48 ^b ± 0,05
Desengordurado sem hexano	1,70 ^a ± 0,05

Letras diferentes na mesma linha indicam que houve diferença entre os métodos ($p < 0,05$).

De acordo com a Tabela 5 observa-se que há diferença significativa entre as modificações do método aplicado, onde a maior extração dos compostos fenólicos obtida foi a partir de uma amostra natural sem a etapa de clarificação com hexano. A robustez avaliada por Marques *et al.* [31] foi testada preliminarmente na avaliação de procedimentos para quantificação espectrofotométrica de flavonoides totais em folhas de *Bauhinia forficata link*, através da avaliação de 3 parâmetros (influência da luminosidade, estabilidade da solução extrativa e fabricante do solvente) cujo os dados mostraram que ambos os procedimentos mostraram robustos quanto aos parâmetros analisados.

4 Conclusão

A validação da metodologia analítica demonstrou-se apropriada para a finalidade pretendida, pois pode ser considerada linear, precisa e exata. Dentro do intervalo estudado,

a metodologia demonstrou ser reprodutível e representativa. Além disso, trata-se de uma metodologia simples, envolvendo poucas etapas de preparação de amostras e reagentes e pouco dispendiosa, sendo adequada para determinar a concentração de compostos fenólicos em extratos a partir de *Spirulina sp.* LEB-18.

Referências

- [1] SOUZA, M. M.; PRIETTO, L.; RIBEIRO, A. C.; SOUZA, T. D.; BADIALE-FURLONG, E. Assessment of the antifungal activity of *Spirulina platensis* phenolic extract against *Aspergillus flavus*. *Ciência e Agrotecnologia*, v. 35, n. 6, p. 1050-1058, 2011.
- [2] TANTAWY, S. T.A. Biological potential of cyanobacterial metabolites against some soil pathogenic fungi. *Journal of Food, Agriculture & Environment*, v. 9, n. 1, p. 663-666, 2011.
- [3] COLLA, L. M.; BADIALE-FURLONG, E.; COSTA, J.A.V. Antioxidant Properties of *Spirulina* (*Arthrospira*) *platensis* Cultivated Under Different Temperatures and Nitrogen Regimes. *Brazilian Archives of Biology and Technology*, v. 50, n. 1, p. 161-167, 2007.
- [4] HAJIMAHMOODI, M.; FARAMARZI, M. A.; MOHAMMADI, N.; SOLTANI, N.; OVEISI, M. R.; NAFISSI-VARCHEH, N. Evaluation of antioxidant properties and total phenolic contents of some strains of microalgae. *Journal Applied Phycology*, v. 22, p.43-50, 2010.
- [5] BELAY, A. The potential application of *Spirulina* (*Arthrospira*) as a nutritional and therapeutic supplement in health management. *Journal American Nutraceutical Association*, v. 5, n. 2, p. 27-48, 2002.
- [6] FDA - Food and Drug Administration. Agency Response Letter GRAS Notice No. GRN 000127 CFSAN/Office of Food Additive Safety. 2003. Disponível em: <http://www.fda.gov/Food/FoodIngredientsPackaging/GenerallyRecognizedasSafeGRAS/GRASListings/ucm153944.html>
- [7] VELIOGLU, Y. S.; MAZZA, G.; GAO, L.; OOMAH, B. D. Antioxidant activity and total phenolics in selected fruits, vegetables, and grain products. *Journal Agricultural Food Chemistry*, v. 19, n. 46, p. 4113-4117, 1998.
- [8] PIMENTEL, M. F.; NETO, B. B. Calibração: Uma revisão para químicos analíticos. *Quim. Nova*, v.19, n.3, p.268- 277, 1996.
- [9] BARROS NETO, B.; PIMENTEL, M. F.; ARAÚJO, M. C. U. Recomendações para calibração em química analítica - Parte I. Fundamentos e calibração com um componente (calibração univariada). *Quim. Nova*, v.25, n.5, p.856- 865, 2002.
- [10] BRASIL. Agência Nacional de Vigilância Sanitária ; Resolução RE nº 899, de 29/05/2003.

- [11] SIQUEIRA-MOURA, M. P. DE; LIRA, M. C. B.; SANTOS-MAGALHÃES, N. S. Validação de método analítico espectrofotométrico UV para determinação de ácido úsnico em lipossomas. *Brazilian Journal of Pharmaceutical Sciences*. vol. 44, n. 4, p. 621-628, 2008.
- [12] Association of Official Analytical Chemists. Official Methods of Analysis of the Association of Official Analytical Chemists, 15th ed. Association of Official Analytical chemists, Arlington, VA, 1990.
- [13] NEVES, L. C.; ALENCAR, S. M. de; CARPES, S. T. Determinação da atividade antioxidante e do teor de compostos fenólicos e flavonoides totais em amostras de pólen apícola de *Apis melífera*. *Braz. J. Food Technol.*, VII BMCFB, p.107-110, junho 2009.
- [14] SOUZA, M. M.; RECAR, M. R.; ROCHA, M.; CIPOLATTI, E. P.; FURLONG, E. B. Estudo das condições de extração de compostos fenólicos de cebola (*Allium cepa* L.). *Rev Inst Adolfo Lutz*, v. 68, n. 2., p. 92-200, 2009.
- [15] Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial; Vocabulário Internacional de Termos Fundamentais e Gerais de Metrologia, 2ª ed., 2000.
- [16] TAVERNIERS, I.; LOOSE, M. D.; BOCKSTAELE, E. V. Trends in quality in the analytical laboratory, II. Analytical method validation and quality assurance. *Trends in Analytical Chemistry*, v. 23, n. 8, p. 535-550, 2004.
- [17] FEINBERG, M.; RAGUÈNÈS, N. Development and application of a standardized validation procedure for food chemistry laboratories. *Analytica Chimica Acta*, n. 391, p. 239-252, 1998.
- [18] MOHAMED, F. A.; MOHAMED, H. A.; HUSSEIN, S. A.; AHMED, S. A. A validated spectrofluorimetric method for determination of some psychoactive drugs. *Journal of pharmaceutical and Biomedical Analysis*, v. 39, n. 1-2, p. 139-146, 2005.
- [19] GREEN, J. M.; *Anal. Chem.* 1996, 68, A305.
- [20] SHABIR, G.A., Validation of HPLC methods for pharmaceutical analysis: Understanding the differences and similarities between validation requirements of the U.S. Food and Drug Administration, the U.S. Pharmacopoeia and the International Conference on Harmonization. *J. Chromatogr. A*, v. 987 n. 1-2, p. 57-66, 2003.
- [21] International Conference on Harmonisation; Validation of Analytical Procedures: Methodology, Q2B (CPMP/ICH/281/95), 1995.
- [22] VIAL, J.; JARDY, A.; Interlaboratory studies: The best way to estimate the characteristics of dispersion of an HPLC method and a powerful tool for analytical transfers. *Chromatographia*, v. 53, p. S141-S148, 2001.
- [23] RIBANI, M.; BOTTOLI, C. B. G.; COLLINS, C. H.; JARDIM, I. C. S. F.; MELO, L. F. C. Validação em métodos cromatográficos e eletroforéticos. *Quim. Nova*, Vol. 27, No. 5, 771-780, 2004.

- [24] GARBELOTTI, M. L.; TORRES, E. A. F. S.; MARSIGLIA, D. A. P. Determination and validation of dietary fiber in food by the enzymatic gravimetric method. *Food Chemistry*, v. 83, p. 469-473, 2003.
- [25] INSTITUTO NACIONAL DE METROLOGIA, NORMALIZAÇÃO E QUALIDADE INDUSTRIAL; Orientações sobre Validação de Métodos de Ensaio Químicos, DOQ-CGCRE-008, 2003.
- [26] STATSOFT, INC. Programa computacional Statistica 7.0. E.A.U. 2004.
- [27] BURIN, R.; BURIN, V. M.; TAHA, P.; BORDIGNON-LUIZ, M. T. Validação de uma metodologia analítica para determinação de cálcio em produtos cárneos. *Ciênc. Tecnol. Aliment.*, Campinas, 28(4): 973-978, out.-dez. 2008.
- [28] FILHO, J. T. P.; SILVA, A. L. DA; FILHO, E. A. DOS S.; PINHEIRO, F.; VIANA, G. S. DE B.; LEAL, L. K. A. M. Desenvolvimento e validação de metodologia analítica para o controle de qualidade da microalga spirulina platensis por clae – dad: dosagem de alfacaroteno(ac) e betacaroteno(bc). XXIX Encontro de Iniciação Científica. 2010.
- [29] FOOD AND DRUG ADMINISTRATION. Ora Laboratory Procedure. Methods, method verification. Rockville, 2015. Disponível em: <http://www.fda.gov/ScienceResearch/FieldScience/ucm171877.html>.
- [30] RABELO, D.S.; PAULA, J.R.; BARA, M.T.F. Quantificação de fenóis totais presentes nas cascas de *Trichillia catigua* A. Juss (Meliaceae). *Rev. bras. plantas med.* vol.15, n.2, 2013.
- [31] MARQUES, G. S.; MONTEIRO, R. P. M. M.; LEÃO, W. DE F.; LYRA, M. A. M.; PEIXOTO, M. S.; ROLIM-NETO, P. J.; XAVIER, H. S.; SOARES, L. A. DE L. Avaliação de procedimentos para espectrofotométrica de flavonoides totais em folhas de *Bauhinia forficata* link. *Quim. Nova*, Vol. 35, No. 3, 517-522, 2012.

