GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA

A DEMONSTRAÇÃO ANALÍTICA DE BOLZANO PARA O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

ARTHUR HELLER[1]

RESUMO: O objetivo deste artigo é analisar uma tentativa extremamente precoce e precisa, apesar de um pouco restrita, de oferecer uma fundação clara e rigorosa para resultados de análise real. A tentativa que temos em mente é a presente no trabalho de Bolzano. Essencialmente, nos debruçaremos sobre seu artigo de 1817 intitulado "Uma demonstração puramente analítica do teorema segundo o qual entre dois valores que oferecem resultados de sinal oposto há ao menos uma raiz real da equação". Nele, Bolzano tenta proporcionar uma definição clara e precisa do que significa para uma função ser contínua e então demonstrar uma versão do que agora chamaríamos de teorema do valor intermediário, que é como nos referiremos ao teorema mencionado no título do artigo de Bolzano.

Palavras-chave: Bolzano, Prova analítica, teorema do valor intermediário.

1 Bacharel e mestre em filosofia (PUC-SP). Doutor em filosofia (Columbia Universty). E-mail: heller.arthurheller@gmail.com

DOI 10.5935/2179-9180.20210006

BOLZANO'S ANALYTIC PROOF OF THE INTERMEDIATE VALUE THEOREM

ABSTRACT: The goal of this paper is to review a very early and incredibly accurate, albeit somewhat restricted, attempt at providing such a clear and rigorous footing. The attempt we shall have in mind here is the one present in Bolzano›s work. Essentially, we shall be concerned with his 1817 paper entitled ″Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign there lies at least one real root of the equation". In it, Bolzano attempts to provide a clear and rigorous definition of what it is for a function to be continuous and then to prove a version of what one would now call the intermediate value theorem, which is what we shall name the theorem stated in the title of the paper.

Keywords: Bolzano, analytic proof, intermediate value theorem.

1. INTRODUÇÃO

No início do século XIX, um grande número de resultados matemáticos interessantes já haviam sido estabelecidos por meio de métodos introduzidos inicialmente por Newton e Leibniz já há mais de um século. No entanto, é sabido que as controvérsias sobre os fundamentos lógicos desses métodos estavam longe de serem solucionadas e a sua aceitação generalizada na comunidade matemática se baseava quase que exclusivamente no seu poder de proporcionar soluções para problemas geométricos e físicos combinado com o acordo tácito entre matemáticos da época de que isso era tudo que era exigido para uma teoria matemática ser considerada respeitável.

Muito da conversa sobre «fluentes» e «fluxões», ou sobre a geração de linhas pelo movimento de pontos indivisíveis, de planos por linhas indivisíveis etc., e também de incrementos infinitesimais que deixam de satisfazer a propriedade arquimediana, mesmo que criticados desde a sua introdução nos trabalhos de Newton e Leibniz, respectivamente, ainda tinham um uso indiscriminado; de fato, com o tempo, uma terminologia mais palatável foi introduzida, mas as intuições correspondentes ainda ditavam a construção de soluções para problemas particulares, a construção de demonstrações para teoremas gerais e, na realidade, das próprias definições das noções mais fundamentais. Um bom exemplo disso, e, de fato, um que se relaciona com uma noção a ser discutida mais a frente nesse artigo, é a definição de Lacroix para a continuidade de uma função — ou, na

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 81-95, 2018.

terminologia da época, para a satisfação da lei de continuidade por uma função — que retiramos da quinta edição do seu *Traité* élémentaire de *calcul différentiel et de calcul intégral* de 1837

> Deve-se entender pela lei de continuidade aquela que é observada na descrição de linhas por movimento, e de acordo com a qual os pontos consecutivos de uma linha se sucedem sem intervalos. (p. 88)

Nela, é claro como, já no curso do século XIX, noções de análise real ainda eram tratadas por meio de um tipo de intuição física relacionada à noção de movimento que permeavam toda a conversa a respeito de fluentes e fluxões proposta por Newton e seus seguidores.

Entretanto, já no século XVIII, sinais de que essa situação era insuportável, e de fato embaraçosa, começavam a aparecer e matemáticos que buscavam rigor como Gauss e Lagrange já começavam a reconhecer não só a necessidade de se colocar o método do cálculo sobre uma fundação clara e rigorosa — que, dados exemplos como O analista de Berkeley e a resposta de MacLaurin entitulada *Um tratado sobre fluxões*, era algo reconhecido desde sua própria introdução. Todavia, o fato de que essa fundação clara e rigorosa resultaria em um banimento completo de quaisquer intuições geométricas ou dinâmicas de sua exposição, desde as demostrações de seus diversos teoremas e, em particular, das definições de suas noções fundamentais.

O objetivo deste artigo é analizar uma tentativa extremamente precoce e precisa, apesar de um pouco restrita, de oferecer uma tal fundação clara e rigorosa. A tentativa que temos em mente é a presente no trabalho de Bolzano. Essencialmente, nos debruçaremos sobre seu artigo de 1817 intitulado "Uma demonstração puramente analítica do teorema segundo o qual entre dois valores que oferecem resultados de sinal oposto há ao menos uma raiz real da equação". Nele, Bolzano tenta proporcionar uma definição clara e precisa do que significa para uma função ser contínua e então demonstrar uma versão do que agora chamaríamos de teorema do valor intermediário, que é como nos referiremos ao teorema mencionado no título do artigo de Bolzano.

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 82-96, 2018.

2. TENTATIVAS PRÉVIAS DE DEMONSTRAR O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

O teorema do valor intermediário, tal como ele é expresso no título do artigo de Bolzano, assim como outras proposições relacionadas de ainda maior generalidade, era bem conhecido no tempo de Bolzano — e, dado seu caráter altamente intuitivo, era tomado como verdadeiro muito antes da tentativa de Bolzano de demonstrá-lo —, sendo usado largamente na derivação de outros resultados matemáticos e jogando um papel fundamental na aplicação ao problema de calcular aproximações numéricas das raízes de uma dada função polinomial. Entretanto, matemáticos da época tinham dificuldade em encontrar uma demonstração para esse teorema que não se baseasse em intuições espaciais ou temporais. Particularmente comum era a derivação desse teorema a partir da asserção de que qualquer linha contínua que começa abaixo do eixo X e termina acima dele deve cruzá-lo ao menos uma vez. Contudo, uma pequena reflexão é suficiente para ver que essa proposição geométrica é uma consequência simples do teorema analítico a ser demonstrado, de forma que usar aquela para demonstrar este é incorrer em um claro círculo argumentativo.

Outra tentavida de demostrar esse teorema é exemplificada na tentativa de Lacroix, presente no seu *Elementos de álgebra*. Nele, Lacroix se baseia numa intuição física capturada na passagem de Lagrange citada por ele:

> "É assim", diz o Sr. Lagrange, "que dois corpos em movimento supostamente atravessando a mesma linha e que, começando de pontos diversos, chegam simultaneamente a outros dois pontos de forma que o corpo que estava atrás inicialmente se encontra na frente do outro, devem necessariamente se cruzar nos seus percursos (p. 292).

No entanto, é interessante notar que, mesmo que Lagrange use essa intuição dinâmica para garantir ao leitor que haverá uma raiz entre dois valores de uma variável que possuem sinal trocado, ele no mesmo texto, ou seja, no seu *Lições elementárias sobre as matemáticas dadas na escola normal em 1795*, demonstra o teorema do valor intermediário de uma forma bastante rigorosa para o caso particular em que a função tem a forma

$$f(\mathrm{x}) = a_1 x^n + \mathrm{a}_2\mathrm{x}^{\mathrm{n}}{-}1 + \cdot\cdot\cdot + a_{n+1}.$$

Sua demonstração é a seguinte:

> Assim se demonstra que a proposição com a qual nos interessamos [i.e., o teorema

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 82-96, 2018.

do valor intermediário], considerando apenas a equação e reconhecendo-a como o produto dos fatores

$$x - a, x - b, x - c, \ldots,$$

a, b, c sendo as raízes; pois é evidente que esse produto não pode mudar de sinal se se substitui x por dois valores distintos, a não ser que ao menos um desses fatores mude de sinal; e mesmo que mais de um fator mude de sinal é fácil ver que o número deve ser ímpar. Assim, se A e B são os valores de x que fazem o fator x–b, por exemplo, ter sinal oposto, teria-se que haver, se A for maior que b, que B deve ser menor, e também conversamente; portanto, a raiz b deve estar necessariamente entre as quantidades A e B (*Oeuvres*, v. 7, pp. 251-252).