Existence and Approximation of Solutions to Dynamic Inclusions in Time Scales

Existência e Aproximação de Soluções para Inclusões Dinâmicas em Escalas de Tempo

Iguer Luis Domini dos Santos

Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira - Universidade Estadual Paulista
iguerluis@mat.feis.unesp.br

Resumo: Este trabalho contribui para a existência de soluções para inclusões dinâmicas em escalas de tempo. Mais especificamente, prova um resultado de existência e aproximação de soluções para inclusões dinâmicas em escalas de tempo. O resultado obtido é uma generalização da existência e aproximação de soluções para inclusões diferenciais.

Palavras-chave: inclusões dinâmicas; existência de soluções; escalas de tempo.

Abstract: This work contributes to the existence of solutions for dynamic inclusions in time scales. More specifically, it proves a result of existence and approximation of solutions for dynamic inclusions in time scales. The result obtained is a generalization of the existence and approximation of solutions for differential inclusions.

Keywords: dynamic inclusions; existence of solutions; time scales.

1 Introduction

Recently, considerable attention has been given to the study of the existence of solutions for dynamic inclusions in time scales. This can be witnessed by works [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. The work [1] proves the existence of solutions to first order dynamical inclusions in time scales with general boundary conditions. [2] investigates the existence of solutions and extremal solutions for a first order impulsive dynamic inclusion on time scales. [3] proves the existence of solutions for second order dynamic inclusions in time scales with boundary conditions. The work [4] proves the existence of solutions for first order dynamic inclusions on time scales with nonlocal initial conditions. [5] studies existence results for systems of first order inclusions on time scales with an initial or a periodic boundary value condition. [6] studies the existence of solutions to nabla differential equations and nabla differential inclusions on time scales. [7] provides existence of solutions to a system of dynamical inclusions in time scales.

To the best of our knowledge, the approximation of solutions for dynamic inclusions in time scales has not been considered in the literature of time scales. In this work we have established a result of existence and approximation of solutions for dynamic inclusions in time scales.

2 Background and preliminaries

In this section, we gather basic concepts and results that will be useful in the development of the work.

We make the following conventions:

- (i) if $x \in \mathbb{R}^n$ we denote the Euclidean norm of x by $\|x\|$;
- (ii) B is the closed unit ball $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$;
- (iii) given a compact subset $E \subset \mathbb{R}$ and a function $g : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, we will indicate by $\|g\|_\infty$ the supremum norm.

2.1 Time scales

A time scale is a nonempty closed subset $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ of the real numbers. An arbitrary bounded time scale \mathbb{T} will be taken, such that $a = \min \mathbb{T}$ and $b = \max \mathbb{T}$. We also suppose that $a < b$.

We define the forward jump operator $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ by

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

and the backward jump operator $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ by

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

Here we assume that $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$ and $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$.

Lemma 1 (Cabada [8]) *There exist $I \subset \mathbb{N}$ and $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$ such that*

$$RS := \{t \in \mathbb{T} : t < \sigma(t)\} = \{t_i\}_{i \in I},$$

where RS stands for right scattered points of the time scale \mathbb{T} .

Define the function $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty)$ by

$$\mu(t) = \sigma(t) - t.$$

If $A \subset \mathbb{R}$, we define the set $A_{\mathbb{T}}$ by $A_{\mathbb{T}} = A \cap \mathbb{T}$. We define $\mathbb{T}^\kappa := \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}]_{\mathbb{T}}$.

Consider a function $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ and $t \in \mathbb{T}^\kappa$. If $\xi \in \mathbb{R}$ is such that, for all $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ obeying

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \xi(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

for all $s \in (t - \delta, t + \delta)_{\mathbb{T}}$, we say that ξ is the delta derivative of f at t and we denote it by $\xi := f^\Delta(t)$.

Now, consider a function $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $t \in \mathbb{T}^\kappa$. We say that f is Δ -differentiable at t if each component $f_i : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ of f is Δ -differentiable at t . In this case $f^\Delta(t) = (f_1^\Delta(t), \dots, f_n^\Delta(t))$.

The next result is proven in [9] for scalar valued functions. But the generalization for vector valued functions is straightforward.

Theorem 1 (Bohner [9]) Consider a function $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ and $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Then the following statements hold:

- (i) If f is Δ -differentiable at t then f is continuous at t .
- (ii) If f is continuous at t and $\sigma(t) > t$, then f is Δ -differentiable at t . Furthermore,

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}.$$

- (iii) If $\sigma(t) = t$, then f is Δ -differentiable at t if and only if there exists the limit

$$\lim_{s \xrightarrow{\mathbb{T}} t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

as an element of \mathbb{R}^n . In that case

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \xrightarrow{\mathbb{T}} t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$

- (iv) If f is Δ -differentiable at t , then

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t).$$

2.2 Δ -measurable sets

Below, we recall the σ -algebra of subsets of the time scale \mathbb{T} .

Denote by \mathfrak{F} the collection of all subintervals of \mathbb{T} given by $[\tilde{a}, \tilde{b})_{\mathbb{T}} = \{t \in \mathbb{T} : \tilde{a} \leq t < \tilde{b}\}$, where $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{T}$. The interval $[\tilde{a}, \tilde{a})_{\mathbb{T}}$ is understood as an empty set.

Take an arbitrary subset $E \subset \mathbb{T}$. If there exists at least one sequence of intervals $[a_j, b_j)_{\mathbb{T}} \in \mathfrak{F}$ such that $E \subset \bigcup_j [a_j, b_j)_{\mathbb{T}}$, the outer measure of E is defined by

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_k) : E \subset \bigcup_k [a_k, b_k)_{\mathbb{T}}, [a_k, b_k)_{\mathbb{T}} \in \mathfrak{F} \right\}.$$

If there is no such a cover of E we set $m^*(E) = +\infty$.

The outer measure defined on \mathbb{R} will be denoted by λ^* .

Properties of the outer measure m^* can be founded in [8], [10], and [11]. Below, we have considered some of these properties.

Lemma 2 (Guseinov [10]) If $c, d \in \mathbb{T}$ and $c < d$ then

$$m^*([c, d)_{\mathbb{T}}) = d - c.$$

Using [11] one can prove the following lemma.

Lemma 3 (Royden [11]) If $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ is a sequence of subsets of \mathbb{T} , then

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m^*(E_i).$$

Lemma 4 (Cabada [8]) *Let $E \subset [a, b]_{\mathbb{T}}$ be such that $E \subset \{t \in \mathbb{T} : \sigma(t) = t\}$. Then*

$$m^*(E) = \lambda^*(E).$$

Definition 1 *A set $E \subset \mathbb{T}$ is said to be Δ -measurable (Lebesgue Δ -measurable) if*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{T} \setminus E))$$

for each $A \subset \mathbb{T}$.

Proposition 1 (Cabada [8]) *Take $E \subset \mathbb{T}$. Then E is Δ -measurable if and only if E is Lebesgue measurable.*

Thus we have the following result.

Theorem 2 *The family of Δ -measurable sets is a σ -algebra of \mathbb{T} .*

We will indicate by Δ the σ -algebra of Δ -measurable sets of \mathbb{T} . We call the measure $m^* : \Delta \rightarrow [0, +\infty]$ of Δ -measure of Lebesgue and denoted it by $m^* \equiv \mu_{\Delta}$.

Let $E \subset \mathbb{T}$. We say that a statement P holds Δ -almost everywhere (Δ -a.e.) on E , if the set N given by

$$N = \{t \in E : P \text{ does not hold at } t\}$$

satisfies $\mu_{\Delta}(N) = 0$.

2.3 Δ -measurable functions and Δ -integrability

We say that a function $f : \mathbb{T} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ is Δ -measurable if for each $r \in \mathbb{R}$ the set $\{t \in \mathbb{T} : f(t) < r\}$ is Δ -measurable. A vector valued function $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is said to be Δ -measurable if each component $f_i : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ of f is Δ -measurable.

Given a function $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ define $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ by

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in \mathbb{T} \\ f(t_i), & t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ for some } i \in I \end{cases}$$

where $I \subset \mathbb{N}$ and $\{t_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{T}$ are such that $\{t \in \mathbb{T} : t < \sigma(t)\} = \{t_i\}_{i \in I}$.

Proposition 2 (Cabada [8]) *Consider a function $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Then f is Δ -measurable if and only if \tilde{f} is \mathcal{L} -measurable.*

Proof. This result is stated in [8] for scalar valued functions f . However, it can be verified that it remains valid for vector valued functions. \blacksquare

For functions $f : \mathbb{T} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ the integration concept can be found, for example, in [11] and [14]. The integral of a function $f : \mathbb{T} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ over a set $E \in \Delta$ is denoted by

$$\int_E f(s) \Delta s.$$

We call this integral the Lebesgue Δ -integral of f over E and denote the set of functions $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ which are Δ -integrable over E by $L_1(E)$. If $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a Δ -measurable function and $E \in \Delta$, f is integrable over E if each component $f_i : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ is integrable over E . Denote by $L_1(E, \mathbb{R}^n)$ the set of functions $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ Δ -integrable over E .