No entanto, deve-se ter em mente que, mais a frente, ele não só se fundamenta na intuição dinâmica mencionada por Lacroix, mas também apresenta vários resultados aproximatórios para encotrar raízes de equações por meio do que ele caracteriza como "um tipo de aplicação da geometria à álgebra" (ibid.). A forma como isso é realizado é imaginar uma certa função como uma curva num plano Cartesiano e relacionar as propriedades das raízes da equação que representa essa função como propriedades dos pontos em que a respectiva curva cruza o eixo *x*[2]. Dessa maneira, Lagrange mostra diversas propriedades geométricas dessas curvas, dentre as quais podemos encontrar o fato de que entre um ponto abaixo do eixo x e outro ponto acima dele teremos um número ímpar de pontos nos quais a curva cruza o eixo x, do que o teorema do valor intermediário se segue, de acordo com Lagrange[3].

Nesse sentido, parece que mesmo Lagrange, que deve ser considerado o primeiro matemático a se preocupar com os fundamentos do cálculo, no sentido em que essa expressão é compreendida no século XIX[4], ainda estava aprisionado na suposição tácita do século XVIII de que a matemática se preocupava essencialmente em resolver problemas e que, portanto, todas as intuições e técnicas que alguém poderia reunir para esse fim deveriam ser apresentadas e exploradas como análogas, ou seja, independentemente de seu status lógico.

Portanto, eu acredito que a clareza com que Bolzano reconhece, logo no início de seu artigo de 1817, que ambos os tipos de demonstração do terorema do valor

2 Essa era uma maneira onipresente de se estudar funções de uma variável real no século XVIII, quando a própria noção de "função" não era ainda claramente formulada e, como todas as funções de fato consideradas eram razoavelmente bem comportadas e tinham de fato uma tal representação geométrica, seria justificável pela experiência matemática que se acreditasse que todas as funções de uma variável real teriam realmente tal representação geométrica.

3 No entanto, essa não é nem de longe a única propriedade geométrica mencionada por Lagrange sobre essas curvas. Outras são consideradas também.

4 Cf. Grabiner (1981).

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 82-96, 2018.

intermediário que eram tradionalmente apresentadas no seu tempo eram altamente defeituosas é indicativo de uma intuição filosófica profunda com respeito ao tema em consideração, i.e., a tarefa de se proporcionar um fundamento rigoroso para a disciplina conhecida como análise. Não obstante, como mencionamos acima, essa intuição não era nova; preocupações com a validade do cálculo já haviam sido expressas já por contemporâneos de Newton e Libniz e continuaram recorrentes durante todo o século XVIII. A verdadeira novidade do trabalho de Bolzano nos fundamentos da análise foi mais matemático do que filosófico. Mais do que apresentar ideias claras acerca do problema que pairava sobre esses resultados matemáticos, a contribuição central de Bolzano parece ter sido análoga àquelas de Cauchy e Weierstrass, que se esforçaram para fornecer uma análise de noções como continuidade, convergência, limite etc. que não seriam baseadas nas intuições geométricas ou físicas através das quais o cálculo era apresentado até o início do século XIX.

3. CONTINUIDADE

A primeira coisa a se notar nesse sentido, então, é quão moderna é a definição de continuidade apresentada por Bolzano no seu artigo de 1817. Como notamos acima, durante o século XVIII, mas também — como podemos ver na definição de Lacroix mencionada acima — entrando também consideravelmente no século XIX, as noções fundamentais da análise eram apresentadas em termos de intuições físicas ou geométricas. A façanha de Bolzano nesse sentido é, portanto, fornecer uma definição de continuidade que é completamente independente desse tipo de intuição e que antecipa a definição canônica atual em termos de ϵ e δ que aparece nos trabalhos de Weierstass da segunda metade do século XIX. A definição de Bolzano é a seguinte:

> De acordo com a *definição* correta, a expressão *de que uma função fx varia de acordo com a lei de continuidade para todos os valores de x dentro ou fora de certos limites* significa simplesmente que, *se x é um tal valor, então a diferença $f(x + \omega) - fx$ pode ser feita menor que qualquer quantidade dada, desde que ω possa ser tão pequeno quanto se deseje.* (Bolzano (1817), p. 230)

Infelizmente, essa definição não é completamente precisa. De fato, podemos encontrar um exemplo de uma função que é descontínua na terminologia matemática moderna, mas que satisfaz a definição de Bolzano em 1817, a saber, a função dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathrm{Q} \\ {}^{1}/_{2} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ARTHUR HELLER

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 82-96, 2018.