Next, a result that relates the Lebesgue Δ -integral in time scales and the usual Lebesgue integral is presented.

If $E \subset \mathbb{T}$ we define the set \tilde{E} by

$$\tilde{E} = E \cup \bigcup_{i \in I_E} (t_i, \sigma(t_i))$$

where

$$I_E := \{i \in I : t_i \in E \cap RS\}.$$

The following result is provided in [8] for scalar valued functions. However, one can see that it holds for vector valued functions as stated below.

Theorem 3 (Cabada [8]) *Take a Δ -measurable set $E \subset \mathbb{T}$ such that $b \notin E$. Let $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a Δ -measurable function and $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ the extension of f previously defined. Then $f \in L_1(E, \mathbb{R}^n)$ if and only if $\tilde{f} \in L_1(\tilde{E}, \mathbb{R}^n)$. In this case*

$$\int_E f(s) \Delta s = \int_{\tilde{E}} \tilde{f}(s) ds.$$

The vector space $L_1([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ equipped with the norm

$$\|f\|_1 = \int_{[a, b]_{\mathbb{T}}} \|f(s)\| \Delta s$$

is a Banach space, as stated below.

Theorem 4 $L_1([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ is a Banach space.

We also have the following theorem.

Theorem 5 *Let $\{f_j\}$ be a sequence in $L_1([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ and $f \in L_1([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ such that $\|f_j - f\|_1 \rightarrow 0$. Then there exists a subsequence $\{f_{j_m}\}$ satisfying*

- (i) $f_{j_m}(t) \rightarrow f(t)$ for Δ -a.e. $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$;
- (ii) $\|f_{j_m}(t)\| \leq h(t) \forall m$ and for Δ -a.e. $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$, where $h \in L_1([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$.

Theorems 4 and 5 are obtained similar to [[12], Théorème IV.8.] and [[12], Théorème IV.9.], respectively.

We will use the following elementary result in the proof of lemma 6.

Lemma 5 *Let $k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a function in $L_1([a, b])$. For each $j \geq 1$ and $t \in [a, b]$ we have*

$$\int_a^t k(s_1) \int_a^{s_1} k(s_2) \cdots \int_a^{s_{j-1}} k(s_j) ds_j \cdots ds_2 ds_1 = \frac{\left[\int_a^t k(\tau) d\tau \right]^j}{j!}$$

where $s_0 = t$.

Lemma 6 Consider a function $k : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ in $L_1([a, b]_{\mathbb{T}})$. If

$$\eta(t) = \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} k(s_1) \int_{[a,s_1]_{\mathbb{T}}} k(s_2) \cdots \int_{[a,s_{j-1}]_{\mathbb{T}}} k(s_j) \Delta s_j \cdots \Delta s_2 \Delta s_1$$

we have

$$\eta(t) \leq \frac{\left[\int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} k(\tau) \Delta \tau \right]^j}{j!} \quad (1)$$

for all $j \geq 1$ and all $t \in \mathbb{T}$, where $s_0 = t$.

Proof. Define $g : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ by $g(s) = \int_{[a,s]_{\mathbb{T}}} k(\tau) \Delta \tau$. Then

$$\begin{aligned} \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} k(s_1) \int_{[a,s_1]_{\mathbb{T}}} k(s_2) \Delta s_2 \Delta s_1 &= \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} k(s_1) g(s_1) \Delta s_1 \\ &= \int_{[a,t]} \tilde{k}(s_1) \tilde{g}(s_1) ds_1. \end{aligned}$$

If $s_1 \in \mathbb{T}$ it follows that

$$\tilde{g}(s_1) = g(s_1) = \int_{[a,s_1]_{\mathbb{T}}} k(s_2) \Delta s_2 = \int_{[a,s_1]} \tilde{k}(s_2) ds_2.$$

However, if $s_1 \notin \mathbb{T}$ let $i \in I$ be such that $s_1 \in (t_i, \sigma(t_i))$. We have

$$\begin{aligned} \tilde{g}(s_1) &= g(t_i) = \int_{[a,t_i]_{\mathbb{T}}} k(s_2) \Delta s_2 \\ &= \int_{[a,t_i]} \tilde{k}(s_2) ds_2 \leq \int_{[a,s_1]} \tilde{k}(s_2) ds_2 \end{aligned}$$

and then

$$\begin{aligned} \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} k(s_1) g(s_1) \Delta s_1 &\leq \int_{[a,t]} \tilde{k}(s_1) \int_{[a,s_1]} \tilde{k}(s_2) ds_2 ds_1 \\ &= \frac{[\int_{[a,t]} \tilde{k}(\tau) d\tau]^2}{2!} = \frac{[\int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} k(\tau) \Delta \tau]^2}{2!}. \end{aligned}$$

Suppose the lemma is valid for $j \geq 2$. Below we find that the lemma is also valid for $j + 1$ and therefore by mathematical induction we conclude that the formula 1 is valid for all j .

Let $g : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ be defined by

$$g(s_1) = \int_{[a,s_1]_{\mathbb{T}}} k(s_2) \cdots \int_{[a,s_j]_{\mathbb{T}}} k(s_{j+1}) \Delta s_{j+1} \cdots \Delta s_2.$$

If $s_1 \in \mathbb{T}$ we have

$$\tilde{g}(s_1) = g(s_1) \leq \frac{[\int_{[a,s_1]_{\mathbb{T}}} k(\tau) \Delta \tau]^j}{j!} = \frac{[\int_{[a,s_1]} \tilde{k}(\tau) d\tau]^j}{j!}$$

and if $s_1 \notin \mathbb{T}$ let $i \in I$ be such that $s_1 \in (t_i, \sigma(t_i))$, thence

$$\begin{aligned} \tilde{g}(s_1) &= g(t_i) \leq \frac{[\int_{[a,t_i]_{\mathbb{T}}} k(\tau)\Delta\tau]^j}{j!} \\ &= \frac{[\int_{[a,t_i]} \tilde{k}(\tau)d\tau]^j}{j!} \leq \frac{[\int_{[a,s_1]} \tilde{k}(\tau)d\tau]^j}{j!} \end{aligned}$$

and thus

$$\begin{aligned} \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} k(s_1)g(s_1)\Delta s_1 &= \int_{[a,t]} \tilde{k}(s_1)\tilde{g}(s_1)ds_1 \\ &\leq \int_{[a,t]} \tilde{k}(s_1) \frac{[\int_{[a,s_1]} \tilde{k}(\tau)d\tau]^j}{j!} ds_1 \\ &= \frac{[\int_{[a,t]} \tilde{k}(\tau)d\tau]^{j+1}}{(j+1)!} = \frac{[\int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} k(\tau)\Delta\tau]^{j+1}}{(j+1)!}. \end{aligned}$$

■

2.4 Absolutely continuous functions in time scales

A function $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is absolutely continuous if given $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that

$$\sum_{i=1}^N \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon$$

whenever $a_i \leq b_i$ and $\{[a_i, b_i]_{\mathbb{T}}\}_{i=1}^N$ are disjoint intervals obeying

$$\sum_{i=1}^N (b_i - a_i) < \delta.$$

Theorem 6 given below is established in [13] for scalar valued functions. However, it is easy to see that it can be extended for vector valued functions as stated below.

Theorem 6 (Cabada [13]) *A function $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is absolutely continuous if and only if the following assertions are valid:*

- (i) f is Δ -differentiable Δ -a.e. on $[a, b]_{\mathbb{T}}$ and $f^\Delta \in L_1([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$;
- (ii) for each $t \in \mathbb{T}$ we have

$$f(t) = f(a) + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} f^\Delta(s)\Delta s.$$

We say that the function $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is an arc if it is absolutely continuous.

In the next lemma, we get a result on absolutely continuous functions in time scales.

Proposition 3 (Santos [7]) *Let $f : \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty)$ be a function in $L_1([a, b]_{\mathbb{T}})$. Given $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that, if $A \in \Delta$ and $\mu_\Delta(A) < \delta$ then*

$$\int_A f(s)\Delta s < \varepsilon.$$

Lemma 7 *If $v \in L_1([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ and $x_0 \in \mathbb{R}^n$, then the function $z : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ given by*

$$z(t) = x_0 + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} v(s) \Delta s$$

is an arc. Furthermore

$$z^{\Delta}(t) = v(t) \quad \Delta - \text{a.e. } t \in [a, b]_{\mathbb{T}}.$$

Proof. The function z is an arc because of Proposition 3.

Let $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ be such that there exists the delta derivative $z^{\Delta}(t)$. If $\sigma(t) > t$ we have

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) &= \frac{\int_{[a,\sigma(t)]_{\mathbb{T}}} v(s) \Delta s - \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} v(s) \Delta s}{\mu(t)} \\ &= \frac{\int_{[t,\sigma(t)]_{\mathbb{T}}} v(s) \Delta s}{\mu(t)} = v(t). \end{aligned}$$

If $\sigma(t) = t$ and t is a Lebesgue point of \tilde{v} , consider a sequence $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset [a, b]_{\mathbb{T}}$ such that $t_j \downarrow t$. It follows from Theorem 3 and property Lebesgue point [14] that

$$\begin{aligned} z^{\Delta}(t) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{z(t_j) - z(t)}{t_j - t} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\int_{[t,t_j]_{\mathbb{T}}} v(s) \Delta s}{t_j - t} \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\int_{[t,t_j]_{\mathbb{T}}} \tilde{v}(s) ds}{t_j - t} = \tilde{v}(t) = v(t). \end{aligned}$$

Thence, if $D = \{t \in [a, b]_{\mathbb{T}} : z^{\Delta}(t) \neq v(t)\}$ we have $D \subset A \cap E$, where

$$A = \{t \in [a, b]_{\mathbb{T}} : \sigma(t) = t\}$$

and E is the set of points $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ such that t is not a Lebesgue point of \tilde{v} . Using Lemma 4 we conclude that

$$m^*(D) \leq m^*(A \cap E) = \lambda^*(A \cap E) \leq \lambda^*(E) = 0$$

and thus $z^{\Delta}(t) = v(t)$ Δ -a.e. $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$. ■

2.5 Set-valued functions properties

Here we gather results of measurable multifunction that will be needed in the sequel.

Let (Ω, \mathcal{F}) be a measurable space. A set-valued function $E : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ is said to be \mathcal{F} -measurable if the set

$$E^{-1}(V) = \{x \in \Omega : E(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

is \mathcal{F} -measurable for all compact sets $V \subset \mathbb{R}^n$.

A set-valued function E is said to be closed or nonempty when its image $E(x)$ satisfies the required property, for each point $x \in \Omega$.

Lemma 8 (Castaing [15]) *Take a measurable space (Ω, \mathcal{F}) and a nonempty closed set-valued function $E : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. If E is \mathcal{F} -measurable, then E has a measurable selection.*

Lemma 9 (Castaing [15]) *Let $E : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ be a closed set-valued function and $\Gamma := \{t \in [a, b] : E(t) \neq \emptyset\}$. Then the following statements are equivalent:*

- (i) The set-valued function E is \mathcal{L} -measurable;
- (ii) The set $GrE = \{(t, v) : v \in E(t)\}$ is $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ -measurable;
- (iii) The set Γ is \mathcal{L} -measurable and there is a sequence of \mathcal{L} -measurable functions $\gamma_i : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^m$ such that

$$E(t) = \overline{\{\gamma_i(t) : i = 1, 2, \dots\}} \text{ for each } t \in \Gamma.$$

We have the following consequence of the previous lemma.

Corollary 1 Let $E_1, E_2 : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ be closed set-valued functions. If E_1 and E_2 are \mathcal{L} -measurable, then the set-valued function $E : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ given by

$$E(t) = E_1(t) \cap E_2(t)$$

is \mathcal{L} -measurable.

Consider a function $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. We say that ϕ is a Δ -Carathéodory function if it satisfies the followings properties:

- (i) for each $t \in \mathbb{T}$, the function $x \mapsto \phi(t, x)$ is continuous.
- (ii) for each $x \in \mathbb{R}^m$, the function $t \mapsto \phi(t, x)$ is Δ -measurable.

Let \mathcal{B}^m denote the Borel σ -algebra of \mathbb{R}^m . We use the notation $\Delta \times \mathcal{B}^m$ for the product σ -algebra between Δ and \mathcal{B}^m . We recall that the σ -algebra $\Delta \times \mathcal{B}^m$ is the least σ -algebra of $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^m$ that contains all products $A \times B$, where $A \in \Delta$ and $B \in \mathcal{B}^m$.

Lemma 10 (Loewen [16]) Let $\phi : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a \mathcal{L} -Carathéodory function. Then ϕ is $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^m$ -measurable.

Take a function $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. We define the function $\tilde{\phi} : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ by

$$\tilde{\phi}(t, u) = \begin{cases} \phi(t, u), & t \in \mathbb{T} \\ \phi(t_i, u), & t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ for some } i \in I. \end{cases}$$

Lemma 11 (Santos [17]) Let $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a Δ -Carathéodory function. Then $\tilde{\phi}$ is a \mathcal{L} -Carathéodory function.

Lemma 12 (Santos [17]) Let $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a Δ -measurable function. If $B \in \mathcal{B}^m$ then $u^1(B) \in \Delta$.

Proposition 4 Let $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ be a $\Delta \times \mathcal{B}^m$ -measurable set-valued function and $u : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^m$ a Δ -measurable function. Then the set-valued function $G : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ defined by

$$G(t) = F(t, u(t))$$

is Δ -measurable.

Proof. Denote by \mathcal{D} the collection of subsets

$$\mathcal{D} = \{E \subset \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m : \{t \in \mathbb{T} : (t, u(t)) \in E\} \in \Delta\}.$$

Then \mathcal{D} is a σ -algebra in $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^m$. If $A \in \Delta$ and $B \in \mathcal{B}^m$ it follows that

$$\{t \in \mathbb{T} : (t, u(t)) \in A \times B\} = A \cap u^{-1}(B) \in \Delta.$$

Thus $\Delta \times \mathcal{B}^m \subset \mathcal{D}$.

Take arbitrarily a compact set $V \subset \mathbb{R}^n$. We have

$$E = \{(t, u) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m : F(t, u) \cap V \neq \emptyset\} = F^{-1}(V) \in \Delta \times \mathcal{B}^m$$

and then $E \in \mathcal{D}$. Therefore

$$G^{-1}(V) = \{t \in \mathbb{T} : F(t, u(t)) \cap V \neq \emptyset\} = \{t \in \mathbb{T} : (t, u(t)) \in E\} \in \Delta$$

and G is Δ -measurable. ■

Proposition 5 *Take a Δ -Carathéodory function $\phi : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ and a Δ -measurable nonempty closed set-valued function $H : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. Suppose that for each $t \in \mathbb{T}$ there exists $u \in H(t)$ such that $\phi(t, u) = 0$. Thence the set-valued function $G : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ given by*

$$G(t) = \{u \in H(t) : \phi(t, u) = 0\}$$

has a Δ -measurable selection.

Proof. Since ϕ is a Δ -Carathéodory function, then $\tilde{\phi} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a \mathcal{L} -Carathéodory function. Hence $\tilde{\phi}$ is a $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^n$ -measurable function.

If the set-valued function $\Phi : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ is defined as $\Phi(t) = \{u \in \mathbb{R}^n : \tilde{\phi}(t, u) = 0\}$, we have

$$\begin{aligned} Gr\Phi &= \{(t, \gamma) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n : \gamma \in \Phi(t)\} \\ &= \{(t, \gamma) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n : \tilde{\phi}(t, \gamma) = 0\} \\ &= \tilde{\phi}^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{L} \times \mathcal{B}^n \end{aligned}$$

and it follows from Lemma 9 that Φ is \mathcal{L} -measurable, since Φ is closed.

Define $N : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ by $N(t) = \tilde{H}(t) \cap \Phi(t)$. As \tilde{H} is a closed and \mathcal{L} -measurable set-valued function we deduce that N is \mathcal{L} -measurable. Thence, for any compact subset $V \subset \mathbb{R}^n$ we have

$$\begin{aligned} G^{-1}(V) &= \{t \in \mathbb{T} : G(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{t \in [a, b] : N(t) \cap V \neq \emptyset\} \cap \mathbb{T} \in \mathcal{L} \end{aligned}$$

that is, $G^{-1}(V) \in \Delta$ and then G is Δ -measurable.

Since G is a nonempty closed and Δ -measurable set-valued function, from Lemma 8 we see that G has a Δ -measurable selection. ■

Consider a set-valued function $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. We say that F satisfies the hypotheses (H1) and (H2) if

(H1) F is a nonempty, closed and $\Delta \times \mathcal{B}^n$ -measurable set-valued function.

(H2) there exists a function $k : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ in $L_1([a, b]_{\mathbb{T}})$ such that for each $t \in \mathbb{T}$,

$$F(t, x) \subset F(t, y) + k(t)\|y - x\|B$$

for all x, y in \mathbb{R}^n .

To the set-valued function F we associate the function $\rho : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ given by

$$\rho(t, x, v) := \inf\{|v - y| : y \in F(t, x)\}.$$

Lemma 13 *Let $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ be a set-valued function satisfying the hypotheses (H1) and (H2). Then*

(i) *the function $t \mapsto \rho(t, x, v)$ is Δ -measurable for each (x, v) in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.*

(ii) *for any t in \mathbb{T} , and any x_1, x_2, v_1, v_2 in \mathbb{R}^n , one has*

$$|\rho(t, x_1, v_1) - \rho(t, x_2, v_2)| \leq k(t)\|x_1 - x_2\| + \|v_1 - v_2\|.$$

Proof. (i) Take $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrary. If $\alpha < 0$ we have

$$\{t \in \mathbb{T} : \rho(t, x, v) \leq \alpha\} = \emptyset \in \Delta.$$

On the other hand, if $\alpha \geq 0$ then

$$\{t \in \mathbb{T} : \rho(t, x, v) \leq \alpha\} = \{t \in \mathbb{T} : F(t, x) \cap \{v + \alpha B\} \neq \emptyset\} \in \Delta$$

since the set-valued function $t \rightsquigarrow F(t, x)$ is Δ -measurable by Proposition 4.