Mais tarde, no seu manuscrito não publicado intitulado Teoria das funções, provavelmente escrito na dácada de 1820, vemos Bolzano se dar conta desse problema e corrigir sua definição de forma a requerer que a diferença $f(x+\omega) - fx$ seja não só pequena, mas também que ela permaneça pequena para todos $\omega' < \omega$ positivos. A definição correta é a seguinte:

> Se uma [...] função Fx de uma ou mais variáveis é constituída de tal maneira que a sua variação quando uma de suas variáveis passa de um certo valor x para um valor diferente x +Δx diminui *ad infinitum* à medida em que Δx diminui *ad infinitum* — em outras palavras, se Fx e $F(x + \Delta x)$ (este pelo menos para um certo valor do incremento Δx e todos os valores menores) são mensuráveis [em linguagem mais contemporânea, números reais estritamente positivos], e o valor absoluto da diferença
>
> $$f(x+\omega) - fx$$
>
> se torna e permanece menor que qualquer fração $^1/_N$ se tomarmos Δx pequeno suficiente (e tão pequeno quanto se quiser deixá-lo ser): então eu digo que *a função Fx* é contínua para o valor x [...] (Bolzano (1930), p. 14).

E isso é de fato equivalente à definição atual.

Tendo dito isso, não devemos deixar que esse pequeno problema corrigível nos deixe de reconhecer o quanto a definição original de Bolzano é um passo adiante enorme no projeto de providenciar uma fundamentação rigorosa para a disciplina de análise real. De fato, a definição de Cauchy, que é geralmente considerada como um ponto de virada em direção a uma apresentação mais rigorosa dessa disciplina, foi apresentada quatro anos mais tarde e é sob certas perspectivas ainda mais longe de uma completa compreensão quantificacional dessa noção como na definição em termos de ϵ e δ que é padrão atualmente.

No livro de Cauchy *Curso de Análise* de 1821, a maioria das definições do capítulo II — incluindo a definição de continuidade — são apresentadas em termos da noção de uma *quantidade infinitamente pequena*. Para Cauchy, essa é uma quantidade variável cujo

> valor numérico diminui indefinidamente de forma a convergir para o limite zero (*Cours d'Analyse*, p. 37).

Então, a noção de continuidade é dada da seguinte maneira:

> Dentre os objetos relacionados ao estudo de quantidades infinitamente pequenas, devemos incluir idéias sobre a continuidade e descontinuidade de funções. [...] Seja $f(x)$ uma função da variável x e suponha que para cada valor de x entre dois limites, a função sempre tenha um valor único. Se, começando com um valor de x contido

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 82-96, 2018.

nesses limites, adicionarmos à variável x um incremento infinitamente pequeno α, a própria função sofre um incremento da diferença

$$f(x+\alpha)-f(x)$$

que depende tanto da nova variável α e do valor de x. Dado isso, a função $f(x)$ é uma função *contínua* em x entre os limites assinalados se, para cada valor de x entre esses limites, o valor numérico da diferença

$$f(\mathrm{x}+\alpha)-f(x)$$

diminui indefinidamente com o valor de α. Em outras palavras, *a função* $f(\mathrm{x})$ *é contínua com respeito a* x *entre os limites dados se, entre esses limites, um incrmento infinitamente pequeno da variável sempre produz um incremento infinitamente pequeno da própria função.* (*Cours d'Analyse*, p. 43)

A primeira coisa que se abstrai dessas citações é que Cauchy ainda usa alguma da terminologia do século XVIII relacionada a quantidades infinitamente pequenas, mesmo que é claro a partir de sua descrição das quantidades infinitamente pequenas como um tipo de quantidade variável que ele tomou um passo adiante na direção de aprensentar o cálculo sem se basear na existência dessas quantidades infinitamente pequenas. No entanto, essas citações também parecem sugerir que Cauchy tomou indiscriminadamente a noção de *convergência a zero*, de forma que um incremento infinitamente pequeno é simplesmente pensado como um incremento variável que converge a zero. Então, continuidade é somente a asserção de que a diferença

$$(*) \qquad f(x+\alpha)-f(x)$$

converge a zero quando α vai para zero. Entretanto, se se usa esse fato como uma definição de continuidade, é claro que precisa-se ter uma noção clara de "convergência", que não é apresentada por Cauchy no seu livro de 1821. Na realidade, tudo que ele tem para dizer sobre convergência é que

> Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável particular indefinidamente se approximam um valor fixo de forma a terminar se diferenciando dele por tão pouco quanto se queira, esse valor fixo é chamado limite de todos os outros valores. (*Cours d'Analyse*, p. 19)

E, honestamente, essa asserção não parece ser mais rigorosa ou precisa que a asserção de convergência para um limite de D'Alembert publicada 55 anos antes na sua entrada da *Enciclopédia:*

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 82-96, 2018.

> Dizemos que uma certa quantidade é o limite de outra quantidade quando a segunda pode se aproximar da primeira mais que uma quantidade dade, tão pequena quanto pudermos supô-la.

Tudo isso deixa claro que Bolzano deve ser reconhecido como possuindo certa precedência com respeito ao trabalho de clarificar esse conceito tão importante de continuidade, tanto com a sua um pouco problemática definição de 1817 e especialmente com a sua definição completamente rigorosa, mesmo que talvez um pouco mais complicada do que o necessário, do *Teoria das funções*. E isso ainda é verdade mesmo que tenha-se que concordar que, de fato, essas melhorias feitas por Bolzano tenham permanecido bastante desapercebidas até a segunda metade do século XIX devido a varias razões sociológicas e políticas que forçaram o trabalho de Bolzano para a obscuridade.

4. SEQUÊNCIAS DE CAUCHY E A COMPLETUDE DOS NÚMEROS REAIS

Outro conceito importante apresentado pela primeira vez por Bolzano é o de uma seqüência de Cauchy. Essa noção foi introduzida de forma extremamente clara e precisa por Cauchy no seu livro de 1821, mas ela já estava completamente presente no artigo de 1817 de Bolzano; e, em contraste com a definição de continuidade, que certamente carece de alguma precisão, a sua definição de seqüência de Cauchy é completamente rigorosa:

> Dentre essas seqüências, é particularmente interessante a classe das seqüências que possuem a propriedade segundo a qual a *mudança* no valor (*incremento ou diminuição) devida a qualquer continuação* posterior dos termos, sempre permanece menor que uma certa quantidade, a qual pode ser escolhida *tão pequena quanto desejado* desde que a seqüencia tenha sido continuada longe o suficiente antes (§5, p. 237).

Então, no §7, Bolzano tenta demonstrar que toda seqüência de Cauchy converge, mas sua demonstração é falaciosa porque ela supõe a própria existência da quantidade cuja existência deve se demonstrar. No entanto, há aqui um problema mais profundo do que meramente uma demonstração falaciosa, pois Bolzano falha em reconhecer que o que deve ser fornecido e talvez o possa ser por essa propriedade das seqüêcias de Cauchy é uma definição puramente analítica dos números reais; e, não obstante todas as realizações de Bolzano nesse artigo, deve-se reconhecer que muito trabalho ainda havia a ser feito para fornecer bases sólidas à análise real. Eventualmente, Bolzano reconheceria o fato que uma caracterização dos números reais era necessária para demonstrar esse tipo de teorema e, de fato, no seu *Teoria das funções* ele proporá uma caracterização interessante em termo do que ele chama de "funções mesurantes" e tenta demonstrar essa propriedade das seqüências de Cauchy a partir dessa caracterização. Mas, sem contar esse desenvolvimento posterior no que pode-se considerar uma tentativa de apresentar uma caracterização completa dos números reais, essa preocupação não estava presente no artigo de 1817.

No entanto, supondo essa propriedade de seqüências de Cauchy, Bolzano deriva de forma perfeitamente rigorosa uma formulação equivalente da completude dos números reais.