(ii) Fix an arbitrary $\delta > 0$. So there exists $\eta_2 \in F(t, x_2)$ such that

$$\rho(t, x_2, v_2) > |v_2 - \eta_2| - \delta.$$

By the hypothesis (H2) there exists $\eta_1 \in F(t, x_1)$ such that

$$\|\eta_1 - \eta_2\| \leq k(t)\|x_1 - x_2\|.$$

As $\rho(t, x_1, v_1) \leq \|v_1 - \eta_1\|$ it follows that

$$\begin{aligned} \rho(t, x_1, v_1) - \rho(t, x_2, v_2) &\leq \|v_1 - \eta_1\| - \rho(t, x_2, v_2) \\ &< \|v_1 - \eta_1\| - \|v_2 - \eta_2\| + \delta \\ &\leq \|v_1 - v_2\| + \|v_2 - \eta_1\| - \|v_2 - \eta_2\| + \delta \\ &\leq \|v_1 - v_2\| + \|\eta_2 - \eta_1\| + \delta \\ &\leq \|v_1 - v_2\| + k(t)\|x_1 - x_2\| + \delta. \end{aligned}$$

Similarly we obtain

$$\rho(t, x_2, v_2) - \rho(t, x_1, v_1) < \|v_1 - v_2\| + k(t)\|x_1 - x_2\| + \delta.$$

Since δ is arbitrary, the proof is complete. ■

Corollary 2 *Let $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ be a set-valued function obeying the hypotheses (H1) and (H2). If $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is an arc, then the set-valued function*

$$t \rightsquigarrow \{u \in F(t, x(t)) : \|u - x^\Delta(t)\| - \rho(t, x(t), x^\Delta(t)) = 0\}$$

has a Δ -measurable selection.

Proof. First, note that the function

$$t \mapsto \rho(t, x(t), x^\Delta(t))$$

is Δ -measurable. Indeed, if $w : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ is given by $w(t) = (x(t), x^\Delta(t))$, so $\tilde{w} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ is \mathcal{L} -measurable. Since $\rho : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ is a Δ -Carathéodory function, it follows that $\tilde{\rho} : [a, b] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ is a \mathcal{L} -Carathéodory function. It follows from Lemma 10 that the function $\tilde{\rho}$ is $\mathcal{L} \times \mathcal{B}^{2n}$ -measurable. Hence, the function

$$t \mapsto \tilde{\rho}(t, \tilde{w}(t))$$

is \mathcal{L} -measurable.

If $\alpha \in \mathbb{R}$ is arbitrarily fixed, we have

$$\{t \in \mathbb{T} : \rho(t, w(t)) < \alpha\} = \{t \in [a, b] : \tilde{\rho}(t, \tilde{w}(t)) < \alpha\} \cap \mathbb{T}$$

and so the function $t \mapsto \rho(t, w(t))$ is Δ -measurable.

Since the function

$$\phi(t, u) = \|u - x^\Delta(t)\| - \rho(t, x(t), x^\Delta(t))$$

is a Δ -Carathéodory function, we conclude the proof. \blacksquare

3 Existence and approximation of solutions

Finally, in this section we obtain the main result.

In the next theorem, we suppose that the set-valued function $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ obey the hypotheses (H1) and (H2), and we set

$$K = \exp\left\{\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} k(t)\Delta t\right\}.$$

If $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is an arc, we define

$$\rho_F(x) = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \rho(t, x(t), x^\Delta(t))\Delta t.$$

We also say that the arc x is a trajectory of F if it satisfies the inclusion

$$x^\Delta(t) \in F(t, x(t)) \quad \Delta - a.e. \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}}.$$

Theorem 7 (existence and approximation) *Consider a set-valued function $F : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. Then for any arc x and constant $\varepsilon > 0$ satisfying $\rho_F(x) < \frac{\varepsilon}{K}$, there exists a trajectory y of F such that $y(a) = x(a)$ and*

$$\|x - y\|_\infty \leq \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \|x^\Delta(s) - y^\Delta(s)\|\Delta s \leq K\rho_F(x).$$

Proof. The proof consists of the construction of a sequence of approximate trajectories $\{x_j\}$ starting from $x_0 \equiv x$ by choosing $x_{j+1}^\Delta(t)$ as the nearest point of $F(t, x_j(t))$ to $x_j^\Delta(t)$. We show that the sequence $\{x_j\}$ converges uniformly to the trajectory y of the theorem.

Let $G_0 : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ be a set-valued function defined as

$$G_0(t) = \{v \in F(t, x(t)) : \|v - x^\Delta(t)\| - \rho(t, x(t), x^\Delta(t)) = 0\}.$$

Hence G_0 has a Δ -measurable selection $v_0 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Since

$$\|v_0(t)\| \leq \|x^\Delta(t)\| + \rho(t, x(t), x^\Delta(t))$$

we have $v_0 \in L_1([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$. Thence the function $x_1 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ given by

$$x_1(t) = x_0 + \int_{[a, t]_{\mathbb{T}}} v_0(\tau) \Delta\tau$$

is an arc and satisfies

$$\begin{aligned} \|x_1(t) - x(t)\| &= \left\| \int_{[a, t]_{\mathbb{T}}} (v_0(s) - x^\Delta(s)) \Delta s \right\| \\ &\leq \int_{[a, t]_{\mathbb{T}}} \|v_0(s) - x^\Delta(s)\| \Delta s \leq \int_{[a, b]_{\mathbb{T}}} \|v_0(s) - x^\Delta(s)\| \Delta s \\ &= \int_{[a, b]_{\mathbb{T}}} \rho(s, x(s), x^\Delta(s)) \Delta s = \rho_F(x) \end{aligned}$$

for all $t \in \mathbb{T}$.

If the set-valued function $G_1 : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ is defined by

$$G_1(t) = \{v \in F(t, x_1(t)) : \|v - x_1^\Delta(t)\| - \rho(t, x_1(t), x_1^\Delta(t)) = 0\}$$

then G_1 has a Δ -measurable selection $v_1 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$. We have

$$\|v_1(t)\| \leq \|x_1^\Delta(t)\| + \rho(t, x_1(t), x_1^\Delta(t))$$

for each $t \in \mathbb{T}$. It follows from Lemma 13 that

$$\begin{aligned} \rho(t, x_1(t), x_1^\Delta(t)) &\leq \rho(t, x(t), x^\Delta(t)) + k(t)\|x_1(t) - x(t)\| + \|x_1^\Delta(t) - x^\Delta(t)\| \\ &\leq \rho(t, x(t), x^\Delta(t)) + k(t)\rho_F(x) + \|x_1^\Delta(t) - x^\Delta(t)\| \end{aligned}$$

and then $v_1 \in L_1([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$.

By defining the arc $x_2 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ as

$$x_2(t) = x_0 + \int_{[a, t]_{\mathbb{T}}} v_1(\tau) \Delta\tau$$

we obtain

$$x_2^\Delta(t) = v_1(t) \in F(t, x_1(t)) \quad \Delta - a.e. \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}}.$$

We also have

$$\begin{aligned} \|x_2^\Delta(t) - x_1^\Delta(t)\| &= \|v_1(t) - x_1^\Delta(t)\| = \rho(t, x_1(t), x_1^\Delta(t)) \\ &\leq \rho(t, x(t), x^\Delta(t)) + k(t)\|x_1(t) - x(t)\| \\ &\leq k(t)\rho_F(x) \quad \Delta - a.e. \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}} \end{aligned}$$

since

$$x_1^\Delta(t) = v_0(t) \in F(t, x(t)) \quad \Delta - a.e. \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}}.$$

Furthermore

$$\begin{aligned} \|x_2(t) - x_1(t)\| &= \left\| \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} (x_2^\Delta(s) - x_1^\Delta(s)) \Delta s \right\| \\ &\leq \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} \|x_2^\Delta(s) - x_1^\Delta(s)\| \Delta s \leq \rho_F(x) \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} k(s) \Delta s \end{aligned}$$

for each $t \in \mathbb{T}$.