Propriedade de Bolzano. Seja $M \subset \mathbb{R}$ com $M \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Se existir $u \in \mathbb{R}$ tal que, para todo y < u, y $\in M$, então existe um certo U $\in \mathbb{R}$ tal que U é o maior número real para o qual, para todo y < U , y $\in M$.

Demonstração. Como $M \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ e, para todo $y < u$, $y \in M$, existe $D > 0$ tal que existe $x < u + D$ e $x \notin M$. Consideramos a seqüência

$$X_n = u + {}^{D}/_{2^n}.$$

Se, para todo $n \in \mathbb{N}$, exite $x_n < X_n$ tal que $x_n \notin M$, então não há nada mais a ser provado. Então, supomos que há um menor $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que não existe $x_{n0} < X_{n0}$ e fazemos $V_0 = X_{n0}$.

Por um argumento similar, tomando X_{n0} no lugar de u, obtemos

$$V_1 = u + {}^{D}/_{2^{n_0}} + {}^{D}/_{2^{n_1}}$$

e, em geral, temos uma seqüência

$$V_k = u + \sum_{i=0}^{k} {}^{D}/_{2^{n_i}}$$

tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $x < V_k$ implica $x \in M$. É fácil ver que devemos ter $n_{k+1} > n_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, de forma que, dado um número natural $r > 1$,

$$V_{k+r} - V_k = \sum_{i=1}^{k} {}^{D}/_{2^{n_{k+i}}} < D \sum_{i=1}^{k} {}^{1}/_{2^{k+i}}$$

Isso significa que a seqüência V_n é Cauchy, pois $\sum^{k} {}^{1}/_{2^i}$ é Cauchy. Portanto, essa seqüência converge a um número real U.

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 82-96, 2018.

Agora, precisamos checar que U satisfaz as duas propriedades mencionadas no teorema. Primeiro, precisamos mostrar que, para todo $x < U$, $x \in M$. Para isso, suponhamos que $U - \delta \in M$, para algum $\delta > 0$. Então, como por construção todos os valores menores que V_n não estão em M, para todo $n \in N$, devemos ter $\omega > 0$, tal que para cada $n \in N$,

$$V_n < U - \delta + \omega,$$

ou seja,

$$U - V_n > \delta - \omega,$$

o que contradiz o fato que essa diferença pode ser feita tão pequena quanto se queira.

A última coisa a se mostrar é que U é o maior número que satisfaz essa propriedade. Para isso, consideramos uma seqüência relacionada:

$$V_k^* = V_{k-1} + {}^{D}/_{2^{n_{k-1}}}$$

Por um argumento similar ao do último parágrafo podemos mostrar que essa seqüência é Cauchy e como podemos fazer ${}^{D}/_{2^{n_{k-1}}}$ tão pequeno quanto se precisar tomando k grande o suficiente, temos que

$$|\, V_k^* - U \,| = |V_{k-1} + {}^{D}/_{2^{n_{k-1}}} - U \,| \leq |\, V_{k-1} - U \,| + |\, {}^{D}/_{2^{n_{k-1}}} \,|$$

e, portanto, que V_k^* também converge U. Em particular, portanto, podemos fazer $V_k^* < U + \epsilon$, para k grande o suficiente. Por outro lado, pela construção das duas seqüências, temos que, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe um $x < V_k^*$ tal que $x \notin$ M. Dessa maneira, para k grande o suficiente, existe $x < U + \epsilon$ tal que x $\notin M$, e isso completa a demonstração.

É interessante notar que a asserção dessa propriedade é equivalente à caracterização da completude dos números reais em termos da propriedade do menor limitante superior. De fato, se as suposições do antecedente da propriedade de Bolzano são verdadeiras, então U é simplesmente o menor limitante superior do conjunto M e, conversamente, se temos $P \subseteq \mathbb{R}$ limitado, consideramos o conjunto $M = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in Py \geq x\}$. Esse conjunto satisfaz o antecedente da propriedade de Bolzano e, portanto, podemos concluir a existência do U no teorema; e esse U será o menor limitante superior de P.

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 82-96, 2018.

5. O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO

Agora, com o que chamamos de propriedade de Bolzano, este pode demons- trar de forma perfeitamente rigorosa para um teorema bastante genral, que claramente implica o teorema do título de seu artigo como uma instância particular.