Continuing the sequence x_j as previously, we get at each step

$$x_{j+1}^\Delta(t) \in F(t, x_j(t)) \quad \Delta - a.e. \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}}.$$

and

$$\|x_{j+1}^\Delta(t) - x_j^\Delta(t)\| \leq k(t) \|x_j(t) - x_{j-1}(t)\| \quad \Delta - a.e. \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}}.$$

By mathematical induction we find that

$$\|x_{j+1}^\Delta(t) - x_j^\Delta(t)\| \leq \rho_F(x) k(t) \alpha(t) \quad \Delta - a.e. \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}} \quad (2)$$

and

$$\|x_{j+1}(t) - x_j(t)\| \leq \rho_F(x) \beta(t) \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

where

$$\alpha(t) = \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} k(s_1) \int_{[a,s_1]_{\mathbb{T}}} k(s_2) \cdots \int_{[a,s_{j-2}]_{\mathbb{T}}} k(s_{j-1}) \Delta s_{j-1} \cdots \Delta s_2 \Delta s_1$$

and

$$\beta(t) = \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} k(s_1) \int_{[a,s_1]_{\mathbb{T}}} k(s_2) \cdots \int_{[a,s_{j-1}]_{\mathbb{T}}} k(s_j) \Delta s_j \cdots \Delta s_2 \Delta s_1.$$

From (2) we get

$$\begin{aligned} \|x_{j+1}^\Delta - x_j^\Delta\|_1 &= \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \|x_{j+1}^\Delta(s) - x_j^\Delta(s)\| \Delta s \\ &\leq \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \rho_F(x) k(s) \alpha(s) \Delta s \leq \rho_F(x) \frac{[\int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} k(s) \Delta s]^j}{j!} \end{aligned}$$

and then $\{x_j^\Delta\}$ is a Cauchy sequence in $L_1([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$. Thence there exists $v \in L_1([a, b]_{\mathbb{T}}, \mathbb{R}^n)$ satisfying

$$\|x_j^\Delta - v\|_1 = \int_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \|x_j^\Delta(s) - v(s)\| \Delta s \rightarrow 0.$$

If the arc $y : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ is defined by

$$y(t) = x_0 + \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} v(s) \Delta s$$

it follows that

$$\|x_j(t) - y(t)\| = \left\| \int_{[a,t]_{\mathbb{T}}} (x_j^\Delta(s) - v(s)) \Delta s \right\| \leq \|x_j^\Delta - v\|_1$$

for all $t \in \mathbb{T}$. Thus, $\{x_j\}$ converges uniformly to the arc y .

From Theorem 5 there exists a subsequence $\{x_{j_m}\} \subset \{x_j\}$ such that

$$x_{j_m}^\Delta(t) \rightarrow v(t) \quad \Delta - a.e. \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}}.$$

Consider $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ obeying

$$t \in \{s \in [a, b]_{\mathbb{T}} : x_{j+1}^\Delta(s) \in F(s, x_j(s)), \forall j\}$$

and

$$x_{j_m}^\Delta(t) \rightarrow v(t).$$

For each $m \geq 1$ there exist $b_m \in B$ and $c_m \in F(t, y(t))$ such that

$$x_{j_m}^\Delta(t) = c_m + \|x_{j_m-1}(t) - y(t)\|b_m$$

and so

$$v(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{j_m}^\Delta(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m \in F(t, y(t))$$

since F is closed.

As

$$y^\Delta(t) = v(t) \quad \Delta - a.e. \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$$

we may conclude that

$$y^\Delta(t) \in F(t, y(t)) \quad \Delta - a.e. \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}}.$$

Consider $j \geq 2$ arbitrarily fixed. Hence

$$\begin{aligned} \|x^\Delta(s) - y^\Delta(s)\| &\leq \|x^\Delta(s) - x_1^\Delta(s)\| + \|x_{j+1}^\Delta(s) - y^\Delta(s)\| \\ &\quad + \sum_{l=1}^j \|x_l^\Delta(s) - x_{l+1}^\Delta(s)\|. \end{aligned}$$

For each $l \in \{1, \dots, j\}$ we have

$$\|x_{l+1}^\Delta - x_l^\Delta\|_1 \leq \rho_F(x) \frac{[\int_{[a, b]_{\mathbb{T}}} k(s) \Delta s]^l}{l!}$$

and then

$$\begin{aligned} \|x^\Delta - y^\Delta\|_1 &\leq \|x^\Delta - x_1^\Delta\|_1 + \|x_{j+1}^\Delta - y^\Delta\|_1 \\ &\quad + \sum_{l=1}^j \|x_l^\Delta - x_{l+1}^\Delta\|_1 \\ &\leq \|x_{j+1}^\Delta - y^\Delta\|_1 + \rho_F(x) \sum_{l=0}^j \frac{[\int_{[a, b]_{\mathbb{T}}} k(\tau) \Delta \tau]^l}{l!} \\ &\leq \|x_{j+1}^\Delta - y^\Delta\|_1 + \rho_F(x) \exp\left\{\int_{[a, b]_{\mathbb{T}}} k(\tau) \Delta \tau\right\}. \end{aligned}$$

Since

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{j+1}^\Delta - y^\Delta\|_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x_{j+1}^\Delta - v\|_1 = 0$$

it follows that

$$\|x - y\|_\infty \leq \|x^\Delta - y^\Delta\|_1 \leq \rho_F(x) \exp\left\{\int_{[a, b]_{\mathbb{T}}} k(\tau) \Delta \tau\right\}.$$

■

4 Conclusion

This work contributes to the theory of time scales. More specifically, the Theorem 7 provides the existence and approximation of solutions for dynamic inclusions in time scales. Thus, we obtain a generalization of the result [[18], 3.1.6 Theorem]. In the spirit of the present study, [[19], Theorem 1] can be cited as the first result of existence and approximation of solutions to differential inclusions.

References

- [1] ATICI, F., and BILES, D. First order dynamic inclusions on time scales. *J Math Anal Appl* n.292, v.1, p.222-237. 2004
- [2] BELARBI, A., BENCHOHRA, M., and OUAHAB, A. Existence results for impulsive dynamic inclusions on time scales. *Electron J Qual Theory Difer Equ*, n.12, p.1-22. 2005
- [3] BOHNER, M., and TISDELL, C. Second order dynamic inclusions. *J Nonlinear Math Phys* v.12, n.2, p.36-45. 2005
- [4] CHANG, Y., and LI, W. Existence results for dynamic inclusions on time scales with nonlocal initial conditions. *Comput Math Appl* v.53, n.1, p.12-20. 2007
- [5] FRIGON, M., and GILBERT, H. Systems of first order inclusions on time scales. *Topol Methods Nonlinear Anal* v.37, n.1, p.147-163. 2011
- [6] GIREJKO, E., and TORRES, D. The existence of solutions for dynamic inclusions on time scales via duality. *Appl Math Lett* v.25, n.11, p.1632-1637. 2012
- [7] SANTOS, I., and SILVA, G. Absolute continuity and existence of solutions to dynamic inclusions in time scales. *Math Ann* v.356, n.1, p.373-399. 2013
- [8] CABADA, A., and VIVERO, D. Expression of the lebesgue δ -integral on time scales as a usual lebesgue integral: application to the calculus of δ -antiderivatives. *Math Comput Modelling* v.43, n.1-2, 194-207. 2006
- [9] BOHNER, M., and PETERSON, A. Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 2001.
- [10] GUSEINOV, G. Integration on time scales. *J Math Anal Appl* v.285, n.1, p.107-127. 2003
- [11] ROYDEN, H. Real analysis. The Macmillan Co., New York, 1963.
- [12] BREZIS, H. Analyse fonctionnelle. Theorie et applications. Masson, Paris, 1983.
- [13] , A., and VIVERO, D. Criteria for absolute continuity on time scales. *J Diference Equ Appl* v.11, n.11, p.1013-1028. 2005
- [14] RUDIN, W. Real and complex analysis, 3rd edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

- [15] CASTAING, C., and VALADIER, M. Convex analysis and measurable multifunctions. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 580. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [16] LOEWEN, P. Optimal control via nonsmooth analysis. CRM Proceedings & Lecture Notes, vol. 2. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.
- [17] SANTOS, I., and SILVA, G. Filippov's selection theorem and the existence of solutions for optimal control problems in time scales. *Comput Appl Math* v.33, n.1, p.223-241. 2014
- [18] CLARKE, F. Optimization and nonsmooth analysis. Classics in Applied Mathematics, vol. 5, 2nd edition. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1990.
- [19] FILIPPOV, A. Classical solutions of differential equations with multi-valued right-hand side. *SIAM J Control* 5 p.609-621. 1967

A Utilização de Equações Diferenciais Ordinárias na Determinação do Teor de Sólidos e Teor de Umidade de uma Composteira

Use of Ordinary Differential Equations in Determination of the Solid Content and the Humidity Content of a Compound

Camila Nicola Boeri Di Domenico

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Francisco Beltrão, PR
camiladomenico@utfpr.edu.br

Daniela da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Francisco Beltrão, PR
andresebben@gmail.com

João Henrique Alves Cerqueira

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Francisco Beltrão, PR
xaviersoler@uol.com.br

Maiquiel Schmidt de Oliveira

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Francisco Beltrão, PR
xaviersoler@uol.com.br

Resumo: O crescimento econômico acelerado está diretamente relacionado ao consumo e geração de resíduos sólidos. A política nacional de resíduos sólidos foi criada em 2010 como forma de instruir o gerenciamento adequado destes resíduos e elenca as principais formas de tratamento e destinação final adequada. Dentre estas, é citada a compostagem, que é uma maneira de tratar os resíduos orgânicos e obter ao fim do processo uma disposição final adequada. Para o bom andamento da compostagem, existem parâmetros como o teor de sólidos e água que devem ser analisados e estes devem decrescer e crescer, respectivamente, indicando assim que o processo de degradação está acontecendo. A fim de comparar os dados obtidos experimentalmente em laboratório e identificar possíveis erros absolutos de medida em uma composteira mesclada de óleo de origem animal e serragem e, para avaliar tais desempenhos, foi proposta a aplicação de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem de decrescimento e outra de crescimento. Estas equações serviram, também, para estimar os valores dos teores de sólidos e de água nas semanas em que não foi possível realizar as medições. As equações propostas representaram de forma satisfatória os fenômenos analisados e permitiram simular os dados faltantes.