Theorem 1. Sejam f, φ funções contínuas de uma variável real tais que $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$ e $f(\beta) > \varphi(\beta)$. Então, existe $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha < \gamma < \beta$, tal que $f(\gamma) = \varphi(\gamma)$.

Claramente, o teorema do título é simplesmente um caso especial desse teorema mais geral, tomando $\varphi(x) = 0$.

Demonstração. Como Bolzano não possia uma notação para a fução módulo $|\cdot|$, ele teve que proceder por casos, considerando todas as possíveis combinações de sinais de α e β.

I. $0 < \alpha < \beta$. Nesse caso, temos $\beta = \alpha + i$, $i > 0$. Se $\omega > 0$ for pequeno o suficiente, $f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)$, pois

$$\varphi(\alpha + \omega) - f(\alpha + \omega) = \varphi(\alpha) + \Omega' - f(\alpha) - \Omega$$

e $\Omega' - \Omega$ pode ser feito arbitrariamente pequeno se ω for pequeno, isto é, dado $\epsilon > 0$, seja ω tal que $0 < \Omega < \Omega' < {}^{\epsilon}/_{2}$.

Agora, seja $M = \{\omega \mid f(\alpha + \omega) < \varphi(\alpha + \omega)\}$. Então, $i \notin M$, de tal forma que, pela propriedade de Bolzano, há um maior $U \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $x < U$, $x \in M$. Temos $0 < U < i$. Não pode ocorrer de $U \geq i$ porque, por um argumento análogo ao do último parágrafo, temos $\omega' > 0$ tal que $f(\alpha + i - \omega') > \varphi(\alpha + i - \omega')$.

A asserção, então, é que $f(\alpha+U) = \varphi(\alpha+U)$. Podemos mostrar isso mostramos que nenhum deles pode ser estritamente maior que o outro. Primeiro, se

$$f(\alpha + U) < \varphi(\alpha + U),$$

então existiria $\omega > 0$ tal que

$$f(\alpha + U + \omega) < \varphi(\alpha + U + \omega),$$

o que contradiz o fato que U é o maior número real para o qual $x \in M$ para todo $x < U$. Por outro lado, se

$$f(\alpha + U) > \varphi(\alpha + U),$$

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 82-96, 2018.

então existiria $\omega > 0$ tal que

$$f(\alpha + U - \omega) > \varphi(\alpha + U - \omega),$$

o que contradiz o fato que $x \in M$ para todo $x < U$.

Os outro casos são bastante análogos ao primeiro e, de fato, como o auxílio da função módulo, poderíamos demonstrar tudo de uma vez. Mas, porque Bolzano não se utiliza dessa notação (mesmo que ele na realidade tivesse familiaridade com a noção de valor absoluto), ele deve ainda considerar os casos remanescentes.

II. Para o caso no qual $\beta < \alpha < 0$, deve-se proceder com a demonstração da mesma maneira e simplesmente supor ω, i e U como < 0.

III. (i) Se $0 = \alpha < \beta$, tomamos $i = \beta$ e ω, $U > 0$. (ii) Se $0 = \alpha > \beta$, tomamos $i = \beta$ e ω, $U < 0$.

IV. Finalmente, se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$, tomamos $f(0)$ e $\varphi(0)$. Se $f(0) = \varphi(0)$, então não há nada mais a ser mostrado; se $f(0) < \varphi(0)$, então estamos de volta ao caso III(i); e se $f(0) > \varphi(0)$, então estamos de volta ao caso III(ii).

Essa deve certamente ser considerada a primeira demonstraão verdadeiramente rigorosa de uma formlulação do teorema do valor intermediário. Quatro anos mais tarde, no seu *Curso de análise*, Cauchy publicou uma demonstração igualmente rigorosa que usa uma técnica parecida à utilizada por Bolzano na prova do que chamamos de propriedade de Bolzano. No entanto, parece certo que as descobertas de Cauchy foram independentes e, como Grabiner (1981) nota, isso se deve ao fato de que, na virada do século XVIII para o XIX, a comunidade matemática já possuia essencialmente todas as técnicas necessárias para uma formulação rigorosa do cálculo.