Palavras-chave: compostagem; teor de sólidos; teor de água; equações diferenciais ordinárias.

Abstract: The accelerated economic growth is directly related to consumption and solid

waste generation. The national solid waste policy was created in 2010 as a way to instruct the proper management of the waste and lists the main forms of treatment and appropriated disposal, among these is the composting method, which is a way of treating organic waste and get at the end of the process the ideal disposal. To ensure the progress of the composting, there are parameters such as solids and water that must be analyzed and these should decrease and increase, respectively, indicating that the degradation process is going on. In order to compare the data obtained experimentally in the laboratory and identify possible errors in a compost mix of animal oil and sawdust and to evaluate such performance, it was proposed the application of an ordinary differential equation of decreasing and another one of growth. These equations were also used to estimate the values of solids and water contents in the weeks in which the measurements could not be performed. The proposed equations satisfactorily represented the analyzed phenomena and allowed to simulate the missing data.

Key words: composting; solids content; water content; ordinary differential equation.

1 Introdução

O modelo de desenvolvimento capitalista adotado, atualmente, pela maior parte dos Estados, é voltado para o incentivo ao consumo em detrimento da manutenção dos recursos naturais e tem como consequência direta de seu ciclo a produção de resíduos - em uma proporção superior ao atual potencial de tratamento dos mesmos.

Com a finalidade de remediar o atual e crescente passivo ambiental, o Congresso Federal Brasileiro legislou à cerca do tema através da Política Nacional de Resíduos Sólidos, norma que estabelece a não geração, redução, reutilização, reciclagem e tratamento dos resíduos sólidos, bem como disposição final ambientalmente adequada dos rejeitos, como diretriz dentro e fora da gestão pública [1].

Um dos meios para garantir a eficácia da legislação é a educação ambiental, sendo que as instituições de ensino apresentam um papel crucial para isso ao produzir e legitimar o conhecimento e, por isso, a institucionalização de boas práticas de gestão de resíduos dentro desse espaço se mostra como um método imperativo categórico [2].

É importante salientar os inúmeros problemas que o descarte inadequado de resíduos pode causar ao meio ambiente, além de ser um potencial criadouro de vetores que trazem doenças à população. Dentre os problemas pode-se citar a poluição do solo e a percolação destes materiais para o lençol freático, contaminando assim as águas subterrâneas e posteriormente as águas que irão para abastecimento urbano.

Uma das formas de reduzir esta disposição inadequada de resíduos é a compostagem, um procedimento simples e que pode ser realizada em casa. Desta forma, além de os resíduos orgânicos serem aproveitados para adubo, há uma diminuição de resíduos coletados pelo serviço de limpeza urbana, proporcionando assim um tempo de vida útil maior aos aterros sanitários.

A compostagem é definida como um conjunto de técnicas que são aplicadas com a finalidade de controlar o acondicionamento final dos materiais orgânicos, com o intuito de se obter em um tempo razoavelmente curto um material rico em húmus e nutrientes minerais, desta forma, gera-se um ciclo produtivo com características sustentáveis que utiliza as sobras para produzir adubo [3].

Esse processo pode ocorrer de forma aeróbia ou anaeróbia, em função da presença de

oxigênio no processo. Na compostagem anaeróbia (sem oxigênio) a decomposição ocorre com a ação microbiótica sobre o resíduo orgânico e é caracterizada pela baixa temperatura, maior tempo para obtenção do composto final e odores desagradáveis durante o processo. A compostagem aeróbia, por sua vez, demanda menos tempo, não apresenta odor desagradável durante a decomposição e atinge uma temperatura de até 70°C [4].

O composto final obtido através da compostagem traz diversos benefícios, se for aplicado ao solo este propicia uma carga maior de nutrientes as plantas e também ajuda a estabilizar a estrutura do solo, melhora a aeração e a infiltração de água, além de proporcionar uma maior atividade de biomassa e microbiana [5]. No entanto, se a pessoa não possui uma área de plantação, este adubo pode ser vendido para os produtores próximos, gerando se assim uma fonte de renda para a família. Para o presente trabalho foi montada uma composteira em forma de pilha, com óleo de origem animal e serragem. Com os dados auferidos do acompanhamento da reação foi estruturada uma equação diferencial ordinária (EDO) para modelar o problema e avaliar o andamento do processo de compostagem de óleo de origem animal com serragem em relação ao tempo. Para a aplicação da equação utilizou-se o teor de sólidos (granulometria) e o teor de água (umidade), e com base no decaimento e aumento desses teores, respectivamente, em relação ao tempo decorrido, possibilitou verificar se o processo de compostagem está ou não acontecendo.

A granulometria é um dos principais indicadores da eficácia do processo de decomposição do resíduo e também determinante na qualidade para uso em fertilização do composto obtido [6].

O teor de umidade também é um fator importante na compostagem, visto que sem água os microrganismos não vão degradar a matéria orgânica. Para a compostagem, a umidade ideal está entre 50% e 60%, pois se este valor for muito abaixo não haverá atividade microbiológica, se for muito úmido, a degradação da matéria se torna mais lenta. Durante o processo o teor de umidade não pode ficar abaixo de 40%, se o teor de umidade for muito alto, há uma ocupação do espaço vazio com água e desta forma há uma restrição à ocupação do ar e conseqüentemente da propagação do oxigênio [7]

Desta forma, o estudo teve por objetivo modelar o processo de compostagem de resíduos sólidos, por meio de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem: uma que descreve a variação do teor de sólidos em função do tempo e outra que analisa a variação do teor de água em função.

2 Metodologia

Os dados para análise da composteira foram coletados, periodicamente, por cerca de 90 dias e levados para o laboratório da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. As amostras foram coletadas e analisadas em triplicata.

Durante o período de acompanhamento da reação, variáveis climáticas tiveram interferência na temperatura e umidade das pilhas e, conseqüentemente, geraram alterações na velocidade das reações.

Para o teor de água pesou-se 10 gramas de amostra e colocou-se na estufa pelo período de 24 horas. Após isso, as amostras ficaram cerca de 15 minutos no dessecador para atingir temperatura estável para serem pesadas novamente. Por fim, através da fórmula e de posse desses valores, foi calculada a porcentagem do teor de água.

Para o teor de sólidos as amostras foram coletadas secas da estufa, amassadas no almofariz com a ajuda de um pistilo e pesadas em 2 gramas de amostra para cada cadinho antes

de serem levadas à mufla, onde permaneceram por 2 horas. Após este período, as amostras foram levadas ao dessecador por cerca de 20 minutos e na sequência foram pesadas. Para a obtenção do valor do teor de sólidos foi realizada a subtração de pesos dos cadinhos antes e depois das amostras serem incineradas na mufla.

Depois de finalizado o período de acompanhamento e com os dados obtidos das amostras foi possível realizar a modelagem deles com a utilização de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem. O objetivo da modelagem foi simular os valores da concentração de sólidos do composto e umidade para as semanas em que as medições não foram possíveis de serem realizadas, bem como estimar os valores de erros absolutos relacionados às variáveis climáticas e erros operacionais. A equação diferencial ordinária de primeira ordem que descreve a variação do teor de sólidos ao longo do tempo é dada por:

$$\frac{dS}{dt} = kS, \quad (1)$$

em que, $S \equiv$ teor de sólidos (%) e $k \equiv$ coeficiente de decaimento.

Já a equação diferencial de primeira ordem proposta para descrever a variação da umidade em relação ao tempo é dada por :

$$\frac{dA}{dt} = KA, \quad (2)$$

sendo, $A \equiv$ teor de umidade (%) e $K \equiv$ coeficiente de aumento.

As Equações 1 e 2 foram resolvidas analiticamente por meio de variáveis separáveis, a fim de se obter as soluções gerais que descrevem, respectivamente, a variação do teor de sólidos e a variação do teor de água, em função do tempo.

A partir das soluções gerais, foram determinados por meio de análise de regressão os valores dos coeficientes de decaimento (k) e de aumento (K) e modelados os problemas descritos no estudo. Para uma melhor visualização do comportamento dos teores de sólidos e de água da composteira, foi utilizado o software Excel para dispor os dados obtidos tanto no laboratório como pela EDO.

3 Resultados e Discussão

No que se refere à variação do teor de sólidos em função do tempo, os dados coletados são mostrados no Quadro 1:

Quadro 1. Dados do teor de sólidos em função do tempo.

Semana	Teor de sólidos experimental
1	0,30
2	0,13
4	0,06
5	0,05
6	0,03
8	0,03
9	0,05
10	0,04
11	0,02

Observa-se que a análise não foi realizada nas semanas 3 e 7, bem como não foi medido o valor inicial do teor de sólidos da composteira. Para simular estes valores faltantes, utilizou-se a Equação 1, descrita anteriormente. Resolvendo-a, obtém-se a Função 3 que modela a variação do teor de sólidos em função do tempo:

$$S(t) = c e^{kt} \quad (3)$$

em que: $t \equiv$ tempo da pilha (semanas) e $c \equiv$ valor inicial do teor de sólidos (%).

A partir dos valores coletados experimentalmente e por meio de análise de regressão, foi possível estimar os valores das constantes c e k . Assim a Equação 3 pode ser reescrita como:

$$S(t) = 0,48 e^{0,461t} \quad (4)$$

Através dessa função, o teor de sólidos de compostagem pode ser obtido em qualquer momento durante a amostragem. Assim, foi possível determinar os valores para as semanas faltantes, simular o teor de sólidos inicial bem como estimar a concentração para aquelas semanas em que houve erro de coleta. A comparação entre os dados experimentais e os simulados é mostrada na Figura 1:

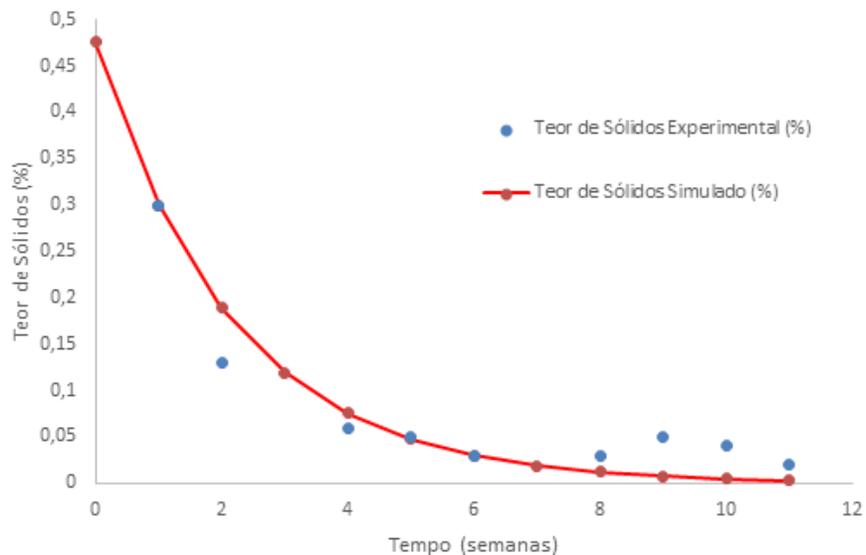


Figura 1. Comparação entre os dados experimentais e simulados para o teor de sólidos

A partir das simulações realizadas, foi possível estimar o valor inicial do teor de sólidos da composteira, que ficou em aproximadamente 0,48. Também foram feitas as estimativas para a terceira semana, com um teor de sólidos aproximado de 0,12 e sétima semana, aproximadamente de 0,02.

Analisando os dados do teor de sólidos é possível observar que a reação de compostagem alcança estabilidade em relação à granulometria presente na sua composição a partir do vigésimo terceiro dia e o cálculo utilizando o coeficiente de decaimento (EDO) obtido pelos valores de contorno deixa de apresentar resultados próximos à realidade obtida experimentalmente. Demais alterações podem ser explicadas devido a erros por parte dos operadores

visto que a princípio a reação estava ocorrendo da forma mais recomendada, ou seja, o teor de sólidos obteve um decaimento.

Em relação à variação do teor de água na composteira em função do tempo, os dados coletados ao longo das semanas estão mostrados no Quadro 2:

Quadro 2. Dados do teor de água em função do tempo.

Semana	Teor de água experimental
1	15,43
2	15,50
4	32,03
5	30,10
6	33,80
8	44,73
9	55,63
10	58,90
11	62,70

Para o teor de água, observa-se que os dados foram bastante oscilatórios no início do processo, oscilações estas que podem ser explicadas devido às intempéries que a composteira sofreu, bem como por possíveis erros operacionais durante o processo de monitoramento - onde água foi inserida semanalmente no processo. No entanto, os valores estão dentro da média que a literatura recomenda para que a compostagem ocorra de forma ideal. Para corrigir os valores da segunda e da quinta semana, bem como simular o teor de água inicial da composteira, foi utilizada a Equação 2 descrita anteriormente.

A solução geral desta equação é dada pela expressão a seguir:

$$A(t) = C e^{Kt}, \quad (5)$$

em que: $t \equiv$ tempo da pilha (semanas) e $C \equiv$ teor inicial de água (%)

Tendo-se os dados experimentais do teor de água em função do tempo e por meio de uma análise de regressão, foram estimados os valores das constantes C e K , ficando assim:

$$A(t) = 23,24 e^{0,09t}. \quad (6)$$

Com a Expressão 6, foram feitas as simulações e comparadas aos dados experimentais conforme a Figura 2:

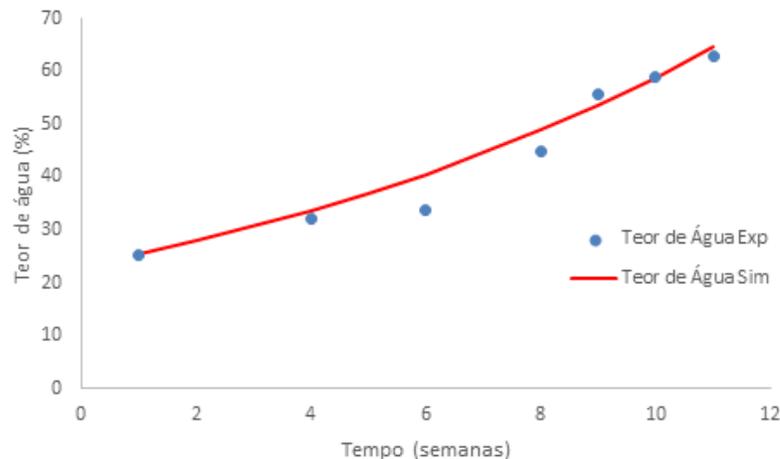


Figura 2. Comparação entre os dados experimentais e simulados para o teor de água da composteira

A partir das simulações realizadas, estimou-se os teores de água inicial, da segunda e da quinta semana, respectivamente, iguais a 23,26%, 27,92% e 36,94%.

4 Conclusão

A compostagem apresenta estabilidade no teor de sólidos com o decorrer de cerca de 20 dias. Para essas amostras, a estabilidade foi alcançada com a granulometria média de 0,045. O teor de água obteve uma média de cerca de 55%, o que comprova que o processo ocorreu de forma aeróbia.

No entanto, com os dados obtidos experimentalmente foi possível concluir que o composto é passível de degradação e o material estabilizado pode ser utilizado para fertilização [8].

As simulações realizadas foram importantes para estimar os valores das semanas em que não foi possível realizar as medições, bem como verificar quais os valores iniciais dos teores de sólidos e de água da composteira. Porém, com os inúmeros fatores que interferiram na composteira e na evolução do seu processo de decomposição, foram encontradas divergências entre valores experimentais e analíticos.

Os fatores que podem ter contribuído são diversos, mas as variações climáticas, as quais o composto esteve sujeito durante o experimento, impossibilitam a precisão dos resultados calculados, visto que a reação de compostagem é extremamente suscetível às mudanças de temperatura e umidade e no período da análise, houve dias de chuvas intensas, fortes ventos, baixas temperaturas e geada.

Referências

- [1] BRASIL. Política Nacional de Resíduos Sólidos. Lei 12.305 de 2 de Agosto de 2010.
- [2] KANT, Immanuel. A Metafísica dos Costumes, Edipro, 2003.

DOMENICO, C. N. B. D.; SILVA, S. D.; CERQUEIRA, J. H. A.; OLIVEIRA, M. S. D.

- [3] PEIXOTO, M. *et al.* Compostagem: Construção e Benefícios. In: Resumos do I Congresso Paranaense de Agroecologia, 15566, 2014 – Pinhais/Paraná. Anais: ISSN 2236-7934 – Vol 9, No. 1, 2014. Disponível em: <http://aba-groecologia.org.br/revistas/index.php/cad/article/view/15566>.
- [4] MANUAL GERENCIAMENTO INTEGRADO DE RESÍDUOS SÓLIDOS (IBAM - 2001).
- [5] REZENDE, F. A. Aproveitamento da Casca de Café e da Borra de Gorduras e Óleos Residuários Em Compostagem. Dissertação de Doutorado. Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2010.
- [6] BUSNELLO, J. F.; *et al.* pH e granulometria em compostagem de pequena escala com diferentes fontes de resíduos. *Cadernos de Agroecologia*, v.6, n.2, p.1-6. 2013.
- [7] COSTA, A. R. S.; *et al.* O Processo da Compostagem e Seu Potencial na Reciclagem de Resíduos Sólidos. ISSN 2447-0740. Disponível em: <http://www.journals.ufrpe.br/index.php/geama/article/view/503>.
- [8] LEITE, P. D.; POVINELLI, J. Comportamento dos sólidos totais no processo de digestão anaeróbia de resíduos sólidos urbanos e industriais. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v.3, n.2, p.229-232. 1999
- [9] ABNT (São Paulo, SP). NBR-10004, Resíduos sólidos - classificação, 1987.
- [10] BRONSON, Richard. Moderna Introdução Às Equações Diferenciais. 3ª edição. São Paulo. Makron Books. 1977.
- [11] GONÇALVES, M. *et al.* Gerenciamento de Resíduos Sólidos na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Francisco Beltrão. *Revista Brasileira de Ciências Ambientais*. n.15, p.79-84. 2010.