Cauchy foi, de fato, quem reuniu a maioria dessas técnicas e que reconheceu seu verdadeiro potêncial. No entanto, o que se quer lembrar aqui é que, quando Cauchy publicou seu trabalho em 1821, Bolzano já havia feito o mesmo no contexto de um resultado particular de análise real, fornecendo uma definição rigorosa de continuidade e, partindo dessa definição, demostrando uma propriedade importante de funções contínuas que ainda permanecia um pouco obscura na mente dos matemáticos da época.

6. CONCLUSÃO

A História do processo de transformação do cálculo em uma disciplina matemática rigorosa chamada presentemente de análise real é fascinante e se desdobra em um periodo de quase dois séculos, desde as primeiras propostas bem articuladas feitas por Newton e Leibniz até as apresentações completamente rigorosas de matemáticos como Riemann e Weierstrass no final do século XIX. Essa História possui algumas claras pedras de apoio tais como os trabalhos de D'Alambert, Euler, Lagrange, Lacroix e especialmente Cauchy. No entanto, pelo que vimos neste artigo, parece que, para possuirmos uma imagem completa dos esforços de aqueles que almejavam rigor nas matemáticas e gostariam de proporcionar bases sólidas ao cálculo, não podemos negligenciar as contribuições feitas por Bolzano.

Dada a sua falta de reputação matemárica, é verdade que seus resultados deixaram de possuir uma audiência mais ampla e certamente tiveram muito menos influência histórica do que os resultados similares e aproximadamente simultâneos de Cauchy. Ademais, deve-se reconhecer que, ainda que os resultados de Bolzano são verdadeiramente notáveis para alguém trabalhando às margens da comunidade matemática de seu tempo, esses resultados são estreitos e inscipientes se comparados à todalidade do trabalho requerido para o projeto de colocar o cálculo sobre bases rigorosas. De fato, mesmo se esses resultados são possivelmente superiores footnote, no sentido de que eles são mais claros, mais precisos e, num certo sentido, mais próximos às apresentações contemporâneas. quando comparados aos resultados análogos de Cauchy no tema, deve-se ter em mente o número de noções relacionadas e outros resultados que pertencem ao cálculo e que não foram contemplados por Bolzano.

Talvez possamos dizer que, se ele as tivesse também considerado, suas análises seriam igualmente superiores às de Cauchy; mas o fato é que Bolzano não considerou noções como a de limite de funções arbitrárias e suas possíveis derivadas e Cauchy o fez de uma maneira que é um definitivo passa adiante no sentido das apresentações rigorosas que temos atualmente.

Não obstante, um ponto ainda é verdadeiro: Bolzano de fato considerou algumas noções pertencentes à análise real — em particular, a noção de continuidade, algumas formas do teorema do valor intermediário e inclusive a noção de uma seqüência de Cauchy. Mais ainda, sua apresentação desses temas é em muitos aspectos superior ao modo no qual Cauchy o faz alguns anos mais tarde.

REFERÊNCIAS

[1] Berkeley, G. (1734), *The Analyst* or *A discourse addressed to an infidel mathematician*, London: Jacob Tonson.

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 82-96, 2018.

[2] Bolzano, B. (1817), "Rein analytischer Beweis der Lehrsatzes, dass zwis- chen je zwey Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, we- nigstens eine reelle wurzel der Gleichung liege», Prague: Gottlieb Haase.

[3] Bolzano, B. (1930), *Spisy Bernarda Bolzana*, v. 1, Prague: Royal Bohe- mian Academy of Sciences.

[4] Cauchy, A. (1821) *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, Pa- ris: Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliotèque du Roi.

[5] Grabiner, J. (1981), *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, Cam- bridge: MIT Press.

[6] Lacroix, S. F. (1812), *Éléments d'algebre: a l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations*, Paris: Corcier Imprimeur-Libraire pur les Mathé- matiques.

[7] Lacroix, S. F. (1837), *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris: Bachelier Imprimeur-Libraire de l'École Polythecnique.

[8] Lagrange, J. L. (1877), *Oeuvres de Lagrange*, Paris: Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique.

[9] MacLaurin, C. (1742), *A Treatise of Fluxions*, Edinburg: Ruddimans

ISSN 2179-9180
GUAIRACÁ REVISTA DE FILOSOFIA, GUARAPUAVA-PR, V35, N2, P. 82-96, 2018.